Zadanie 1.

Dana jest macierz kwadratowa $\mathcal{A}$ o elementach

$$A_{i,j} = (i - xj)^5$$

gdzie $i, j = 1, 2 \dots 6$.

Znajdź rzeczywiste rozwiązania równania:

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{A})\mathrm{Det}(\mathcal{A}^{-1}) = x$$

Zadanie 2.

Niech rzeczywista kwadratowa macierz $\mathcal{O}$ o wymiarze 3×3 dana jest wyrażeniem:

$$\mathcal{O} = e^{\alpha \mathcal{A}}$$

gdzie $\alpha > 0$ i składowe macierzy $\mathcal{A}$ są równe $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} n^k,$$

wektor $\mathbf{n}$ ma składowe n^k równe:

$$\begin{aligned} n^1 &= \cos\phi \sin\vartheta \\ n^2 &= \sin\phi \sin\vartheta \\ n^3 &= \cos\vartheta, \end{aligned}$$

natomiast ϵ_{ijk} to 3-wymiarowy symbol Levi-Civity o składowych $(i, j, k = 1, 2, 3)$:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i = j, i = k \text{ lub } j = k \\ +1 & \text{dla} \quad (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (2, 3, 1) \text{ lub } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{dla} \quad (i, j, k) = (1, 3, 2),\ (3, 2, 1) \text{ lub } (2, 1, 3) \end{cases}$$

Należy podać składowe macierzy $\mathcal{O}$ w następujacych przypadkach:

1. $\alpha = 0$
2. $\vartheta = 0$
3. $\vartheta = \pi/2,\ \phi = 0$
4. $\vartheta = \pi/2,\ \phi = \pi/2$

a ponadto obliczyć w przypadku ogólnym (dla dowolnych rzeczywistych wartości α, ϑ i ϕ) wyznacznik, ślad, wielomian charakterystyczny oraz wartości własne.

Zadanie 3.

Znaleźć energię (zerową składową) fotonu poruszającego się w kierunku osi y w układzie poruszającym się z prędkością v w kierunku osi z. Czteropęd fotonu Q transformuje się zgodnie z:

$$Q' = LQ$$

gdzie:

$$Q = \begin{bmatrix} E & n_x E & n_y E & n_z E \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

$\mathbf{n}$ – wersor określający kierunek ruchu fotonu, E – jego energia, a macierz transformacji Lorentza do układu poruszajcego się z prędkością $\mathbf{v}$ to:

$$L = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

$\beta_x = v_x/c$, $\beta_y = v_y/c$, $\beta_z = v_z/c$:

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$$

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2;$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Zadanie 4.

Dla macierzy $\mathcal{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{5} & \sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 2 & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} \\ 2 & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

obliczyć wyznacznik, ślad, macierz odwrotną, wartości własne i wektory własne. Dokonać dekompozycji macierzy do postaci

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{J}\mathcal{U},$$

gdzie diagonalna macierz $\mathcal{J}$ zawiera na przekątnej wartości własne macierzy $\mathcal{A}$.

Zadanie 5.

Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} + \mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{I}$$

gdzie:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{I}$ to macierz jednostkowa.

Zadanie 6.

Rozwiąż układ równań:

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= I \\
I_3 + I_4 &= I_1 + I_2 \\
I_1 - I_5 &= I_3 \\
I_2 + I_5 &= I_4 \\
RI_5 + R_1 I_1 &= R_2 I_2 \\
R_2 I_3 - RI_5 &= R_1 I_4 \\
R_1 I_1 + R_2 I_3 &= U
\end{aligned}
$$

z niewiadomymi $I, I_1 \dots I_5$ oraz parametrami R, R_1, R_2. Oblicz stosunek $R_z = U/I$ wynikający z rozwiązania powyższego układu równań w następujących przypadkach:

$$
\begin{array}{cc}
\text{dowolne } R, R_1, R_2, & R \to 0, \\
R \to \infty, & R_1 = R_2.
\end{array}
$$

Zadanie 7.

a) Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{A}$$

gdzie:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b*) Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{I}$$

gdzie macierz jednostkowa 2×2:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$