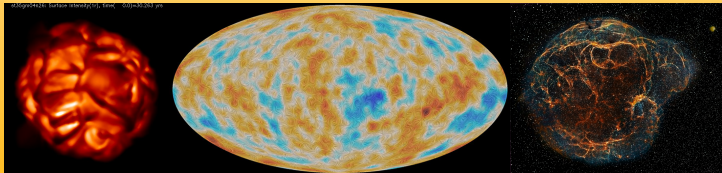


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

8 maja 2018



Gwiazdy: reakcje termojądrowe

Kompletny układ równań

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi aDr^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{cases}$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ , temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i :

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$ lub $P(r)$, $m(r)$, $T(r)$ oraz $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_{\odot}) = M_{\odot} \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_{\odot}) = \rho(R_{\odot}) = 0 \\ T(R_{\odot}) = T_{\odot} \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu „wpisz w *Mathematicę* i użyj ***NDSolve***”

Współczesny model gwiazdy domyka obliczenie tempa produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej i powiązanej z nimi produkcji neutrin.

- co do zasady wzór $E = mc^2$ dobrze wyjaśnia źródło energii
- cztery atomy wodoru przekształcają się w atom helu
- masa atomu helu/cząstki α jest mniejsza niż masa 4 atomów wodoru/protonów
- różnica masy $(4m_H - m_{He})c^2$ przekształcana jest na fotony γ i neutrina elektronowe ν_e
- neutrina z prędkością światła uciekają od razu, dlatego odejmuje się je od tempa produkcji energii (dla Słońca jest to 2%, ale dla presupernowej praktycznie 100%)

Powtórka z chemii jądrowej

Liczba protonów	Nazwa	Symbol	Name	Izotopy
Z=1	Wodór	H	Hydrogen	^2H , ^3H
Z=2	Hel	He	Helium	^3He , ^4He ,
Z=3	Lit	Li	Lithium	
Z=4	Beryl	Be	Beryllium	
Z=5	Bor	B	Boron	
Z=6	Węgiel	C	Carbon	
Z=7	Azot	N	Nitrogen	
Z=8	Tlen	O	Oxygen	
...	

- Z – liczba protonów = ładunek elektryczny jądra
- N – liczba neutronów
- A = N+Z – liczba masowa
- symbol: AZ

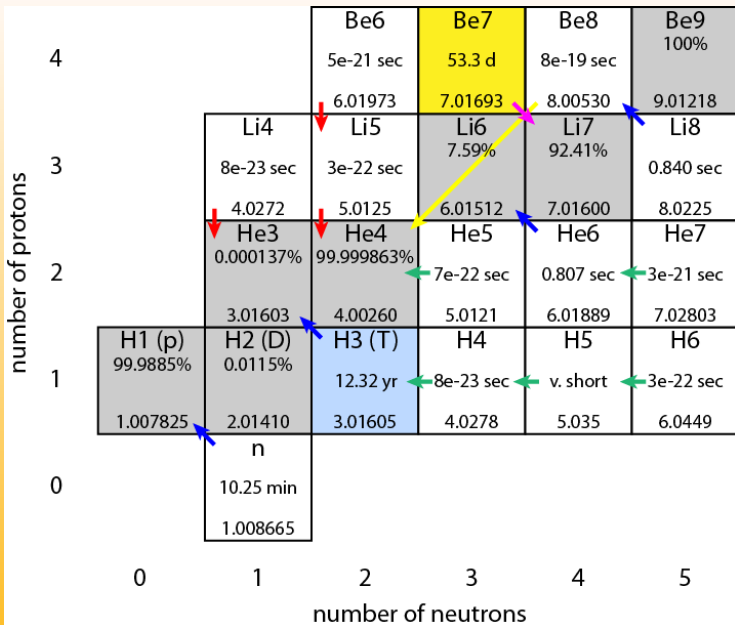


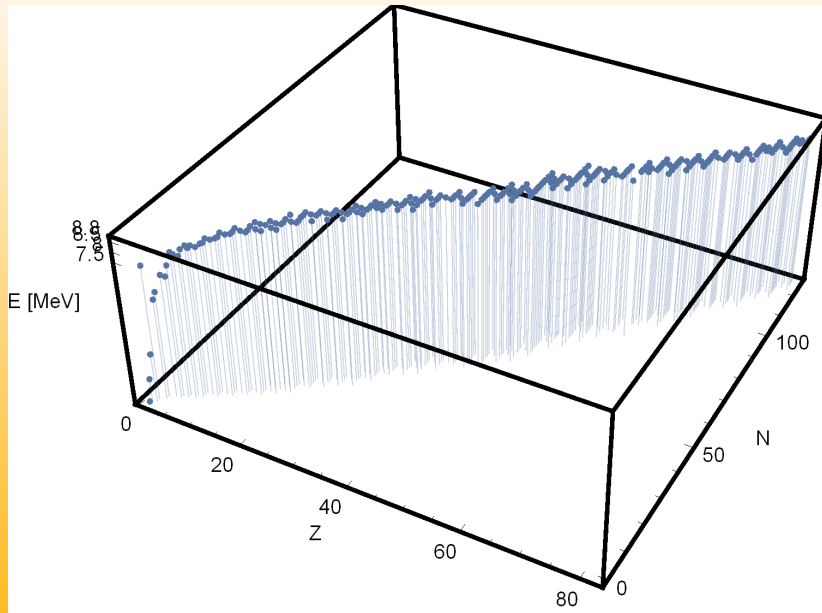
TABLE 4.1
Energy Release for Burning Stages

<i>Process</i>	$q(10^{18} \text{ erg/g})$	$q(\text{MeV/nucleon})$
$\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$	5 to 7	5 to 7
$3\alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}$	0.585	0.606
$4\alpha \rightarrow {}^{16}\text{O}$	0.870	0.902
$2 {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg}$	0.5	0.52
$2 {}^{20}\text{Ne} \rightarrow {}^{16}\text{O} + {}^{24}\text{Mg}$	0.11	0.11
$2 {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{32}\text{S}$	0.5	0.52
${}^{28}\text{Si} \rightarrow {}^{56}\text{Ni}$	0 to 0.3	0 to 0.31

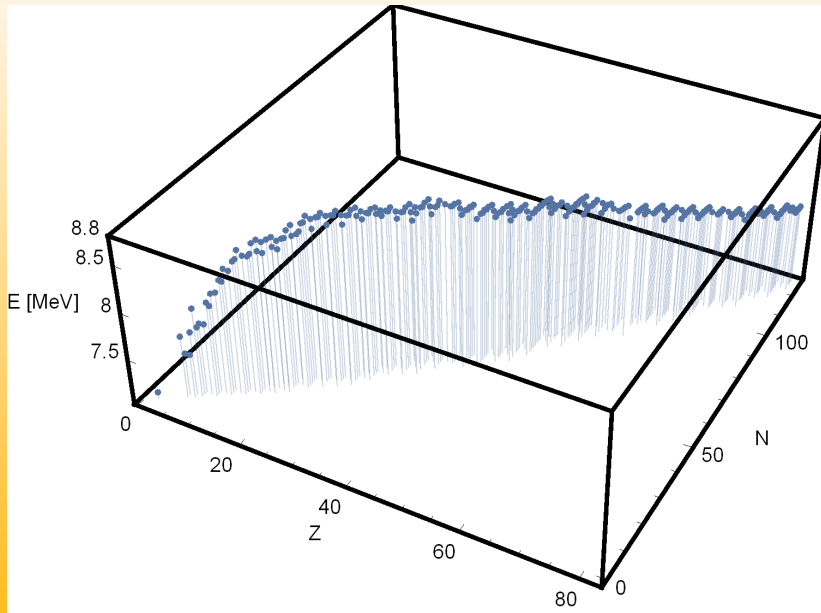
Note: 1 MeV/Nucleon = $0.964844 \times 10^{18} \text{ erg/g}$

Źródło: D. Arnett, *Supernovae & nucleosynthesis*, str. 112.

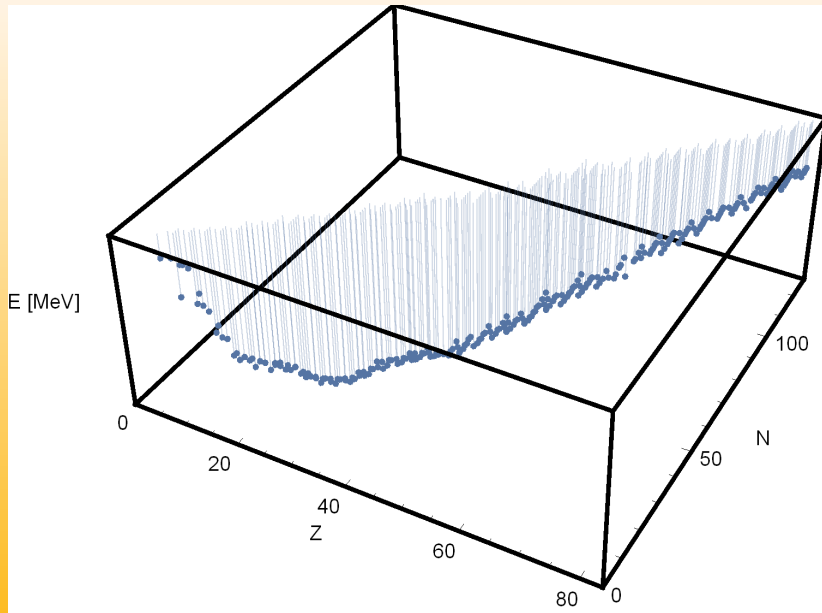
Energia wiązania jąder



Energia wiązania jąder



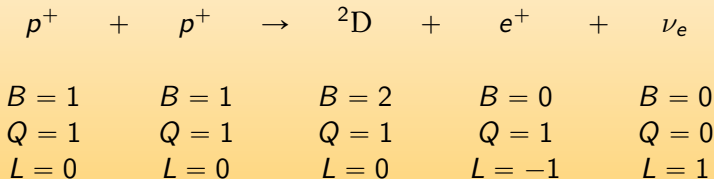
Energia wiązania jąder



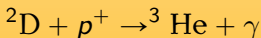
Kluczowe dla zrozumienia procesu syntezy jądrowej z wodoru w gwiazdach są następujące fakty:

- jądro wodoru to proton
- nie istnieją stabilne jądra atomowe, które nie posiadają neutronów
- oddziaływania silne nie zamieniają protonów w neutrony
- proces zamiany protonu w neutron zachodzi przez oddziaływania słabe i jest związany z emisją neutrina ν_e
- zachowanie ładunku elektrycznego Q jest oczywiste
- zachowana musi być liczba barionowa B i leptonowa L_e
- zachowana jest energia, pęd i moment pędu (wliczając spin)
- „reguła kciuka”: reakcja zachodzi najszybciej przez oddziaływania silne, chyba że jest zabroniona przez prawa zachowania – drugie w kolejności są oddziaływania elektromagnetyczne, na końcu słabe

Rozważmy podstawową (pierwszą) reakcję cyklu pp , w której produkowany jest deuter (${}^2\text{H}$, czasem oznaczany jako d lub D):



Kolejna reakcja zachodzi przez oddziaływania elektromagnetyczne:



Hel ${}^3\text{He}$ wchodzi w różne reakcje, co powoduje rozgałęzienie się cyklu, np:

- 1 cykl ppI : ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p^+$
- 2 cykl $ppII$, $ppIII$: ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$

Formalnie mogą występować wszystkie możliwe reakcje dozwolone przez prawa zachowania. W praktyce tempo większości z nich jest pomijalnie małe, co uzasadnia użycie tempa reakcji równego zero, czyli całkowite pominięcie danej reakcji w dalszych rozważaniach.

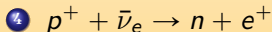
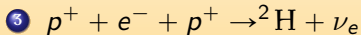
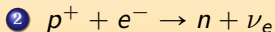
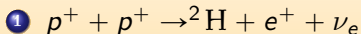
Przykład: przyjmujemy, że w Słońcu **nie zachodzą** możliwe w innych warunkach reakcje:

- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n + 3.27 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + p + 4.03 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma (= 23.85 \text{ MeV})$

Sieć reakcji tego typu określamy jako **hardwired network**.

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe w czystym wodorze, zgodne z zasadami zachowania:



Reakcja 1 wymaga pokonania bariery potencjału elektrostatycznego, co jest możliwe poprzez tunelowanie kwantowe.

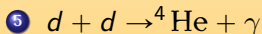
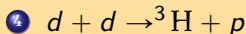
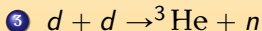
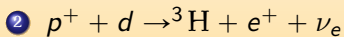
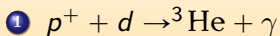
Reakcja 2 jest endotermiczna, czyli wymaga dostarczenia energii około 0.8 MeV w postaci temperatury lub/i potencjału chemicznego.

Reakcja 3 jest bardzo mało prawdopodobna, gdyż wymaga spotkania 3 cząstek.

Reakcja 4 nie może zachodzić z braku źródła antyneutrin; przekrój czynny jest przynajmniej 20 rzędów wielkości mniejszy niż dla pozostałych reakcji.

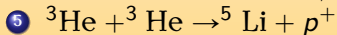
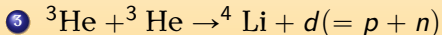
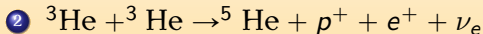
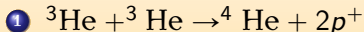
„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru i wodoru:



- ① reakcja zachodzi szybko, przez oddziaływania elektromagnetyczne
- ② reakcja zachodzi wolno, przez oddziaływania słabe
- ③ reakcja mało prawdopodobna, z powodu małego stężenia deuteru
- ④ jak wyżej
- ⑤ proces elektromagnetyczny wolniejszy $\alpha \simeq 1/137$ razy od procesów „silnych” podanych wyżej

Wypiszmy niektóre możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru, wodoru i ${}^3\text{He}$:



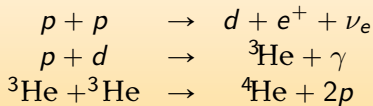
① reakcja zachodzi bardzo szybko, przez oddziaływania silne

② reakcja zachodzi bardzo wolno, przez oddziaływania słabe

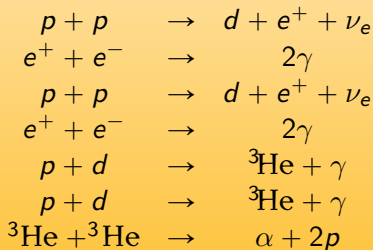
③ reakcja endotermiczna

④ proces elektromagnetyczny; produkt czyli ${}^6\text{Be}$ natychmiast (0.5×10^{-20} sekundy) rozpada się na ${}^5\text{Li}$ wyrzucając proton, po czym ${}^5\text{Li}$ w taki sam sposób rozpada się do ${}^4\text{He}$ — reakcja okazuje się równoważna pierwszej

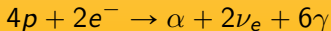
Wynik powyższych rozważań daje cykl ppl :



lub raczej:



W skrócie:



Rola fotonów, neutrin, neutronów i pozytonów

W procesie syntezy termojądrowej, oprócz jąder, biorą udział inne cząstki:

- fotony γ ulegają termalizacji i uwzględniamy je pośrednio poprzez właściwości termodynamiczne materii
- neutrina natychmiastowo opuszczają wnętrze gwiazdy i można po prostu odjąć ich energię od sumarycznego ciepła reakcji; dla Słońca ich strumienie i rozkład energetyczny są starannie liczone, gdyż stale je obserwujemy na Ziemi – zwykle **nie są** uwzględniane w sieci reakcji, za wyjątkiem supernowych typu „II”
- swobodne neutrony w Słońcu praktycznie nie są produkowane i nie wchodzi w skład sieci reakcji; w innych gwiazdach bywają stale obecne i muszą być uwzględniane
- pozytony zaraz po wytworzeniu anihilują z elektronami:
 $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$; dla $kT \sim m_e$ są stale obecne

Bilans energetyczny cyklu *ppl*

Na masę atomu składa się:

- 1 masa jądra atomowego – dominująca część
- 2 masa **elektronów** – mała, ale istotna część
- 3 energia wiązania powłok elektronowych – pomijalnie mała

Masę jąder/atomów można podać na kilka równoważnych sposobów:

- w atomowych jednostkach masy, *amu* lub *u*, równych $\frac{1}{12}m_{12\text{C}}$
- poprzez energię wiązania *Q*:

$$m_{AZ} = Nm_n + Zm_H - Q/c^2$$

Energia wiązania często podawana jest na nukleon, i we wzorze powyżej musimy ją przemnożyć przez $A = N + Z$

- jako deficyt masy $\Delta m = \Delta E/c^2$, poniżej mierzony względem ^{12}C :

$$(Z\Delta m_H + N\Delta m_n - \Delta m_{AZ}) \equiv A \frac{Q}{A}$$

Bilans masy cyklu *ppl* można zapisać w skrócie jako:

$$4m_p + 2m_e - m_\alpha = Q$$

gdzie m_p – masa protonu, m_e – masa elektronu, m_α – masa cząstki alfa, natomiast Q to energia w postaci promieniowania: fotonów i neutrin.

Pamiętając, że masy atomów to:

$$m_H = m_p + m_e, \quad m_{4\text{He}} = m_\alpha + 2m_e$$

otrzymujemy po prostu:

$$4m_H - m_{4\text{He}} = Q \simeq 26.73 \text{ MeV}$$

Odjęcie energii neutrin jest możliwe tylko w sensie uśrednionym, gdyż w każdym pojedynczym zdarzeniu jest ona inna. Jest to około 0.5 MeV, przypadkowo wartość bliska masy elektronu, relatywnie 2% całej produkowanej energii.

Układ równań różniczkowych: wprowadzenie

Rozważmy reakcję:



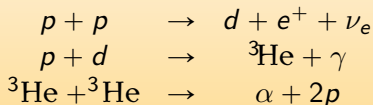
Ilości pozytonów i neutrin nie śledzimy. Zostają ilości protonów n_p i deuteronów n_d . Ich zmiana w czasie wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 + \dots \\ \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 + \dots\end{aligned}$$

gdzie $\lambda_{pp}(T, \rho)$ to tempo zachodzenia reakcji pp , a kropkami zaznaczono inne reakcje

- tempo ubywania protonów musi być równe podwojonemu tempu produkcji deuteronów
- liczba barionowa jest zachowana, czyli $n_p + 2n_d = \text{const}$: odpowiednie wyrazy po prawej stronie kasują się
- podobne wyrazy musimy napisać dla każdej z reakcji tworzącej lub niszczącej p , d itd.
- układ jest nieliniowy nawet dla $T, \rho = \text{const}$
- układ jest sztywny (stiff), co wymusza rozwiązywanie numeryczne metodami uwikłanymi (implicit)
- da się to robić np: w *Mathematica*: `Method`→"BDF", `MaxDifferenceOrder`→2

Układ równań różniczkowych cyklu ppl



Obliczamy tempo zmian ilości protonów n_p , deuteronów n_d , jąder helu-3 n_3 oraz cząstek alfa n_α :

$$\begin{aligned}\dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d + 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d \\ \dot{n}_3 &= +\lambda_{pd}n_p n_d - 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_\alpha &= \lambda_{33}n_3^2\end{aligned}$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

$$\sum_{i=1}^4 A_i n_i = n_p + 2n_d + 3n_3 + 4n_\alpha = \text{const},$$

lub równoważnie:

$$\dot{n}_p + 2\dot{n}_d + 3\dot{n}_3 + 4\dot{n}_\alpha = 0.$$

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08