Poniżej znajduje się lista zadań, których rozwiązanie stanowi jeden z elementów egzaminu, zamiennie z przygotowaniem odpowiedzi na pytanie. Należy w dowolnym terminie (ale nie później niż w dniu egzaminu ustnego) zaprezentować rozwiązanie jednego z podanych niżej zadań. Zadania mają charakter otwarty, czyli akceptowalne są także rozwiązania częściowe. Lista zadań będzie się wydłużać, w miarę wprowadzania na wykładzie nowego materiału.

Zadanie 1. MESA. Ewolucja gwiazdy $4M_\odot$ aż do czarnego karła.

Pomimo liczbych prób nie udało się zmusić programu MESA aby doprowadził ewolucję aż do stadium stygnącego białego karła (Q_limit). Posługując się przykładami dla mas o masach $0.25, 0.5, 1, 2, 8M_\odot$ z wykładu oraz test_suite z programu MESA, znaleźć ustawienia, które naprawią sytuację. Problemy to m.in. wiatr gwiazdowy wolniejszy niż redukcja kroku czasowego obliczeń (nieskończenie długie obliczenia) lub/i niestabilność otoczki (zerowy krok czasowy).

Zadanie 2. Wyznaczenie ewolucji elementów orbity na podstawie rozwiązania numerycznego.

Za pomocą metod numerycznych bardzo łatwo rozwiązać zagadnienie N-ciał, w szczególności problemy, w których orbita ma charakter eliptyczny z wolno zmieniającymi się parametrami. Zaproponować i zademonstrować skuteczność metod pozwalających na wyznaczenie ewolucji elementów orbity eliptycznej (a, e, i, T itd.) w czasie na podstawie znalezionego wcześniej rozwiązania numerycznego problemu N-ciał.

Zadanie 3. Sprawdzenie zakresu stosowalności przybliżenia ruchu na orbicie okręgiem o zadanej gęstości liniowej.

W teorii perturbacji dowodzi się, że w pewnych sytuacjach szybko orbitującą masę zaburzającą m można z powodzeniem zastąpić przy pomocy gęstości liniowej masy rozłożonej na trajektorii eliptycznej. Jest to szczególnie proste w przypadku orbity kołowej, którą zastępujemy jednorodnym okręgiem. W ten sposób zastępujemy rozwiązanie problemu N-ciał ruchem w zadanym potencjale okręgu. Zadanie polega na numerycznej weryfikacji poprawności takiej metody.

Zadanie 4. Planeta utworzona z gazu Van der Waalsa.

Wyznaczyć zależność promień-masa dla kuli utworzonej z izotermicznego gazu Van der Waalsa. W obliczeniach uwzględnić możliwość skroplenia się gazu.

Zadanie 5. Gaz Van der Waalsa w rotującym układzie.

Rozwiązać równania równowagi hydrostatycznej dla równania stanu w postaci izotermicznego gazu Van der Waalsa w obracającym się w warunkach nieważkości ze stałą prędkością kątową cylindrze o znanych wymiarach. W obliczeniach uwzględnić możliwość skroplenia się gazu. Przedyskutować wykonanie eksperymentu i porównanie go z powyższymi wynikami.

Zadanie 6. Ultragęsty materiał.

Podać przykład substancji lub zaproponować aparaturę, która pozwoli na uzyskanie w warunkach laboratoryjnych „zwartego” obiektu (kula, sześcian itp.) o średniej gęstości co najmniej dwa razy przekraczającej gęstość metali takich jak złoto, platyna, uran czy wolfram, t.j. około 20000 kg/m^3. Masa i objętość aparatury powinna być wliczona do średniej. Celem jest zbudowanie źródła pola grawitacyjnego do laboratoryjnego pomiaru stałej grawitacyjnej. Wytworzenie materii o dużej gęstości, np: poprzez kompresję nanosekundowymi impulsami lasera, nie jest zadowalającym rozwiązaniem.

Zadanie 7.

Planetoida zbudowana w 100% z metalu o gęstości ρ_0 i module Younga E pod wpływem samograwitacji zwiększy gęstość średnią na skutek skurczenia promienia. Obliczyć zależność gęstości średniej od masy ciała dla kilku wybranych metali. W którym przypadku osiągamy największą gęstość średnią: zaczynając od dużego ρ_0 czy używając metalu o bardzo dużej ściśliwości?

Zadanie 8. Ustabilizowanie trójkątnego rozwiązania problemu 3 ciał.

Zbadać stabilność grawitującego układu czterch ciał, z których jedno umieszczono w środku masy układu, a pozostałe trzy poruszają się ze stałą prędkością kątową w wierzchołkach trójkąta równobocznego.

Zadanie 9.

W wyrażeniu na prędkość orbitalną układu N-ciał rozłożonych na okręgu pojawia się suma:

$$\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(i\pi/n\right)}.$$

Obliczyć powyższą sumę, dokładnie lub w przybliżeniu. Znaleźć zachowanie dla $n \to \infty$.

Zadanie 10. Czy ujemna masa musi zostać wyrzucona z układu mas dodatnich?

Zaproponować stabilny układ N-ciał w przypadku, gdy przynajmniej jedno z nich posiada ujemną masę grawitacyjną („ładunek grawitacyjny").

Zadanie 11. Widmo neutrin w przeszłości/przyszłości.

Obliczyć kształt widma neutrin dla spalającej wodór w cyklu *pp* lub/i CNO gwiazdy innej niż Słońce, ewentualnie Słońca na innym niż obecnie etapie ewolucji.

Zadanie 12. Prosta sieć reakcji termojądrowych.

Rozwiązać równania ewolucji ilości wodoru, deuteru, ^{3}He i ^{4}He w stałej temperaturze i gęstości. Uwzględnić pomijane zwykle w cyklu *ppI* reakcje termojądrowe, w szczególności pe^-p oraz $d + d \rightarrow ^4$He. Rozważyć warunki zarówno bliskie jak i i odległe od panujących w Słońcu.

Szybkości reakcji, np: http://ie.lbl.gov/astro/friedel.html

Zadanie 13. Realistyczna ewolucja gwiazdy.

Za pomocą programu MESA obliczyć ewolucję gwiazdy o masie innej niż 1 $M_\odot$, np: 10 lub 64 $M_\odot$.

Zadanie 14. Wpływ metaliczności na ewolucję gwiazdy.

Za pomocą programu MESA porównać ewolucję gwiazd różniących się tylko początkową metalicznością np: Z=0.02 oraz Z=0.002.

Zadanie 15. MESA w układzie podwójnym gwiazd.

Zastosować moduł programu MESA umożliwiający równoczesną ewolucję 2 gwiazd w układzie podwójnym na wybranym przykładzie.

Zadanie 16. Realistyczny kolaps grawitacyjny.

Za pomocą programu GR1D http://www.stellarcollapse.org/codes.html obliczyć przebieg kolapsu grawitacyjnego z hybrydowym równaniem stanu dla $\Gamma = 2$ (tzw. „miękki" EOS) oraz dla $\Gamma = 4$ („twardy" EOS) w obszarze powyżej gęstości jądra atomowego. Porównać ruch wytworzonej fali uderzeniowej.

Zadanie 17.

Międzygwiezdna planetoida Omuamua okazała się obiektem skrajnie wydłużonym w stosunku 1:10. Zakładając, że początkowo byłą kroplą cieczy (elipsoidą Jacobiego) obliczyć jej prędkość kątową i sprawdzić niestabilność.

Zadanie 18. Kluczowy rachunek twierdzenia Poincare-Wavre o rotujących gwiazdach.

Pokazać bezpośrednim rachunkiem we współrzędnych cylindrycznych, że podstawiając

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z) r \, \vec{e}_\phi$$

do

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})) = 0$$

otrzymujemy

$$2r\Omega(r, z) \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} = 0.$$

Zadanie 19. Stabilność w punkcie L4.

W ograniczonym, płaskim, kołowym zagadnieniu trzech ciał o masach m, M, μ, gdzie $\mu = 0$, pokazano, że położenie w punktach L4 i L5 nie jest eksponencjalnie niestabilne gdy:

$$\frac{25 - 3\sqrt{69}}{2} < \frac{m}{M} < \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2}.$$

Wyprowadzić powyższe liczby.

Zadanie 20. Realistyczny opis zjawisk w układzie rotującym ze sztuczną grawitacją.

W serialu „The Expanse” http://www.imdb.com/title/tt3230854/ przynajmniej dwukrotnie pojawiły się sceny, w których efekty pochodzące od sił w układzie obracającym się (Coriolisa) dają widoczne gołym okiem efekty. Akcja dzieje się na Ceres, dodatkowo rozkręconej (?) celem wytworzenia sztucznej grawitacji. W pierszej scenie (odcinek 2), strumień cieczy nalewanej z butelki do szklanki porusza się jak „tornado”.

W innej (odcinek 10), sypany „w dół” kurz spada na ziemię po spirali o malejącym promieniu. Obserwacja toru ruchu umożliwiała bohaterom przybliżone określenie pozycji wewnątrz Ceres.

Celem zadania sprawdzenie, poprzez rozwiązanie równań ruchu w obracajacym się układzie odniesienia, czy przedstawione efekty nie zostały przesadzone, lub wręcz zmyślone.