Zadanie 1.

Rozważmy trzy funkcje zmiennej zespolonej:

$$f_1(z) = |z|^2, f_2(z) = z^2, f_3(z) = \frac{1}{\pi z}$$

Proszę obliczyć całki (n=1,2,3):

$$\int_{-i}^{a} f_n(z)\ dz + \int_{a}^{i} f_n(z)\ dz$$

w zależności od rzeczywistego parametru a.

Zadanie 2.

Rozważmy funcję zmiennej zespolonej z:

$$F(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

Narysuj w postaci powierzchni (**Plot3D** przyjmując $z = x + iy$) część rzeczywistą funkcji:

$$f(z) = \int F(z)dz + C$$

gdzie C jest tak dobrane aby $f(0) = 0$ oraz funkcji:

$$g(z) = \int_0^u F(z)dz$$

Jeżeli wyświetlisz obydwa te wykresy równocześnie (**Show**) otrzymasz fragment *powierzchni Riemanna* funkcji zdefiniowanej za pomocą powyższej całki.

Zadanie 3*.

Jak narysować większy fragment *powierzchni Riemanna*, np. dla funkcji z Zadania 2?

Zadanie 4.

Obliczyć średnią po wszystkich kierunkach wartość n-tej potęgi iloczynu skalarnego wersorów $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

Wskazówka:

Iloczyn skalarny wynosi:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \equiv \cos\theta$$

Wersory mają składowe we współrzędnych sferycznych:

$$\mathbf{e}_i = (\sin\vartheta_i \sin\varphi_i, \sin\vartheta_i \cos\varphi_i, \cos\vartheta_i)$$

więc ich iloczyn skalarny wynosi

$$\cos\theta = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2$$

Wartość średnia jest równa całce:

$$< (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^n >= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^n\theta \quad d\Omega_1\ d\Omega_2$$

gdzie element objętości we współrzędnych sferycznych jest równy:
$d\Omega_i = \sin\vartheta_i\ d\vartheta_i\ d\varphi_i$