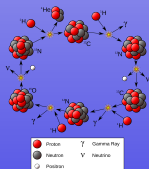


Podstawy astrofizyki i astronomii

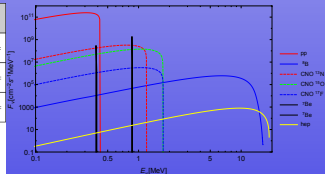
Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

10 maja 2016



		Be6	Be7	Be8	Be9
		5e-21 sec	53.3 d	8e-16 sec	99%
		6.01875	7.61669	8.00530	9.01218
L14	L15	L16	L17	L18	
Be-23 sec	3e-22 sec	7.39e	92.47%	0.840 sec	
4.0272	5.0135	6.89513	7.01660	8.0235	
H 1023	1040	H65	H60	H67	
0.088157%	99.99983%	Fe-22 sec	0.887 sec	3e-21 sec	
1.01605	4.00269	5.0121	4.01880	7.02803	
H1 (p)	H2 (n)	H3 (1)	H4	H5	H6
99.9882%	0.0115%	13.32 yr	9e-23 sec	v short	3e-22 sec
1.007825	1.01433	3.01605	4.0228	5.015	6.0448
	n				
	93.25 min				
	1.008665				



Twierdzenie wirialne

Całkujemy obie strony równania równowagi hydrostatycznej pomnożone przez $4\pi r^3$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \rightarrow \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -\int_0^R 4\pi r^3 \frac{Gm\rho}{r^2} dr$$

Lewą stronę całkujemy przez części:

$$4\pi r^3 P(r) \Big|_0^R - 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr = -3 \int_V P dV$$

natomiast prawa to grawitacyjna energia potencjalna:

$$\int_0^R -\frac{Gm\rho}{r} 4\pi r^2 dr = \int_V -\frac{Gm\rho}{r} dV$$

Otrzymujemy wynik znany jako *twierdzenie wirialne*:

$$E_{\text{graw}} + 3 \int_V P dV = 0$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza

Energia wewnętrzna gazu doskonałego to $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla gazu jednoatomowego, gęstość tej energii ε to:

$$P = \frac{2}{3}\varepsilon$$

Z twierdzenia wirialnego mamy:

$$\Delta E_{\text{term}} = \frac{1}{2}\Delta E_{\text{graw}}$$

czyli połowa wyzwolonej energii grawitacyjnej „podgrzewa” gwiazdę. Druga połowa jest wyświecana ze średnią jasnością L . Czas świecenia „Słońca” kosztem energii grawitacyjnej nazywamy *skalą czasową Kelvina-Helmholtza*:

$$\tau_{KH} = \frac{\Delta E_{\text{graw}}}{L_{\odot}}$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza II

- energia grawitacyjna np: jednorodnej kuli o masie M i promieniu R to:

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- energia ta jest nieskończona dla $R \rightarrow 0$, Słońce mogłoby świecić dowolnie długo
- nas interesuje czas świecenia przy kurczeniu się od $r \simeq 1 \text{ AU} \sim \infty$ do $r = R_{\odot}$
- wynosi on około $\tau_{\text{K-H}} \sim 10$ milionów lat
- na mocy twierdzenia wirialnego nieunikniony jest stały wzrost energii termicznej, a więc temperatury, w trakcie kurczenia się „gwiazdy”
- pojęcie „gwiazda Kelvina-Helmholtza” stosuje się wszędzie tam, gdzie źródłem wypromieniowanej energii jest energia grawitacyjna (kurczenie się obiektów) np:
 - powstawanie gwiazdy z obłoku
 - kurczenie się protogwiazdy neutronowej (promieniowanie to neutrina)

Skala dynamiczna

Rozważmy kulę „pyłu” o promieniu $R(t)$ i masie M zapadającą się pod wpływem własnego przyciągania grawitacyjnego. Czas kolapsu jest równy czasowi spadku swobodnego w polu masy punktowej. Z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{R(t)}, \quad v = \frac{dR(t)}{dt}$$

Czas kolapsu T wynosi:

$$T = \frac{1}{2GM} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}}} = \sqrt{\frac{R_0^3}{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

Wynik podaje się zwykle poprzez gęstość średnią kuli $\bar{\rho}$:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

Dla Słońca $T \simeq 0.5$ godziny.

Prawie kompletny układ równań struktury gwiazdy

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F = -D \frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \dots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$ – masa zawarta w kuli o promieniu r
- $P(r), \rho(r)$ – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$ – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia $L(r) = L_{\odot}$ produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w $r = 0$.

Model punktowy (Cowlinga)

- formalnie równanie na profil temperatury można rozwiązać osobno (jeżeli założymy, że $D = \text{const}$) zaczynając od powierzchni nie wnikając skąd wzięła się energia:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = -D \frac{d(aT^4)}{dr}, \quad T(R_{\odot}) = T_{\odot}$$

- w takim modelu $T \rightarrow \infty$ dla $r \rightarrow 0$ a cała energia pochodzi z punktu $r = 0$,
- w praktyce zakłada się, że energia wychodzi z małego, skończonego obszaru: konwektywnego jądra

Średnia droga swobodna fotonu w modelu Eddingtona

W modelu Eddingtona gęstość energii gazu fotonowego to:

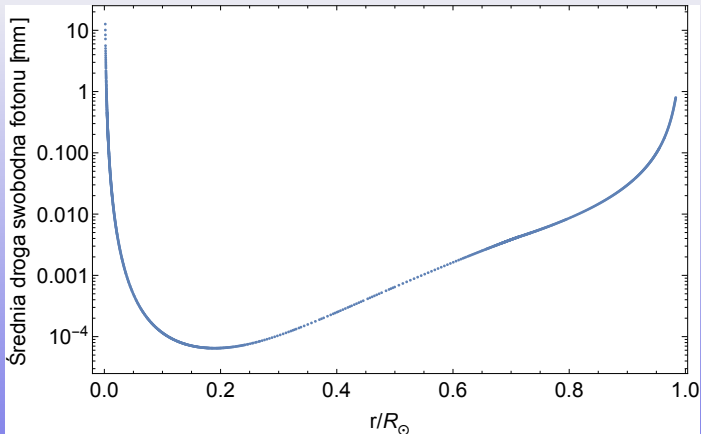
$$aT^4 = 3P_{\text{rad}} = 3\beta P$$

Po wstawieniu do równań:

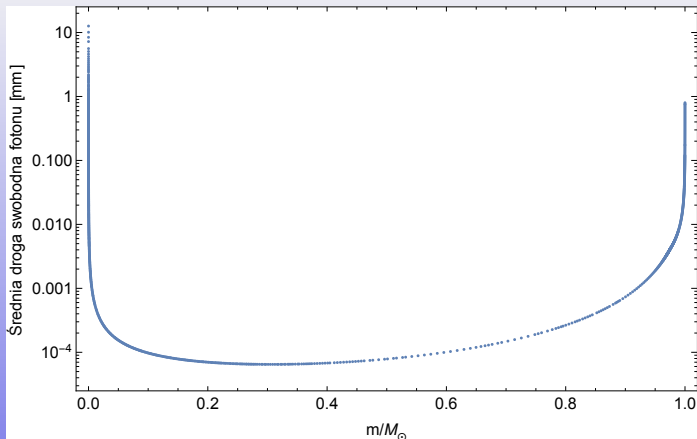
$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3}L_{\gamma}c\frac{d(aT^4)}{dr} \end{cases}$$

dostajemy specjalną postać drogi swobodnej:

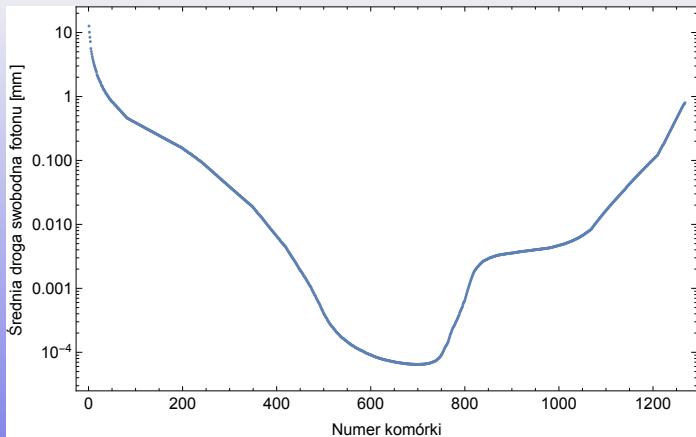
$$L_{\gamma} = \frac{L_{\odot}}{4\pi Gc\beta m\rho}$$



- 1 L_{γ} w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_{γ} w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_{γ} w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



- 1 L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



- 1 L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
- 2 L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
- 3 L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

Dotąd konsekwentnie omijaliśmy pytanie: *gdzie gwiazda produkuje energię niezbędną do świecenia?*

Strumień energii L wypływający przez sferę o promieniu r musi być równy całce z objętościowego tempa produkcji energii ε :

$$L(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 dr \rightarrow \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Równanie to przyjmuje jeszcze prostszą postać, gdy zamiast r użyjemy masy m zawartej w kuli o promieniu r jako zmiennej radialnej:

$$\frac{dL(r)}{dm} = \varepsilon/\rho = \epsilon$$

gdzie ϵ jest tempem produkcji energii na jednostkę masy.

Kompletny układ równań

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{array} \right.$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ , temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i :

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$ lub $P(r)$, $m(r)$, $T(r)$ oraz $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_{\odot}) = M_{\odot} \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_{\odot}) = \rho(R_{\odot}) = 0 \\ T(R_{\odot}) = T_{\odot} \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu „wpisz w *Mathematicę* i użyj **NDSolve**”

Jednym ze swobodnych parametrów modelu Słońca jest jego skład chemiczny/izotopowy X_i .

- EOS & κ możemy formalnie obliczyć/zmierzyć o ile skład X_i jest znany
- kluczowa jest znajomość X_i **wewnątrz** Słońca

Schemat rozumowania jest następujący:

- 1 skład „mgławicy pierwotnej” wnioskujemy na podstawie modelu i widma atmosfery słonecznej (zwykle brak informacji o izotopach) lub na podstawie laboratoryjnej analizy składu meteorytów (chondrytów) lub innej materii pochodzenia „kosmicznego”
- 2 Słońce w momencie powstania zostało dokładnie wymieszane przez procesy konwektywne
- 3 w strefie radiacyjnej mieszanie i dyfuzję pomijamy

Źródłem największych trudności jest model atmosfery Słońca.

Abundancje w Układzie Słonecznym

Pozycja	Nazwa	Symbol	Zawartość
1.	wodór	^1H	70.6 %
2.	hel	^4He	27.5 %
-	„metale”	-	1.9 %
3.	tlen	^{16}O	0.96 %
4.	węgiel	^{12}C	0.30 %
5.	neon	^{20}Ne	0.15 %
6.	żelazo	^{56}Fe	0.11 %
7.	

$$\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}} \right] = \log_{10} (n(\text{Fe})/n(\text{H}))_{\odot} - \log_{10} (n(\text{Fe})/n(\text{H}))_{*}, \quad \left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}} \right]_{\odot} = 0.0$$

Dla Słońca $\log_{10} (n(\text{Fe})/n(\text{H})) \simeq -4.33$, 1 atom Fe na 20000 atomów H.

Współczesny model Słońca domyka obliczenie tempa produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej i powiązanej z nimi produkcji neutrin.

- co do zasady wzór $E = mc^2$ dobrze wyjaśnia źródło energii
- cztery atomy wodoru przekształcają się w atom helu
- masa atomu helu/cząstki α jest mniejsza niż masa 4 atomów wodoru/protonów
- różnica masy $(4m_H - m_{He})c^2$ przekształcana jest na fotony γ i neutrina elektronowe ν_e
- neutrina z prędkością światła uciekają od razu, dlatego odejmuje się je od tempa produkcji energii (dla Słońca jest to 2%, ale dla presupernowej praktycznie 100%)

Powtórka z chemii jądrowej

Liczba protonów	Nazwa	Symbol	Name	Izotopy
Z=1	Wodór	H	Hydrogen	^2H , ^3H
Z=2	Hel	He	Helium	^3He , ^4He ,
Z=3	Lit	Li	Lithium	
Z=4	Beryl	Be	Beryllium	
Z=5	Bor	B	Boron	
Z=6	Węgiel	C	Carbon	
Z=7	Azot	N	Nitrogen	
Z=8	Tlen	O	Oxygen	
...	

- Z – liczba protonów = ładunek elektryczny jądra
- N – liczba neutronów
- $A = N + Z$ – liczba masowa
- symbol: A_Z

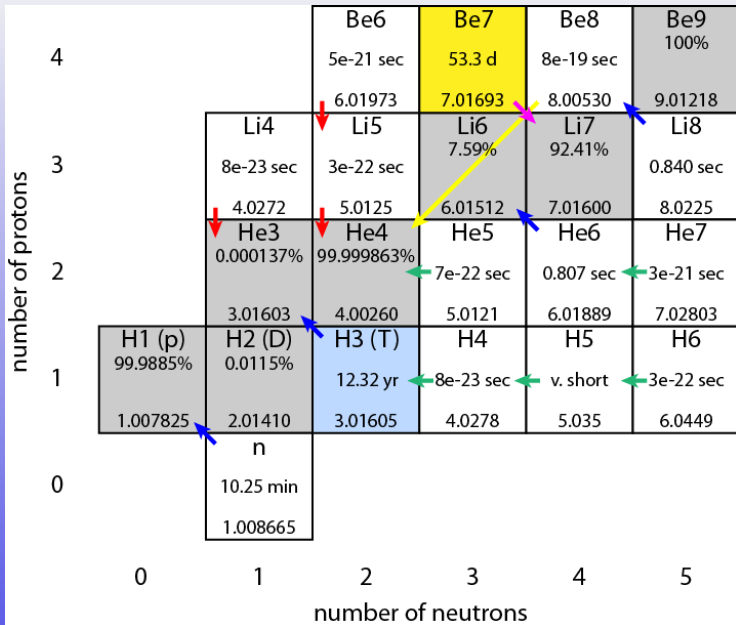


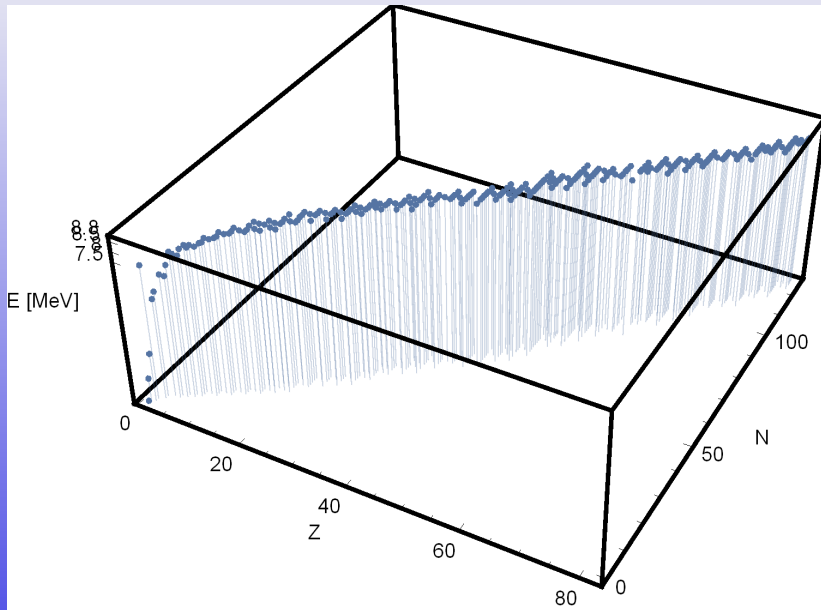
TABLE 4.1
Energy Release for Burning Stages

<i>Process</i>	$q(10^{18} \text{ erg/g})$	$q(\text{MeV/nucleon})$
$\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$	5 to 7	5 to 7
$3\alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}$	0.585	0.606
$4\alpha \rightarrow {}^{16}\text{O}$	0.870	0.902
$2 {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg}$	0.5	0.52
$2 {}^{20}\text{Ne} \rightarrow {}^{16}\text{O} + {}^{24}\text{Mg}$	0.11	0.11
$2 {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{32}\text{S}$	0.5	0.52
${}^{28}\text{Si} \rightarrow {}^{56}\text{Ni}$	0 to 0.3	0 to 0.31

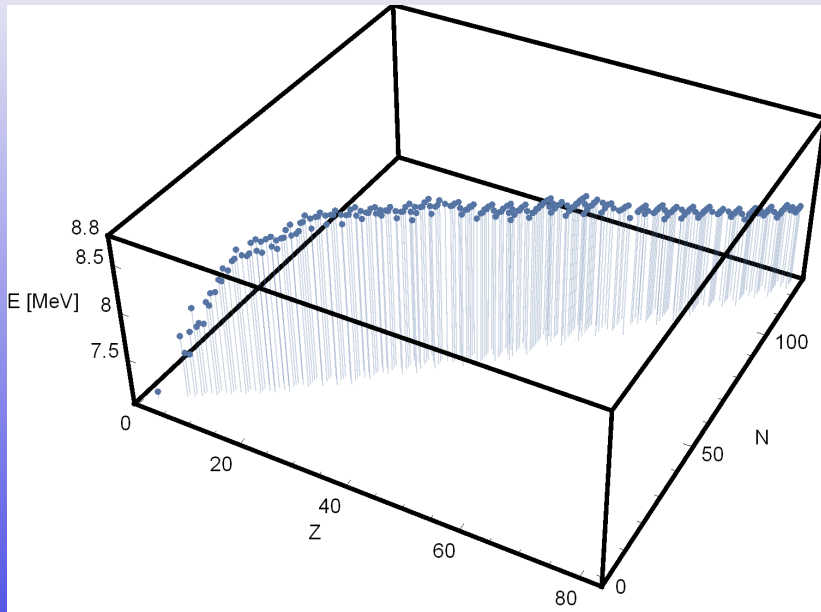
Note: $1 \text{ MeV/Nucleon} = 0.964844 \times 10^{18} \text{ erg/g}$

Źródło: D. Arnett, *Supernovae & nucleosynthesis*, str. 112.

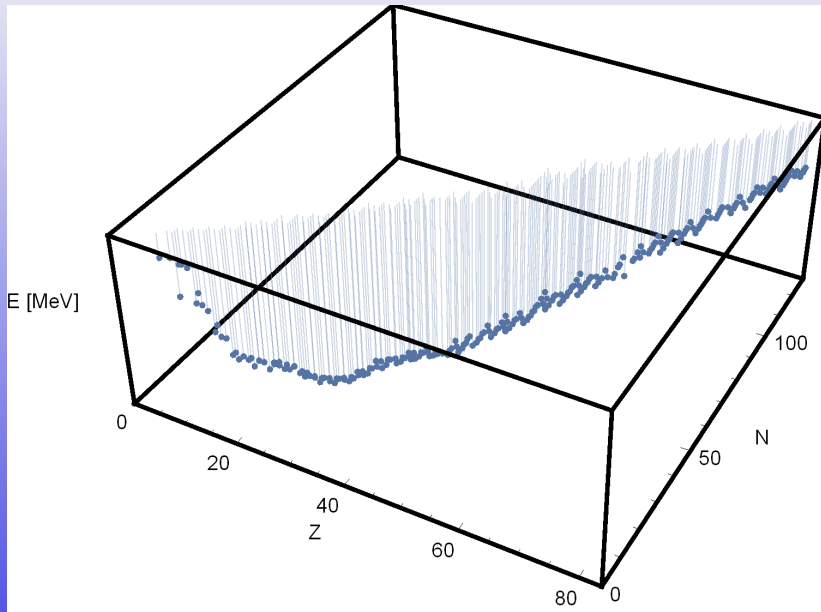
Energia wiązania jąder



Energia wiązania jąder



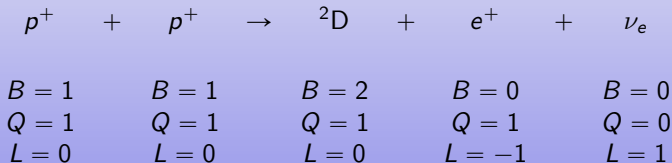
Energia wiązania jąder



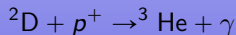
Kluczowe dla zrozumienia procesu syntezy jądrowej z wodoru w gwiazdach są następujące fakty:

- jądro wodoru to proton
- nie istnieją stabilne jądra atomowe, które nie posiadają neutronów
- oddziaływania silne nie zamieniają protonów w neutrony
- proces zamiany protonu w neutron zachodzi przez oddziaływania słabe i jest związany z emisją neutrino ν_e
- zachowanie ładunku elektrycznego Q jest oczywiste
- zachowana musi być liczba barionowa B i leptonowa L_e
- zachowana jest energia, pęd i moment pędu (wliczając spin)
- „reguła kciuka”: reakcja zachodzi najszybciej przez oddziaływania silne, chyba że jest zabroniona przez prawa zachowania – drugie w kolejności są oddziaływania elektromagnetyczne, na końcu słabe

Rozważmy podstawową (pierwszą) reakcję cyklu pp , w której produkowany jest deuter (${}^2\text{H}$, czasem oznaczany jako d lub D):



Kolejna reakcja zachodzi przez oddziaływania elektromagnetyczne:



Hel ${}^3\text{He}$ wchodzi w różne reakcje, co powoduje rozgałęzienie się cyklu, np:

- ❶ cykl ppl : ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p^+$
- ❷ cykl $ppll$, $pplll$: ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$

Sieć reakcji jądrowych

Formalnie mogą występować wszystkie możliwe reakcje dozwolone przez prawa zachowania. W praktyce tempo większości z nich jest pomijalnie małe, co uzasadnia użycie tempa reakcji równego zero, czyli całkowite pominięcie danej reakcji w dalszych rozważaniach.

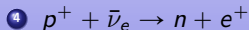
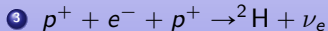
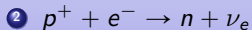
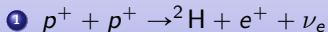
Przykład: przyjmujemy, że w Słońcu **nie zachodzą** możliwe w innych warunkach reakcje:

- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n + 3.27 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + p + 4.03 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma (= 23.85 \text{ MeV})$

Sieć reakcji tego typu określamy jako **hardwired network**.

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe w czystym wodorze, zgodne z zasadami zachowania:



Reakcja 1 wymaga pokonania bariery potencjału elektrostatycznego, co jest możliwe poprzez tunelowanie kwantowe.

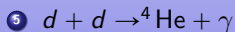
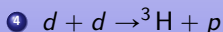
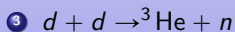
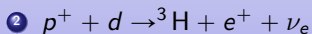
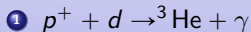
Reakcja 2 jest endotermiczna, czyli wymaga dostarczenia energii około 0.8 MeV w postaci temperatury lub/i potencjału chemicznego.

Reakcja 3 jest bardzo mało prawdopodobna, gdyż wymaga spotkania 3 cząstek.

Reakcja 4 nie może zachodzić z braku źródła antyneutrin; przekrój czynny jest przynajmniej 20 rzędów wielkości mniejszy niż dla pozostałych reakcji.

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru i wodoru:



① reakcja zachodzi szybko, przez oddziaływania elektromagnetyczne

② reakcja zachodzi wolno, przez oddziaływania słabe

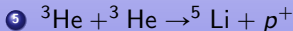
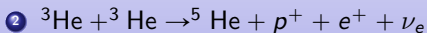
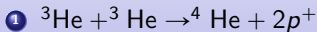
③ reakcja mało prawdopodobna, z powodu małego stężenia deuteru

④ jak wyżej

⑤ proces elektromagnetyczny wolniejszy $\alpha \simeq 1/137$ razy od procesów „silnych” podanych wyżej

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy niektóre możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru, wodoru i ${}^3\text{He}$:



① reakcja zachodzi bardzo szybko, przez oddziaływania silne

② reakcja zachodzi bardzo wolno, przez oddziaływania słabe

③ reakcja endotermiczna

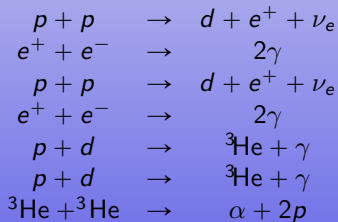
④ proces elektromagnetyczny; produkt czyli ${}^6\text{Be}$ natychmiast (0.5×10^{-20} sekundy) rozpada się na ${}^5\text{Li}$ wyrzucając proton, po czym ${}^5\text{Li}$ w taki sam sposób rozpada się do ${}^4\text{He}$ — reakcja okazuje się równoważna pierwszej

⑤ ${}^5\text{Li}$ rozpada się przez wyrzut protonu z czasem 3×10^{-22} sekundy

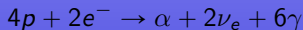
Wynik powyższych rozważań daje cykl *ppl*:



lub raczej:



W skrócie:



Rola fotonów, neutrin, neutronów i pozytonów

W procesie syntezy termojądrowej, oprócz jąder, biorą udział inne cząstki:

- fotony γ ulegają termalizacji i uwzględniamy je pośrednio poprzez własności termodynamiczne materii
- neutrina natychmiastowo opuszczają wnętrze gwiazdy i można po prostu odjąć ich energię od sumarycznego ciepła reakcji; dla Słońca ich strumienie i rozkład energetyczny są starannie liczone, gdyż stale je obserwujemy na Ziemi – zwykle **nie są** uwzględniane w sieci reakcji, za wyjątkiem supernowych typu „II”
- swobodne neutrony w Słońcu praktycznie nie są produkowane i nie wchodzi w skład sieci reakcji; w innych gwiazdach bywają stale obecne i muszą być uwzględniane
- pozytony zaraz po wytworzeniu anihilują z elektronami:
 $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$; dla $kT \sim m_e$ są stale obecne

Bilans energetyczny cyklu *ppl*

Na masę atomu składa się:

- 1 masa jądra atomowego – dominująca część
- 2 masa **elektronów** – mała, ale istotna część
- 3 energia wiązania powłok elektronowych – pomijalnie mała

Masę jąder/atomów można podać na kilka równoważnych sposobów:

- w atomowych jednostkach masy, *amu* lub *u*, równych $\frac{1}{12} m_{12\text{C}}$
- poprzez energię wiązania *Q*:

$$m_{AZ} = Nm_n + Zm_H - Q/c^2$$

Energia wiązania często podawana jest na nukleon, i we wzorze powyżej musimy ją przemnożyć przez $A = N + Z$

- jako deficyt masy $\Delta m = \Delta E/c^2$, poniżej mierzony względem ^{12}C :

$$(Z\Delta m_H + N\Delta m_n - \Delta m_{AZ}) = A \frac{Q}{A}$$

Bilans energetyczny cyklu *ppl* c.d.

Bilans masy cyklu *ppl* można zapisać w skrócie jako:

$$4m_p + 2m_e - m_\alpha = Q$$

gdzie m_p – masa protonu, m_e – masa elektronu, m_α – masa **cząstki alfa**, natomiast Q to energia w postaci promieniowania: fotonów i neutrin. Pamiętajając, że masy atomów to:

$$m_H = m_p + m_e, \quad m_{^4\text{He}} = m_\alpha + 2m_e$$

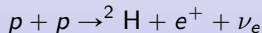
otrzymujemy po prostu:

$$4m_H - m_{^4\text{He}} = Q \simeq 26.73 \text{ MeV}$$

Odjęcie energii neutrin jest możliwe tylko w sensie uśrednionym, gdyż w każdym pojedynczym zdarzeniu jest ona inna. Jest to około 0.5 MeV, przypadkowo wartość bliska masy elektronu, relatywnie 2% całej produkowanej energii.

Układ równań różniczkowych: wprowadzenie

Rozważmy reakcję:



Ilości pozytonów i neutrin nie śledzimy. Zostają ilości protonów n_p i deuteronów n_d . Ich zmiana w czasie wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 + \dots \\ \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 + \dots\end{aligned}$$

gdzie $\lambda_{pp}(T, \rho)$ to tempo zachodzenia reakcji pp , a kropkami zaznaczono inne reakcje

- tempo ubywania protonów musi być równe podwojonemu tempu produkcji deuteronów
- liczba barionowa jest zachowana, czyli $n_p + 2n_d = \text{const}$: odpowiednie wyrazy po prawej stronie kasują się
- podobne wyrazy musimy napisać dla każdej z reakcji tworzącej lub niszczącej p , d itd.
- układ jest nieliniowy nawet dla $T, \rho = \text{const}$
- układ jest sztywny (stiff), co wymusza rozwiązywanie numeryczne metodami uwikłanymi (implicit)
- da się to robić np: w *Mathematica*: `Method`→`StiffnessSwitching` lub `BDF` lub `ImplicitRungeKutta`

Układ równań różniczkowych cyklu ppl



Obliczamy tempo zmian ilości protonów n_p , deuteronów n_d , jąder helu-3 n_3 oraz cząstek alfa n_α :

$$\begin{aligned} \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d + 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d \\ \dot{n}_3 &= +\lambda_{pd}n_p n_d - 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_\alpha &= \lambda_{33}n_3^2 \end{aligned}$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

$$n_p + 2n_d + 3n_3 + 4n_\alpha = \text{const.}$$