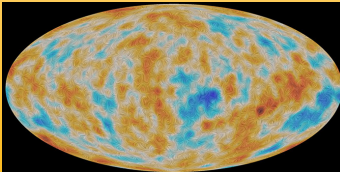
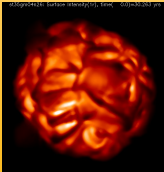


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

7 maja 2019



Teoria rotujących figur równowagi

Teoria rotujących ciał: rotacja sztywna

Zagadnienie struktury i ewolucji stacjonarnych (niezależnych od czasu, ale z niezerową prędkością), w szczególności „rotujących” samograwitujących ciał będziemy rozpatrywać zaczynając od dwóch skrajnych przypadków:

- 1 obiekty o stałej gęstości (klasyczna teoria figur równowagi)
- 2 obiekty nieważkie, o średniej gęstości dążącej do zera, poruszające się w polu masy punktowej (model Roche'a)

Można pokazać, że w przypadku rotacji ze stałą prędkością kątową, ciała o rozkładzie gęstości danym funkcjami Lane-Emdena (politropy) zachowują się jakościowo podobnie do powyższych modeli gdy:

- $n < 0.8$ ($\gamma = 1 + \frac{1}{n} > 2.25$) – jak ciało o stałej gęstości
- jak model Roche'a w przeciwnym przypadku

Wartość $n \simeq 1$ i mniej odpowiada materii z której zbudowane są np: planety lub gwiazdy neutronowe.

Elipsoidalne figury równowagi

Kształt powierzchni obracającego się ciała o stałej gęstości jest nieznan. Zakładając jednak rotację „sztywną”:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \text{const}$$

z przyspieszeniem odśrodkowym \vec{a} o potencjale odśrodkowym (centryfugalnym) Φ_c

$$\vec{a} = \Omega^2 r \vec{e}_r, \quad \Phi_c = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)$$

jednym z rozwiązań jest elipsoida, dla której znany jest wzór na potencjał grawitacyjny (wewnątrz)

$$\Phi_g = \pi G \rho \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i^2 - r_i^2) A_i$$

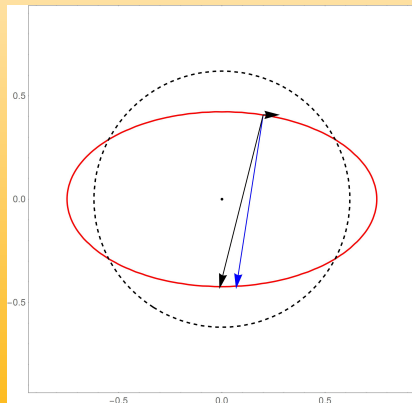
gdzie $\mathbf{a} = \{a, b, c\}$ to półosie elipsoidy, $r = \{x, y, z\}$ oraz

$$A_i = abc \int_0^\infty \frac{du}{(\mathbf{a}_i^2 + u) \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}}.$$

Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

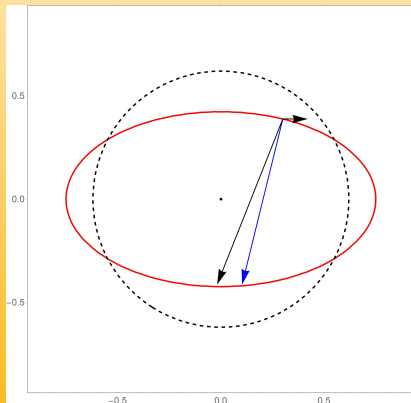
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

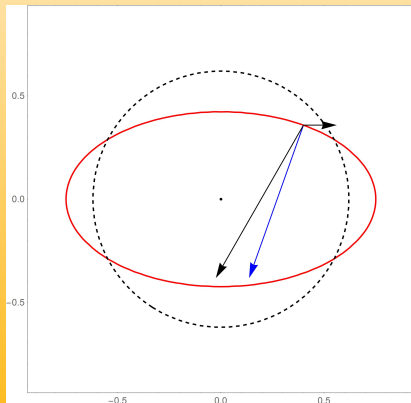
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

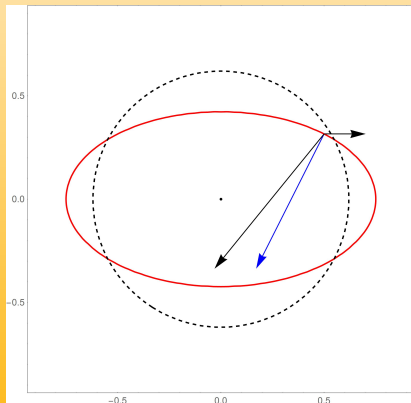
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

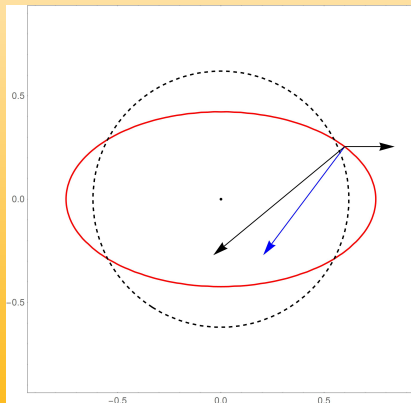
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

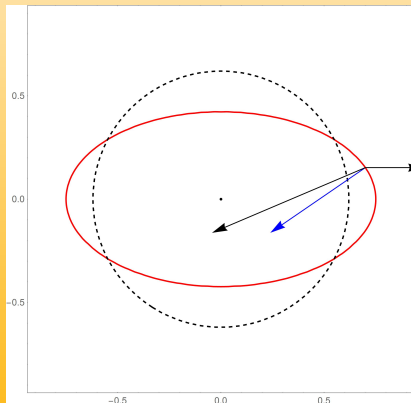
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

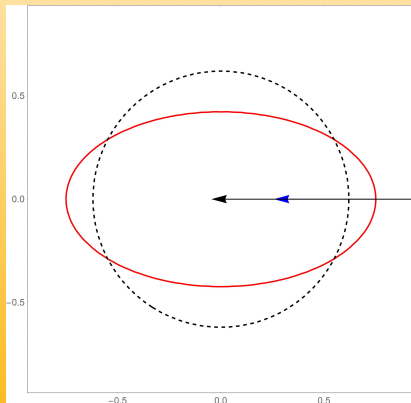
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina

Okazuje się, że równanie równowagi można przepisać w postaci równania elipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdzie:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_x - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_y - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{4}{3}\pi abc = M$$

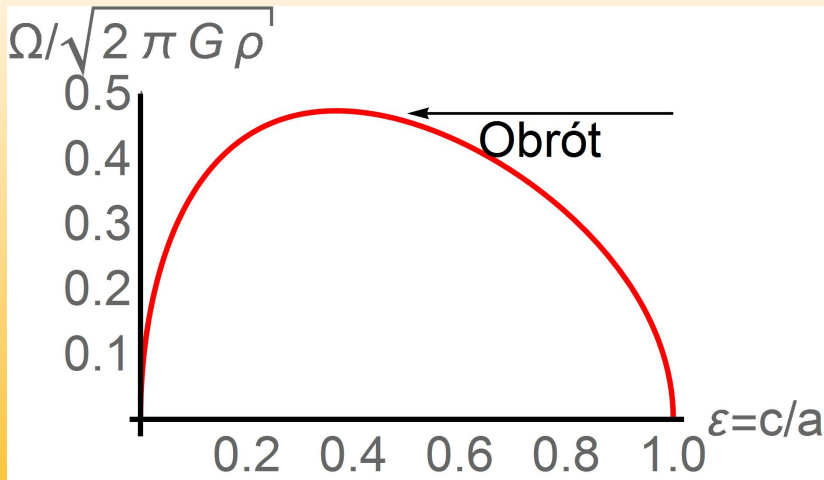
Rozwiązanie powyższego układu dla $a = b$ w zależności od bezwymiarowego parametru

$$\chi = \Omega^2 / (2\pi G\rho)$$

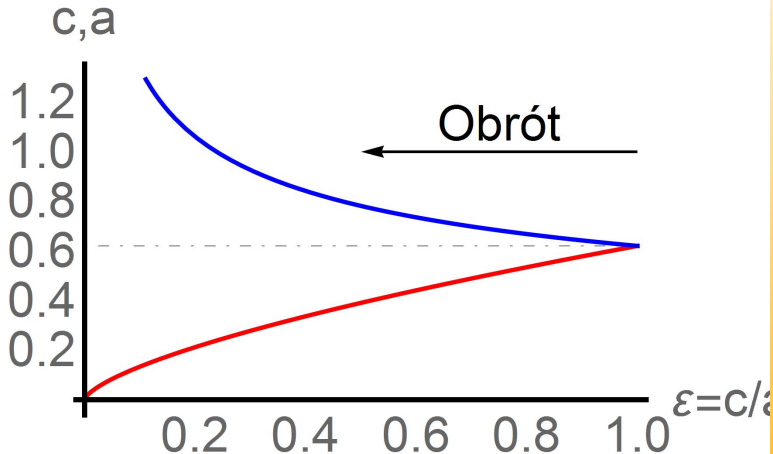
nazywamy *elipsoidą Maclaurina*. Oznaczając spłaszczenie przez $\varepsilon = c/a$ otrzymujemy:

$$\chi = \varepsilon \frac{(2\varepsilon^2 + 1) \arccos \varepsilon - 3\varepsilon^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

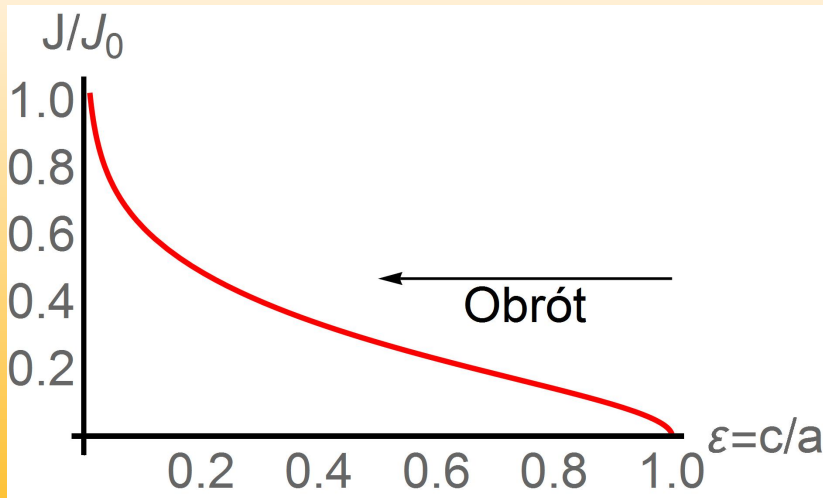
Elipsoida Maclaurina: Ω , wymiary, moment pędu



Proporcje elipsoidy o stałej objętości



Elipsoidal Maclaurina: Ω , wymiary, moment pędu



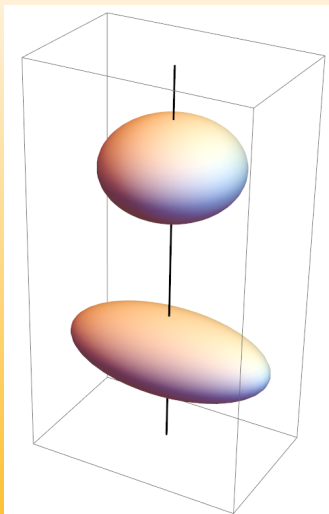
Elipsoidy Maclaurina tworzą ciąg obracających się elipsoid **obrotowych** o stale rosnącym **momencie pędu** J .

- dla $J = 0$ figurą równowagi jest kula
- dla $J < J_c$ prędkość kątowna elipsoidy rośnie, i ulega ona spłaszczeniu
- dla $J = J_c$ elipsoida Maclaurina osiąga maksymalną możliwą prędkość kątowną (dla Ziemi, $\rho \simeq 5.5 \text{ g/cc}$, $T_{obr} \simeq 147 \text{ minut}$)

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \simeq 0.22, \quad \varepsilon \simeq 0.36767$$

- dalsze zwiększanie momentu pędu powoduje jeszcze większe spłaszczenie, ale od tego miejsca prędkość kątowna Ω **maleje**
- dla $J \rightarrow \infty$ elipsoida Maclaurina degeneruje się do nieskończenie cienkiego „placka” który praktycznie pozostaje w spoczynku

Zanim jeszcze elipsoida Maclaurina osiągnie maksymalną prędkość kątową dochodzi do *bifurkacji* (spontanicznego złamania symetrii) w kierunku trójosiowej *elipsoidy Jacobiego*. Powyżej punktu bifurkacji istnieją 2 rozwiązania o tym samym momencie pędu. Ciekawa wizualizacja bifurkacji: Jos Leys/Etienne Ghys, The shape of Planet Earth



Używa się kilku miar stopnia rotacji układów samograwitujących:

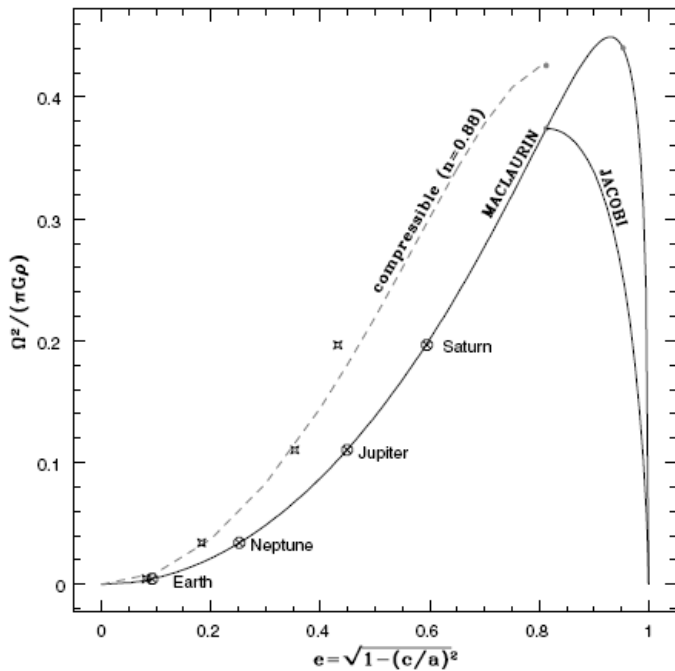
- bezwymiarowa prędkość kątowna

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$$

- moment pędu J
- stosunek rotacyjnej energii kinetycznej E_k do grawitacyjnej energii wiązania E_g

$$\beta = \frac{E_k}{|E_g|}$$

Z twierdzenia wirialnego $0 \leq \beta < 0.5$. Punkt bifurkacji do elipsoidy Jacobiego pojawia się dla $\chi = 0.187, \beta = 0.1375$, niestabilność dynamiczna elipsoidy Jacobiego $\beta \simeq 0.16$, Maclaurina $\beta \simeq 0.27$.



Warto przy okazji wspomnieć o równolegle rozwijanej analogicznej teorii rotującej cieczy z napięciem powierzchniowym.

- motywacją model kropowy jądra atomowego
- odpychanie elektrostatyczne zamiast przyciągania
- napięcie powierzchniowe daje energię wiązania

Przyrównując energię napięcia powierzchniowego do grawitacyjnej dla jednorodnej kuli mamy

$$4\pi R^2\sigma = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad \rightarrow \quad M = \frac{5\sigma}{G\rho}$$

Dla wody napięcie powierzchniowe $\sigma \simeq 0.072\text{N/m}$ co daje przewagę sił samograwitacji już dla $M > 1000$ ton ($R > 10$ metrów). Dla materii jądrowej $\sigma \sim 1.25 \text{ MeV/fm}^2$, czyli $M > 10^{10}$ kg (masa małej asteroidy).

Elipsoida Dedekinda (Riemanna, Dirichleta)

Pole prędkości \mathbf{v} (v_x, v_y, v_z): $v_x = -q \zeta y$, $v_y = (1 - q) \zeta x$, $v_z = 0$,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \zeta \mathbf{e}_z$$

Z równania elipsoidy wynika wektor normalny

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = \nabla G = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$$

Warunek, że ciecze „nie wypływa” z elipsoidy, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, daje

$$q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad 1 - q = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczi” – linii prądu:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -q \zeta y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (1 - q) \zeta x$$

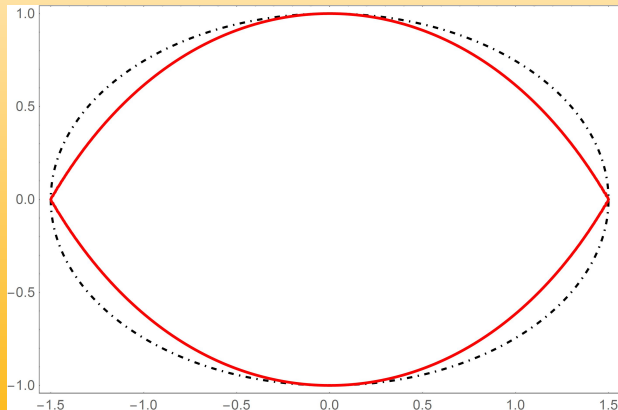
Podstawienie $x = A e^{i\Omega t}$, $y = B e^{i\Omega t}$ daje związek pomiędzy wirowością ζ elipsoidy Dedekinda a prędkością kątową Ω elipsoidy Jacobiego

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q \zeta \\ (1 - q) \zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad \zeta = \frac{a^2 + b^2}{ab} \Omega$$

Model Roche'a

Zakładając, że cała masa rotującego obiektu jest skupiona w centrum, otrzymujemy równanie powierzchni:

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = \text{const} = \frac{GM}{R_p}$$



SCIEŻKA MACLAURINA

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzą na:
 - - ścieżkę Roche'a
 - - ścieżkę Maclaurina

SCIEŻKA ROCHE'A

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro lub obiekty dysku wchodzą na:
 - - ścieżkę Roche'a
 - - ścieżkę Maclaurina

Rotacja różniczkowa

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1b)$$

- interesują nas rozwiązania, dla których prędkość \vec{v} jest funkcją wyłącznie współrzędnych (nie zależy od czasu)

Pochodna substancjonalna (operator $\mathbf{v} \cdot \nabla$)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t, x(t), y(t), z(t))}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} \end{aligned}$$

Równanie „Bernouliego” (Gromeki-Lamba)

Korzystając z tożsamości

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

równanie Eulera w przypadku stacjonarnym można przepisać jako:

$$\nabla(h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Jeżeli wyraz po prawej jest równy zeru lub jest gradientem pewnej funkcji, otrzymujemy **równanie Bernouliego**

$$h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2 = \text{const.}$$

„Czysta rotacja”

Jednym z przypadków, kiedy można wprowadzić równanie Bernoulliego jest tzw. „czysta rotacja”:

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z)r \vec{e}_\phi.$$

W ogólności stacjonarne pole prędkości \vec{v} musi spełniać równanie

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})) = 0.$$

Podstawienie czystej rotacji do powyższego równania daje:

$$2r\Omega(r, z) \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} = 0.$$

Przykład pola prędkości, które **nie jest** rotacją, a spełnia powyższe równanie, znajdujemy w elipsoidach Dedekinda.

Grawitacja powierzchniowa (ang. effective gravity) \vec{G} to suma natężenia pola grawitacyjnego \vec{g} i przyspieszenia odśrodkowego

$$\vec{G} = \vec{g} + r \Omega(r, z)^2 \vec{e}_r. \quad (2)$$

Dla samograwitującego ciała w stanie stacjonarnym o czystej rotacji poniższe zdania są równoważne:

- (i) *Rotacja jest cylindryczna: $\Omega = \Omega(r)$.*
- (ii) *Powierzchnie $\rho = \text{const}$ and $p = \text{const}$ pokrywają się.*
- (iii) *Grawitacja powierzchniowa \vec{G} ma potencjał*
- (iv) *Wektor \vec{G} jest prostopadły do izobar $P = \text{const}$ (w szczególności do powierzchni $P = \rho = 0$).*

Obiekt spełniający powyższe założenia nazywamy *barotropą*. Spełnia ona równanie

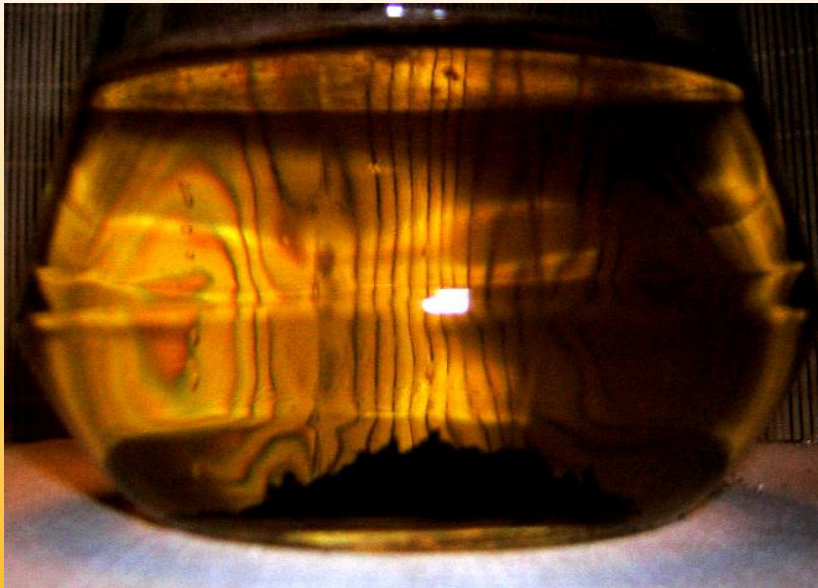
$$h(r, z) + \Phi_g + \Phi_c = C,$$

gdzie $\Phi_g = \int \Omega^2 r dr$ to *potencjał odśrodkowy*.

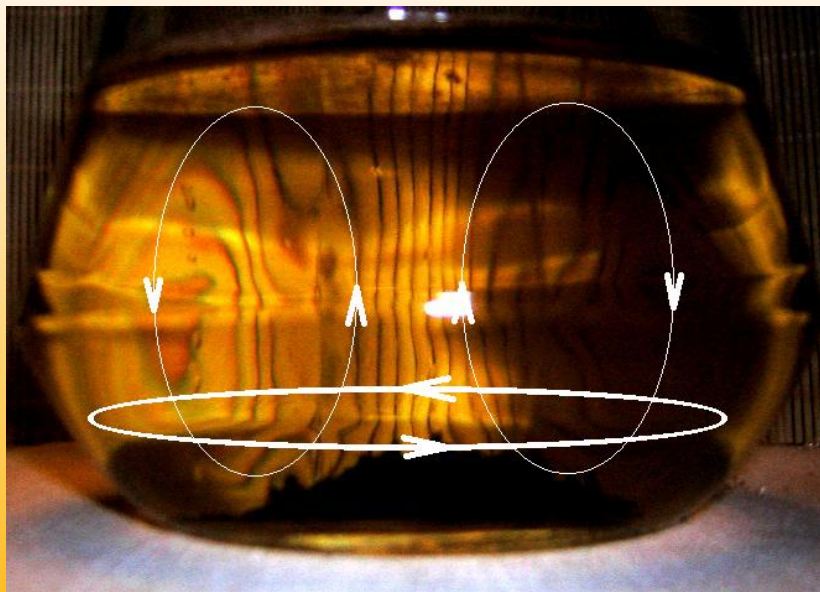
Cyrkulacja południkowa



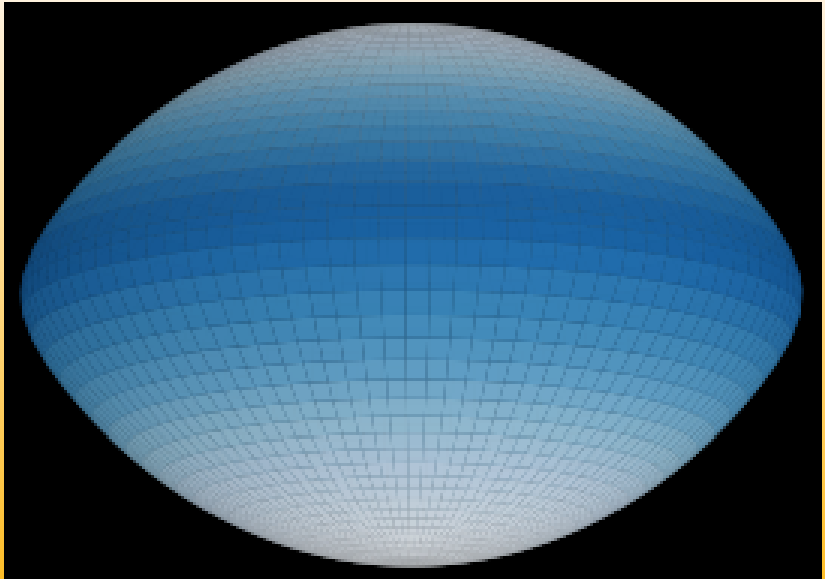
Cyrkulacja południkowa



Cyrkulacja południkowa



Realistyczna gwiazda: α Eri (ESTER)



Dołączenie do opisu równowagi hydrostacyjnej barotropy, równania na transport energii daje układ równań który jest sprzeczny. Sytuację określamy jako *paradoks von Zeipela*.

Sytuacja ta jest powszechnie ignorowana w astrofizyce, i modelowanie rotujących „gwiazd” rozbija się na 2 kategorie:

- rotujące barotropy z $\Omega = \Omega(r)$, które są w równowadze hydrostatycznej, ale nie termicznej
- obiekty z rotacją powłokową (ang: shellular rotation, 1D) z $\Omega = \Omega(m) \equiv \Omega(\sqrt{r^2 + z^2})$, które nie są w równowadze mechanicznej, ale są w równowadze termicznej

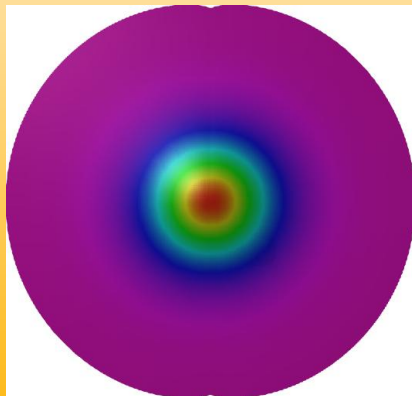
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



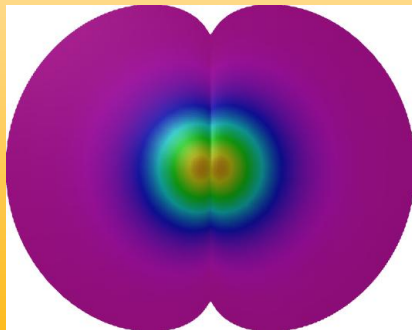
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

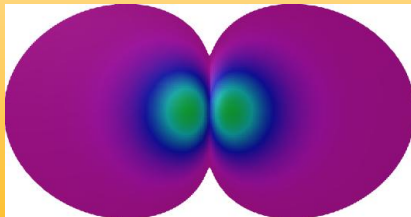


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

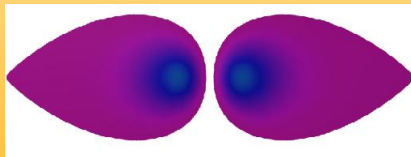


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



Gwiazdy

Astrofizyczny opis gwiazdy składa się z czterech składników:

- 1 struktura hydrostatyczna (równowaga gradientu ciśnienia i grawitacji):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$

- 2 zachowanie masy/związek rozkładu masy z grawitacją:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

- 3 transport energii/pomieniowania (gwiazdy świecą!),
- 4 produkcja/źródło energii (reakcje termojądrowe).

Docelowo potrzebujemy 4 równań, których rozwiązanie wyznaczy pełną strukturę gwiazdy: ciśnienie $P(r)$, gęstość $\rho(r)$, temperaturę $T(r)$, strumień energii $L(r)$ i skład chemiczny/izotopowy $X_i(r)$. Warunki brzegowe wyznaczają masę całkowitą $M(R)$, promień R , temperatura powierzchniowa $T(R)$ oraz jasność gwiazdy $L(R)$.

Początkowy skład chemiczny wynika z nukleosyntezy kosmologicznej (Wielkiego Wybuchu).



Formowanie gwiazdy

Rozważmy kulę „pyłu” o promieniu $R(t)$ i masie M zapadającą się pod wpływem własnego przyciągania grawitacyjnego.

Czas kolapsu jest równy czasowi spadku swobodnego w polu masy punktowej. Z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{R(t)}, \quad v = \frac{dR(t)}{dt}$$

Czas kolapsu T wynosi:

$$T = \frac{1}{2GM} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}}} = \sqrt{\frac{R_0^3}{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

Wynik podaje się zwykle poprzez gęstość średnią kuli $\bar{\rho}$:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

Dla Słońca $T \simeq 0.5$ godziny.

Twierdzenie wirialne

Całkujemy obie strony równania równowagi hydrostatycznej pomnożone przez $4\pi r^3$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \rightarrow \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R 4\pi r^3 \frac{Gm\rho}{r^2} dr$$

Lewą stronę całkujemy przez części:

$$4\pi r^3 P(r) \Big|_0^R - 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr = -3 \int_V P dV$$

natomiast prawa to grawitacyjna energia potencjalna:

$$\int_0^R -\frac{Gm\rho}{r} 4\pi r^2 dr = \int_V -\frac{Gm\rho}{r} dV$$

Otrzymujemy wynik znany jako *twierdzenie wirialne*:

$$E_{\text{graw}} + 3 \int_V P dV = 0$$

Energia wewnętrzna gazu doskonałego to $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla gazu jednoatomowego, gęstość tej energii ε to:

$$P = \frac{2}{3}\varepsilon$$

Z twierdzenia wirialnego mamy:

$$\Delta E_{\text{term}} = \frac{1}{2}\Delta E_{\text{graw}}$$

czyli połowa wyzwolonej energii grawitacyjnej „podgrzewa” gwiazdę. Druga połowa jest wyświecana ze średnią jasnością L . Czas świecenia „Słońca” kosztem energii grawitacyjnej nazywamy *skalą czasową Kelvina-Helmholtza*:

$$\tau_{KH} = \frac{\Delta E_{\text{graw}}}{L_{\odot}}$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza II

- energia grawitacyjna np: jednorodnej kuli o masie M i promieniu R to:

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- energia ta jest nieskończona dla $R \rightarrow 0$, Słońce mogłoby świecić dowolnie długo
- nas interesuje czas świecenia przy kurczeniu się od $r \simeq 1 \text{ AU} \sim \infty$ do $r = R_{\odot}$
- wynosi on około $\tau_{\text{K-H}} \sim 10$ milionów lat
- na mocy twierdzenia wirialnego nieunikniony jest stały wzrost energii termicznej, a więc temperatury, w trakcie kurczenia się „gwiazdy”
- pojęcie „gwiazda Kelvina-Helmholtza” stosuje się wszędzie tam, gdzie źródłem wypromieniowanej energii jest energia grawitacyjna (kurczenie się obiektów) np:

1 powstawanie gwiazdy z obłoku

2 kurczenie się protogwiazdy neutronowej (promieniowanie to neutrino)

Model Eddingtona

- standardowy model Eddingtona to model politropowy z $n = 3$
- masa gwiazdy jest masą Chandrasekhara, zależną wyłącznie od β i stałych fizycznych
- związek pomiędzy β a masą gwiazdy jest algebraicznym równaniem 4 stopnia:

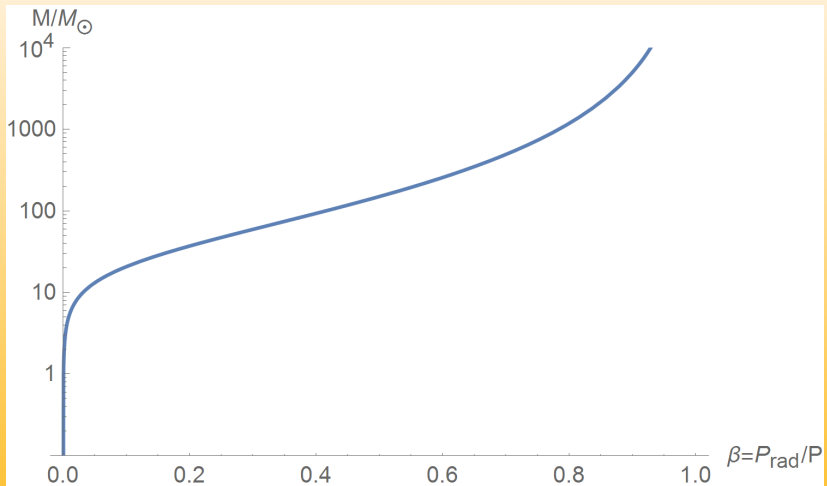
$$M^2 = \frac{48k^4}{\pi a G^3 \mu^4 m^4} \frac{\beta}{(1 - \beta)^4} (-x_0^2 w_3'(x_0))^2$$

gdzie $w_3(x_0) = 0$, czyli $x_0 \simeq 6.9$ to miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena w_3 , a nachylenie w miejscu zerowym to $w_3'(x_0) \simeq -0.04$

- po wstawieniu wartości $\mu = 16/27$ dla zjonizowanej materii po Wielkim Wybuchu i $\beta = 0.5$

$$M \simeq 150M_{\odot}.$$

Masa gwiazdy III populacji w modelu Eddingtona



Transport energii: promieniowanie

Zgodnie z prawami termodynamiki energia (ciepło) przepływa od obszarów o temperaturze wyższej do obszarów o temperaturze niższej. Strumień energii F jest proporcjonalny do różnicy temperatur T :

$$F \propto - \frac{dT}{dr}$$

- w typowych sytuacjach astrofizycznych temperatura spada w miarę oddalania się od centrum.
- powyższe nie jest prawem, istnieją wyjątki, np:
zdegenerowane jądro chłodzone neutrinowo + spalanie w warstwie sferycznej (ang. *shell burning*)
- współczynnik proporcjonalności jest funkcją zależną od składu „chemicznego” materii X_i , temperatury, gęstości, ciśnienia i zjawisk odpowiedzialnych za przepływ energii

Najważniejsze procesy odpowiedzialne za przepływ energii

- 1 transport promienisty
- 2 konwekcja
- 3 przewodnictwo cieplne

Pod pojęciem promieniowania rozumiemy cząstki „bezmasowe”, poruszające się z prędkością światła c :

- 1 fotony γ (przede wszystkim)
- 2 neutrina $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ (w ekstremalnych sytuacjach: supernowe typu implozyjnego, protogwiazdy neutronowe, dyski akrecyjne wokół czarnych dziur)

Pełny opis promieniowania wymaga podania w każdym punkcie gwiazdy $\vec{r} = \{x, y, z\}$ rozkładu prawdopodobieństwa f kątów pod jakimi poruszają się fotony i rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów. Daje to w sumie sześć zmiennych, a obliczenia uwzględniające je wszystkie określamy jako *symulacje 6D*. Konieczne jest rozwiązanie równania transportu Boltzmanna:

$$\frac{\partial f}{c \partial t} + \vec{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{reakcje z fotonami}$$

W praktyce często możliwe jest drastyczne uproszczenie powyższego opisu.

Warunki panujące wewnątrz Słońca:

- 1 średnia droga swobodna fotonu $L_\gamma \sim 2$ cm, wynikająca głównie z rozpraszania na swobodnych elektronach pochodzących ze zjonizowanego wodoru
- 2 średni spadek temperatury na drodze od centrum $T_c \simeq 10^7$ K do powierzchni $T \simeq 5800$ K:

$$\frac{T_c - T_\odot}{R_\odot} \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$$

Wnioski są następujące:

- 1 układ jest niemal w równowadze termicznej
- 2 promieniowanie ciała doskonale czarnego (gaz fotonowy) jest poprawnym opisem rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów
- 3 strumień energii emitowany na zewnątrz i do wewnątrz w odległości L_γ kasuje się z dokładnością około $\sigma \Delta T^4 \sim 10^{-10}$

W stanie LTE (Local Thermodynamic Equilibrium) transport fotonów można rozpatrywać przynajmniej z dwóch punktów widzenia:

- 1 jako proces dyfuzji gazu fotonowego pomiędzy rejonami o różnej gęstości fotonów
- 2 jako proces błędzenia przypadkowego fotonu

Pierwszy z opisów jest wygodniejszy z punktu widzenia równań struktury i ewolucji gwiazdy, drugi jest bardziej ilustratywny i pozwala powiązać makroskopowy współczynnik dyfuzji z mikroskopowymi procesami oddziaływania fotonów z materią (przekrojami czynnymi).

Celem kolejnych rachunków jest wyprowadzenie związku pomiędzy współczynnikiem dyfuzji D energii gazu fotonowego a średnią drogą swobodną w procesie błędzenia przypadkowego fotonu.

Kolejno przedstawiane kroki rozumowania to:

- 1 analityczne rozwiązanie równania dyfuzji o współczynniku D w przypadku „fotonów” początkowo skoncentrowanych w $\vec{r} = 0$ (rozptywający się pik gaussowski)
- 2 numeryczne zasymulowanie procesu błędzenia fotonów ze średnią drogą swobodną L_γ zaczynając od $\vec{r} = 0$
- 3 wywnioskowanie analitycznej postaci rozkładu prawdopodobieństwa w zależności od ilości skoków dla dużej liczby fotonów (rozkład normalny/Gausa)
- 4 przeliczenie liczby kroków k na czas $ct = kL_\gamma$
- 5 porównanie wyników

Oczekiwany wynik to:

$$D = \frac{1}{3} c L_\gamma$$

Dyfuzja fotonów: równanie dyfuzji

Równanie opisujące zachowanie energii ma postać:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \vec{F} = 0, \quad \vec{F} = -D \nabla \varepsilon$$

gdzie \vec{F} to strumień energii. Łącząc powyższe dostajemy równanie dyfuzji:

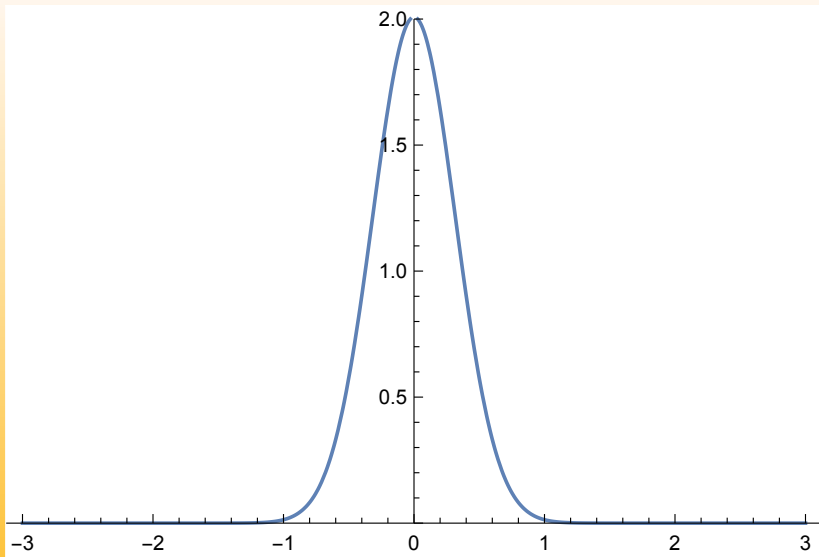
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = D \Delta \varepsilon$$

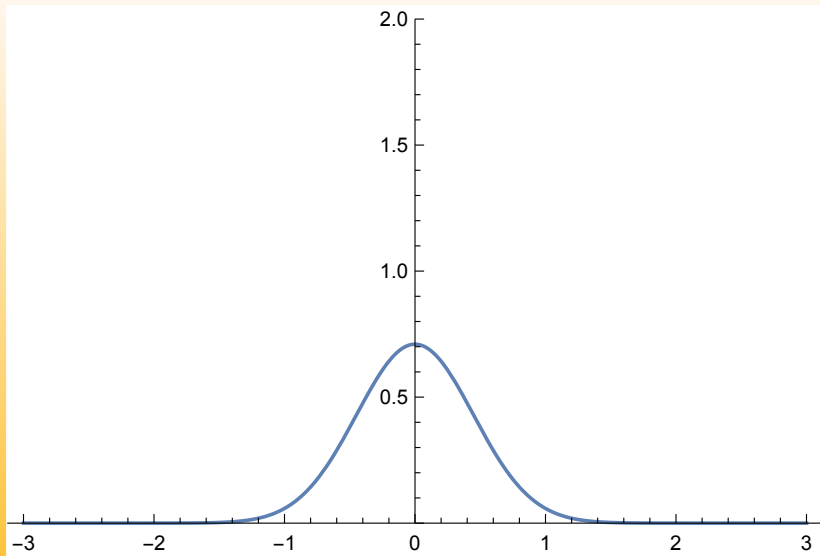
gdzie D to współczynnik dyfuzji, a $\Delta \varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$ to operator Laplace'a w 3D.

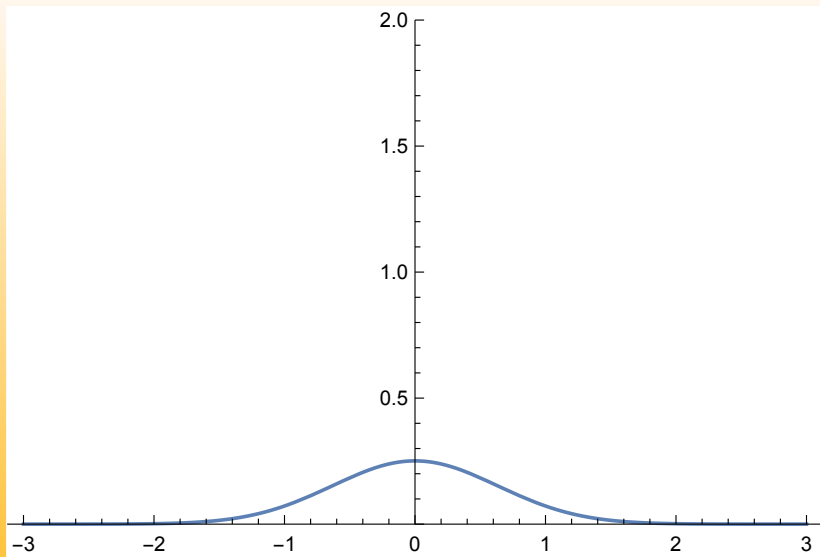
Funkcja Greena równania dyfuzji w N wymiarach:

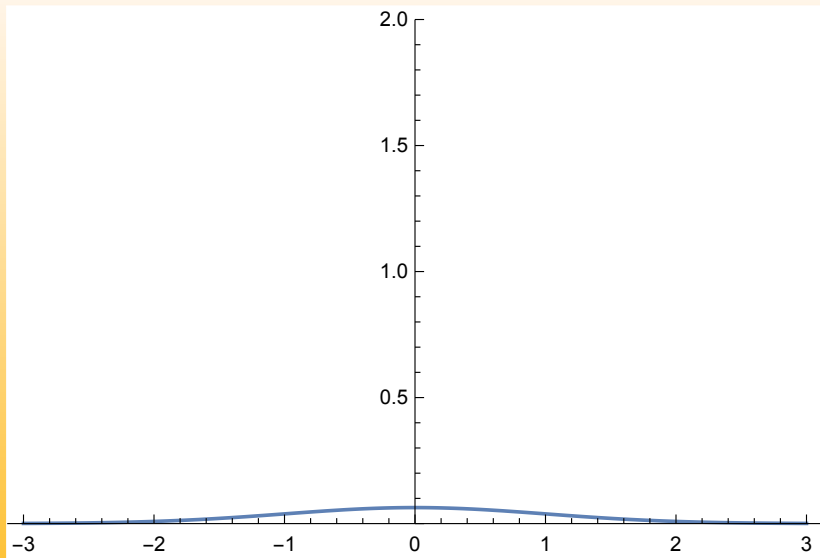
$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}^N}$$

opisuje „rozpływanie” się skoncentrowanej początkowo w $\vec{r} = \vec{0}$ energii.







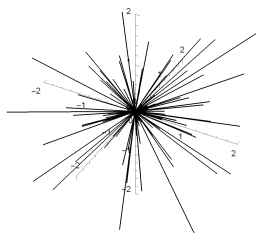
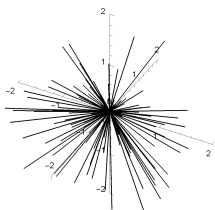
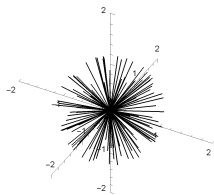
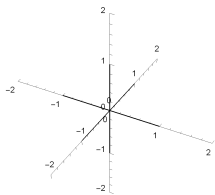


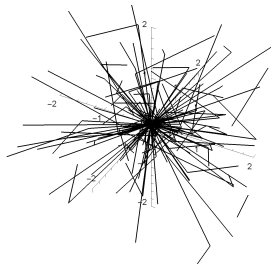
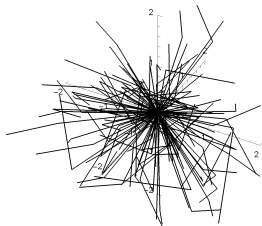
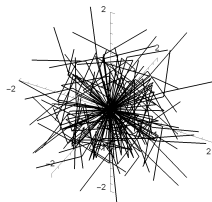
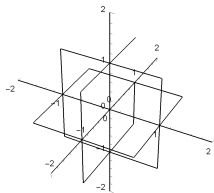
Zamiast dyfuzji, możemy rozważyć proces *błędzenia przypadkowego* fotonów, wykonujących skoki o średniej długości swobodnej L_γ w przypadkowych kierunkach.

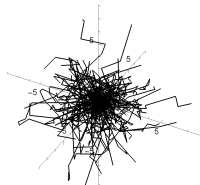
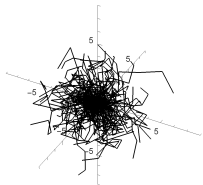
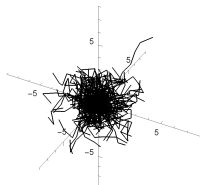
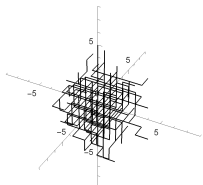
Aby powiązać dyskretny proces z ciągłym, zauważamy, że skok fotonu na odległość L_γ wymaga czasu Δt , gdzie:

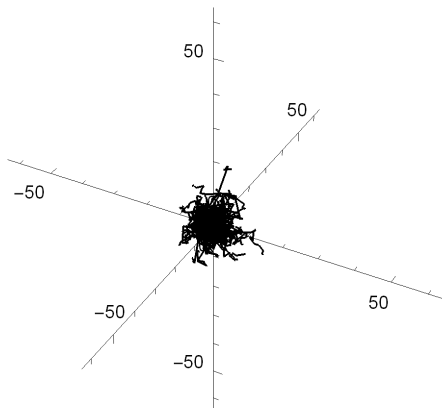
$$c\Delta t = L_\gamma,$$

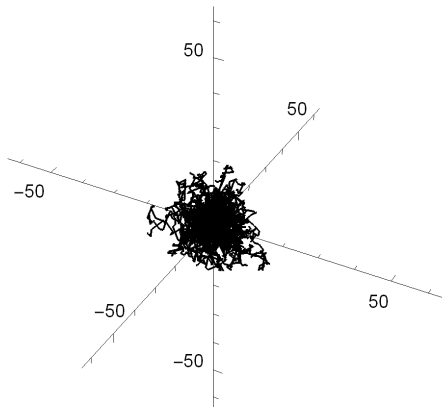
gdzie c to prędkość światła w próżni. Czyli po k -tym przeskoku w błędzeniu przypadkowym upływa czas $t = k \frac{L_\gamma}{c}$.

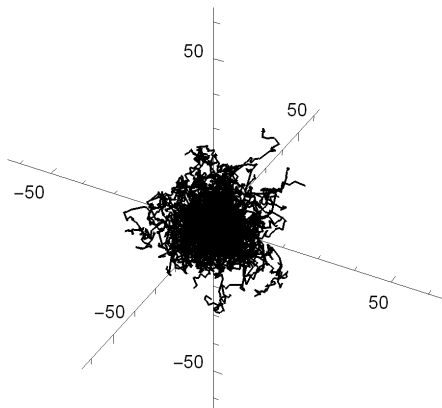


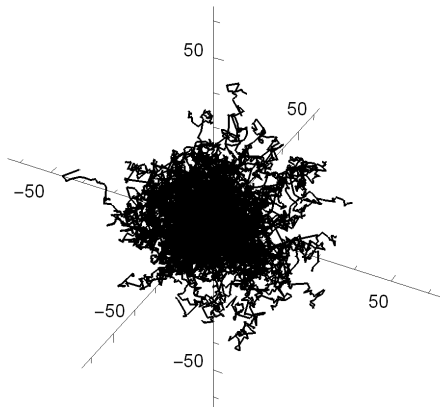


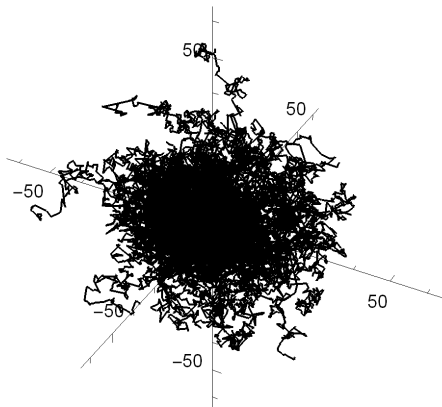


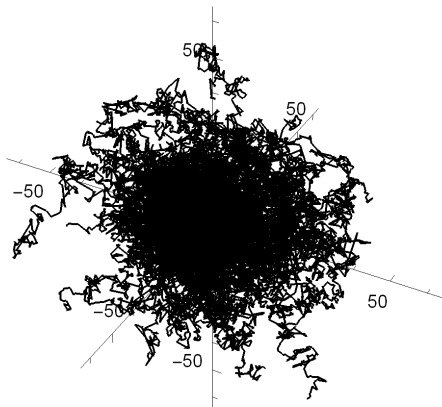












Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe

W teorii błędzenia przypadkowego dowodzi się, że prawdopodobieństwo przyjmuje w granicy postać rozkładu Gaussa. Przez porównanie, współczynnik dyfuzji D w 3 wymiarach to:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{6\Delta t} = \frac{1}{6}L_\gamma \frac{L_\gamma}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{6\Delta t} = \frac{1}{6}q c L_\gamma$$

gdzie $L_\gamma/\Delta t = c$ oraz:

$$\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle^2 + \sigma^2, \quad q > 0.$$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa długości skoku to:

- średnia $\langle r \rangle = L_\gamma$
- wariancja σ

Jeżeli wariancja jest proporcjonalna do średniej długości swobodnej L_γ , to jej wpływ można zaabsorbować do współczynnika liczbowego q .

Przykłady o różnych rozkładach długości skoku (średnia zawsze wynosi L_γ):

- skoki o jednakowej długości:

- $P(r) = \delta(r - L_\gamma)$,
- $\langle r \rangle = L_\gamma$,
- $\sigma = 0$,
- $q = 1$

- skoki o długości od zera do $2L_\gamma$ i równomiernym rozkładzie:

- $P(r) = \Theta(2L_\gamma - r)/(2L_\gamma)$,
- $\langle r \rangle = L_\gamma$
- $\sigma = L_\gamma/\sqrt{3}$,
- $q = 4/3$

- rozkład wykładniczy („Poissona”)

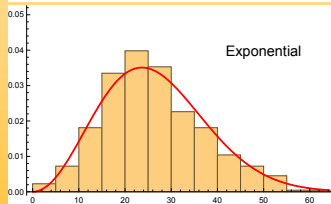
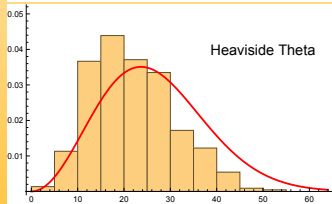
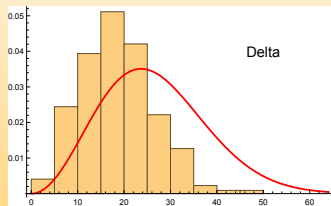
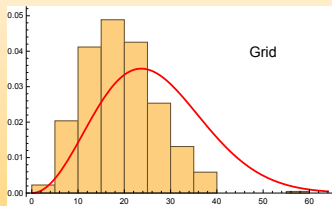
- $P(r) = e^{-r/L_\gamma}/L_\gamma$,
- $\langle r \rangle = L_\gamma$,
- $\sigma = L_\gamma$,
- $q = 2$

Tylko dla rozkładu wykładniczego (eksponencjalnego) średnia i wariancja są sobie równe i wynoszą $\langle r \rangle = \sigma = L_\gamma$ co daje $q = 2$ i **podwojony** współczynnik dyfuzji:

$$D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Inne, poprawne wyprowadzenie powyższego wzoru polega na przybliżaniu równania transportu promieniowania.

Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe vs dyfuzja



Porównanie równania dyfuzji z błędzeniem przypadkowym pozwala nam jednoznacznie powiązać makroskopowy proces dyfuzji energii promienistej, opisany współczynnikiem dyfuzji D , z mikroskopowym procesem oddziaływania fotonów z materią, opisanym średnią drogą swobodną L_γ .

Strumień energii

$$F_\gamma = -D \frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4}{3} a c L_\gamma T^3 \frac{dT}{dr}, \quad D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Standardowo prawdopodobieństwo oddziaływania „fotonu” z tarczą opisujemy za pomocą *przekroju czynnego*:

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma n}$$

gdzie: n - gęstość „atomów” tarczy, σ - całkowity przekrój czynny na oddziaływanie (zderzenie, absorpcja).

Obliczanie przekrojów czynnych to standardowe zadanie fizyki cząstek elementarnych, jądrowej i atomowej.

W gwiazdach istotne są następujące procesy z udziałem fotonów:

- 1 rozpraszanie na swobodnych elektronach, (przekrój czynny Thomsona):

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} \simeq 6.65 \times 10^{-29} \text{m}^2$$

- 2 procesy atomowe: przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi lub/i stanami swobodnymi

$$\sigma = \sigma(E_\gamma)$$

Średnia nieprzeźroczystość Rosselanda

Średnią długość swobodną można wyrazić także za pomocą *nieprzeźroczystości* κ i gęstości ρ :

$$L_{\gamma} = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

W praktyce używa się średniej harmonicznej ważonej **pochođną temperaturową rozkładu Plancka**:

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^{\infty} \frac{\partial B(x)}{\partial T} \frac{dx}{\sum_i \kappa_i(x)}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

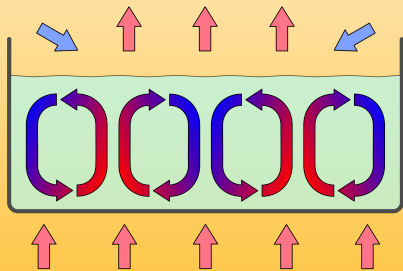
gdzie:

$$\frac{\partial B(x)}{\partial T} = \frac{15}{\pi^4} \frac{4}{\sinh^2(x/2)}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe procesy, atomy i ich stany zjonizowane.

Transport energii: konwekcja

Jeżeli tempo produkcji energii jest duże, a procesy przewodnictwa ciepła nie nadążają z jej odprowadzaniem, tworzą się warunki prowadzące do niestabilności hydrodynamicznych. Najważniejszy przykład to *konwekcja*.



Konwekcja w 2D (YouTube)

Wyprowadzenie warunku konwekcji

- rozważamy bąbel gazu, który **adiabatycznie** (bez wymiany ciepła z otoczeniem) przemieszcza się o Δr w górę:

$$P = K\rho^\gamma \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{ad}} = \gamma \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\text{ad}}$$

- na tym samym odcinku Δr gęstość gazu doskonałego w gwieździe zmieni się jak:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_* = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_* + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_*$$

- zakładamy, że ciśnienie w bąblu wyrównało się z ciśnieniem w gwieździe:

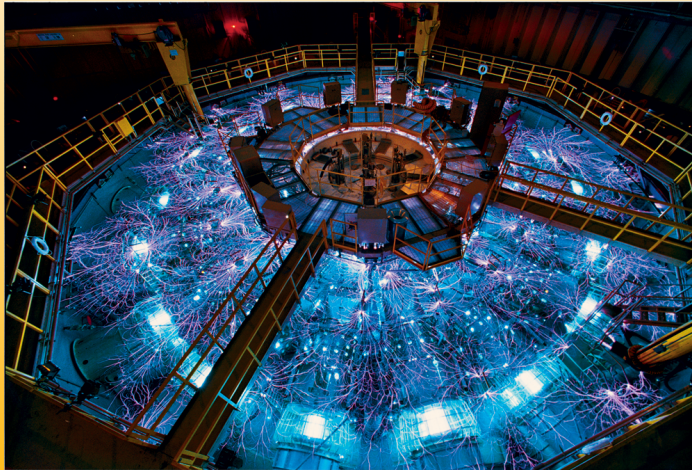
$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_* = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{ad}}$$

- jeżeli gęstość wewnątrz bąbla spada szybciej niż gęstość w gwieździe, to zaczyna on się unosić jak balon na gorące powietrze:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\text{ad}} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_* \rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{P} - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_* \rightarrow \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL <http://opalopacity.llnl.gov/>, i jego kontynuacje, np: <http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>



W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL <http://opalopacity.llnl.gov/>, i jego kontynuacje, np: <http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>



$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F = -D \frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \dots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$ – masa zawarta w kuli o promieniu r
- $P(r), \rho(r)$ – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$ – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia $L(r) = L_{\odot}$ produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w $r = 0$.

Model punktowy (Cowlinga)

- formalnie równanie na profil temperatury można rozwiązać osobno (jeżeli założymy, że $D = \text{const}$) zaczynając od powierzchni nie wnikając skąd wzięła się energia:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = -D \frac{d(aT^4)}{dr}, \quad T(R_{\odot}) = T_{\odot}$$

- w takim modelu $T \rightarrow \infty$ dla $r \rightarrow 0$ a cała energia pochodzi z punktu $r = 0$,
- w praktyce zakłada się, że energia wychodzi z małego, skończonego obszaru: konwektywnego jądra

Średnia droga swobodna fotonu w modelu Eddingtona

W modelu Eddingtona gęstość energii gazu fotonowego to:

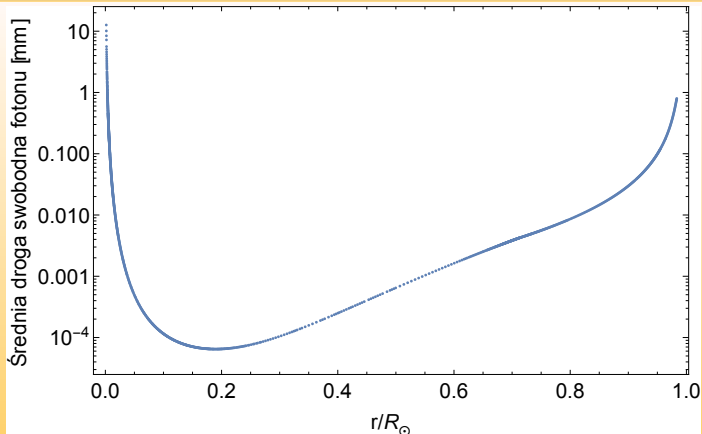
$$aT^4 = 3P_{\text{rad}} = 3\beta P$$

Po wstawieniu do równań:

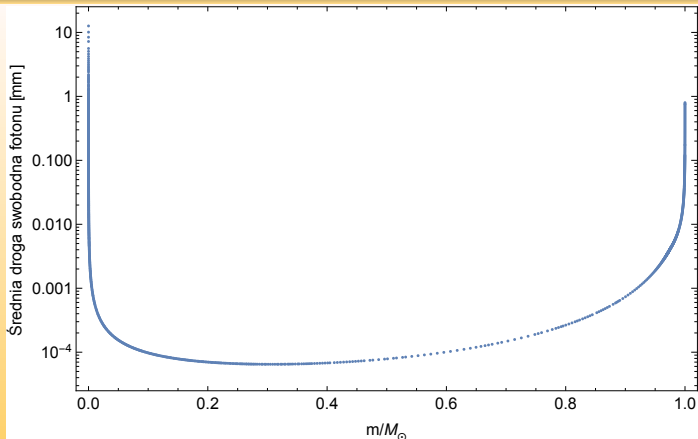
$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3}L_{\gamma}c\frac{d(aT^4)}{dr} \end{cases}$$

dostajemy specjalną postać drogi swobodnej:

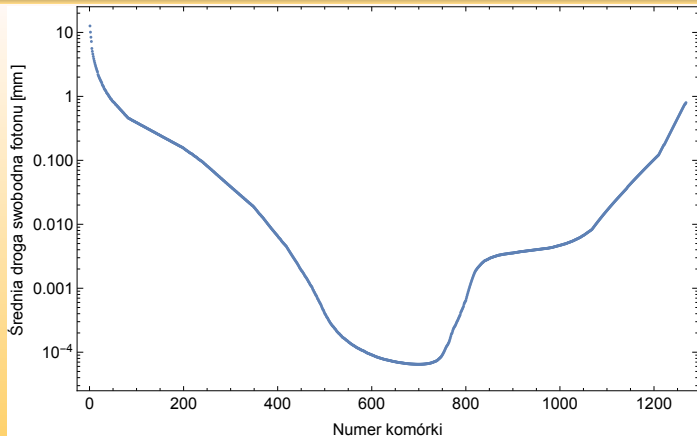
$$L_{\gamma} = \frac{L_{\odot}}{4\pi Gc\beta m\rho}$$



- 1 L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



- 1 L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



- 1 L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

Dotąd konsekwentnie omijaliśmy pytanie: *gdzie gwiazda produkuje energię niezbędną do świecenia?*

Strumień energii L wypływający przez sferę o promieniu r musi być równy całce z objętościowego tempa produkcji energii ε :

$$L(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 dr \rightarrow \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Równanie to przyjmuje jeszcze prostszą postać, gdy zamiast r użyjemy masy m zawartej w kuli o promieniu r jako zmiennej radialnej:

$$\frac{dL(r)}{dm} = \varepsilon / \rho = \epsilon$$

gdzie ϵ jest tempem produkcji energii na jednostkę masy.

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{array} \right.$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ , temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i :

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$ lub $P(r)$, $m(r)$, $T(r)$ oraz $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_{\odot}) = M_{\odot} \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_{\odot}) = \rho(R_{\odot}) = 0 \\ T(R_{\odot}) = T_{\odot} \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu „wpisz w *Mathematicę* i użyj **NDSolve**”

Współczesny model gwiazdy domyka obliczenie tempa produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej i powiązanej z nimi produkcji neutrin.

- co do zasady wzór $E = mc^2$ dobrze wyjaśnia źródło energii
- cztery atomy wodoru przekształcają się w atom helu
- masa atomu helu/cząstki α jest mniejsza niż masa 4 atomów wodoru/protonów
- różnica masy $(4m_{\text{H}} - m_{\text{He}})c^2$ przekształcana jest na fotony γ i neutrina elektronowe ν_e
- neutrina z prędkością światła uciekają od razu, dlatego odejmuje się je od tempa produkcji energii (dla Słońca jest to 2%, ale dla presupernowej praktycznie 100%)

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08