

**Zadanie 1.**

Dokonaj zamiany zmiennej  $x$  według wzorów:

$$x = e^t, \quad t = e^x, \quad t = 1/x, \quad x = at + b, \dots$$

w następujących równaniach:

a)

$$y'' + y'/x + y/x^2 = 0$$

b)

$$y'' \pm y = 0$$

c)

$$y'' + y'^2 = 0$$

d) inne wg. uznania

*Wskazówka:* Jeżeli procedura podstawiania została dobrze zrozumiana, można zacząć od Zad. 2.

**Zadanie 2.**

a)

Napisz funkcję która dokonuje transformacji zmiennej niezależnej w równaniu różniczkowym zwyczajnym. Jako argumenty powinna przyjmować: (1) równanie różniczkowe zwyczajne oraz (2) funkcję przekształcającą zmienną niezależną i ewentualnie (3) nazwę (symbol) funkcji przetransformowanej lub/i zmiennej. Jako wynik

powinniśmy otrzymać przekształcone równanie różniczkowe.

b)

Uogólnij na układy r.r. zwyczajnych.

**Zadanie 3.**

Spróbuj sprowadzić równanie:

$$\theta'' + \frac{2}{x}\theta' + \theta^5 = 0$$

do postaci:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

korzystając z zamiany zmiennych i funkcji :

$$\zeta = e^t, \quad \theta(\zeta) = e^{\lambda \zeta} w(\zeta).$$

**Zadanie 4.**

Wyprowadź podany na wykładzie wzór na równanie różniczkowe spełniane przez funkcję odwrotną. Innymi słowy, udowodnij że, równanie różniczkowe otrzymane przez podstawienie:

$$y(\zeta) = Y^{-1}(\zeta), \quad x = Y(t)$$

w równaniu:

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

jest spełnione przez funkcję odwrotną do  $y(\zeta)$  (czyli funkcja  $Y$  jest odwrotna do  $y$ ). Jak należy transformować

warunki początkowe?

### Zadanie 5.

Rozwiąż równanie:

$$y' = e^{-y^2}$$

z warunkiem początkowym  $y(0) = 0$ . Porównaj z rozwiązaniami numerycznymi.

*Wskazówka:* Użyj równania na funkcję odwrotną.

### Zadanie 6.

Znajdź i rozwiąż równania na funkcje odwrotną w następujących przypadkach:

a)

$$y'' \pm y = 0$$

b)

$$y' + \frac{x}{1+y} = 0$$

c) inne wg. uznania

Sprawdź wyniki za pomocą **Solve** lub **FindRoot** transformując odpowiednio warunki początkowe oryginalnego równania.

*Wskazówka:* Rozważ najpierw warunki początkowe  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  i narysuj funkcję odwrotną na jednym wykresie razem z funkcją  $y = x$ . Ustaw opcje

AspectRatio→1 i osie tak aby otrzymać kwadrat. Po odbiciu względem przekątnej wykresy powinny być identyczne.