

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{cases}$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ , temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i :

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$ lub $P(r)$, $m(r)$, $T(r)$ oraz $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_{\odot}) = M_{\odot} \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_{\odot}) = \rho(R_{\odot}) = 0 \\ T(R_{\odot}) = T_{\odot} \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu „wpisz w *Mathematicę* i użyj ***NDSolve***”

Jednym ze swobodnych parametrów modelu Słońca jest jego skład chemiczny/izotopowy X_i .

- EOS & κ możemy formalnie obliczyć/zmierzyć o ile skład X_i jest znany
- kluczowa jest znajomość X_i **wewnątrz** Słońca

Schemat rozumowania jest następujący:

- 1 skład „mgławicy pierwotnej” wnioskujemy na podstawie modelu i widma atmosfery słonecznej (zwykle brak informacji o izotopach) lub na podstawie laboratoryjnej analizy składu meteorytów (chondrytów) lub innej materii pochodzenia „kosmicznego”
- 2 Słońce w momencie powstania zostało dokładnie wymieszane przez procesy konwektywne
- 3 w strefie radiacyjnej mieszanie i dyfuzję pomijamy

Źródłem największych trudności jest model atmosfery Słońca.

Abundancje w Układzie Słonecznym

Pozycja	Nazwa	Symbol	Zawartość
1.	wodór	^1H	70.6 %
2.	hel	^4He	27.5 %
-	„metale”	-	1.9 %
3.	tlen	^{16}O	0.96 %
4.	węgiel	^{12}C	0.30 %
5.	neon	^{20}Ne	0.15 %
6.	żelazo	^{56}Fe	0.11 %
7.	

$$\left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}} \right] = \log_{10} (n(\text{Fe})/n(\text{H}))_{\odot} - \log_{10} (n(\text{Fe})/n(\text{H}))_{*}, \quad \left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}} \right]_{\odot} = 0.0$$

Dla Słońca $\log_{10} (n(\text{Fe})/n(\text{H})) \simeq -4.33$, 1 atom Fe na 20000 atomów H.

Współczesny model Słońca domyka obliczenie tempa produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej i powiązanej z nimi produkcji neutrin.

- co do zasady wzór $E = mc^2$ dobrze wyjaśnia źródło energii
- cztery atomy wodoru przekształcają się w atom helu
- masa atomu helu/cząstki α jest mniejsza niż masa 4 atomów wodoru/protonów
- różnica masy $(4m_H - m_{He})c^2$ przekształcana jest na fotony γ i neutrina elektronowe ν_e
- neutrina z prędkością światła uciekają od razu, dlatego odejmuje się je od tempa produkcji energii (dla Słońca jest to 2%, ale dla presupernowej praktycznie 100%)

Powtórka z chemii jądrowej

Liczba protonów	Nazwa	Symbol	Name	Izotopy
Z=1	Wodór	H	Hydrogen	^2H , ^3H
Z=2	Hel	He	Helium	^3He , ^4He ,
Z=3	Lit	Li	Lithium	
Z=4	Beryl	Be	Beryllium	
Z=5	Bor	B	Boron	
Z=6	Węgiel	C	Carbon	
Z=7	Azot	N	Nitrogen	
Z=8	Tlen	O	Oxygen	
...	

- Z – liczba protonów = ładunek elektryczny jądra
- N – liczba neutronów
- A = N+Z – liczba masowa
- symbol: A_Z

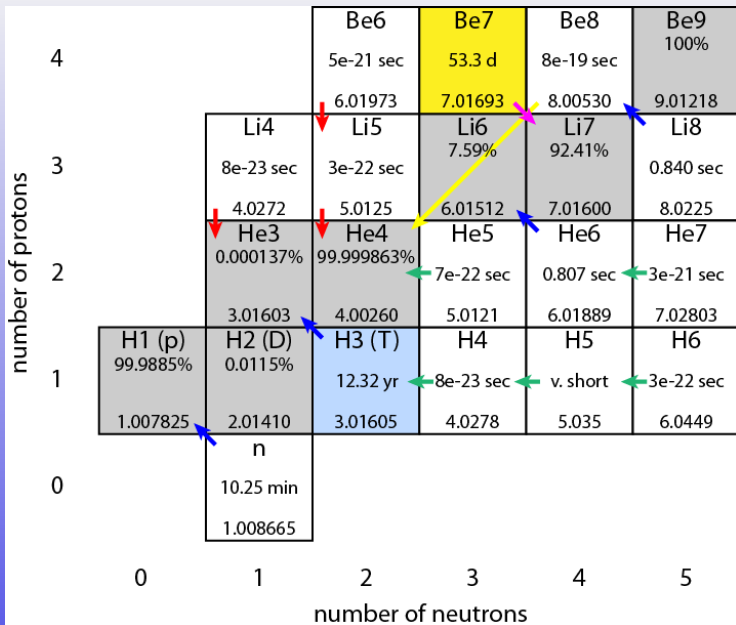


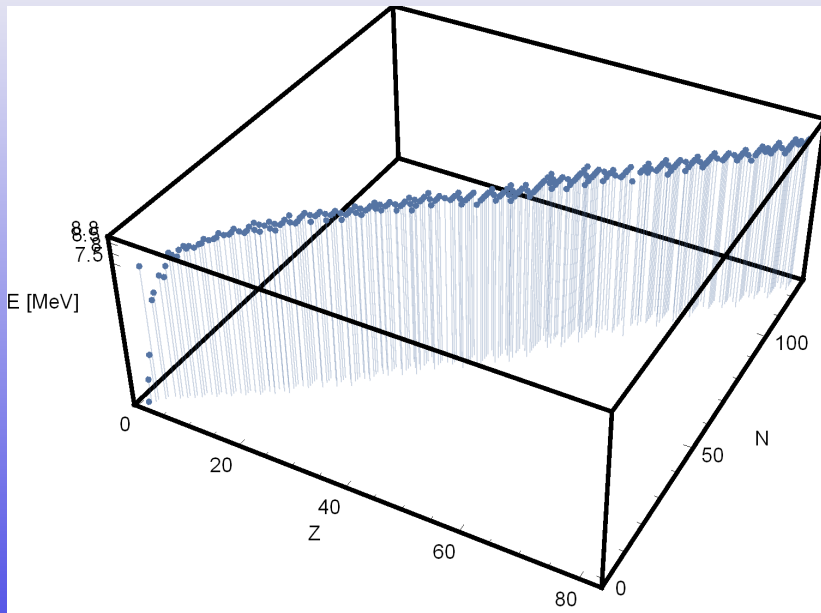
TABLE 4.1
Energy Release for Burning Stages

<i>Process</i>	$q(10^{18} \text{ erg/g})$	$q(\text{MeV/nucleon})$
$\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$	5 to 7	5 to 7
$3\alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}$	0.585	0.606
$4\alpha \rightarrow {}^{16}\text{O}$	0.870	0.902
$2 {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg}$	0.5	0.52
$2 {}^{20}\text{Ne} \rightarrow {}^{16}\text{O} + {}^{24}\text{Mg}$	0.11	0.11
$2 {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{32}\text{S}$	0.5	0.52
${}^{28}\text{Si} \rightarrow {}^{56}\text{Ni}$	0 to 0.3	0 to 0.31

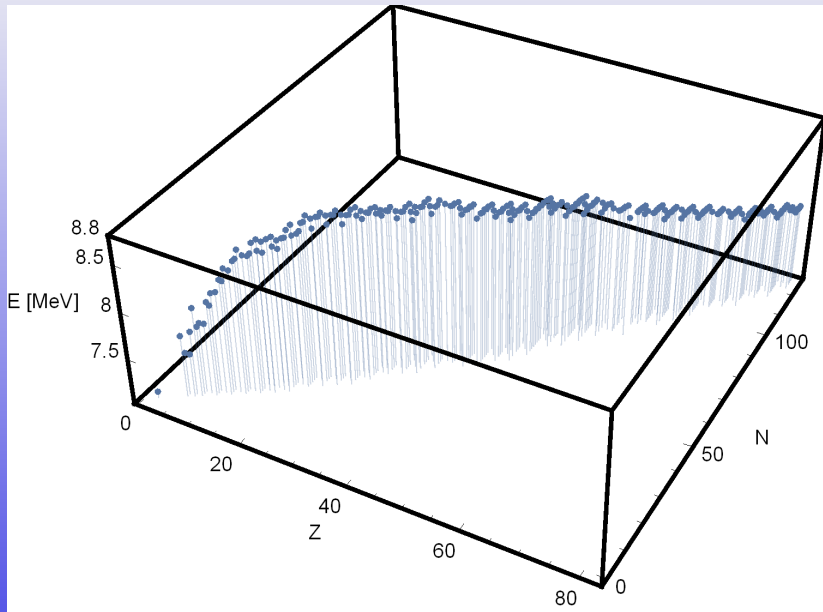
Note: $1 \text{ MeV/Nucleon} = 0.964844 \times 10^{18} \text{ erg/g}$

Źródło: D. Arnett, *Supernovae & nucleosynthesis*, str. 112.

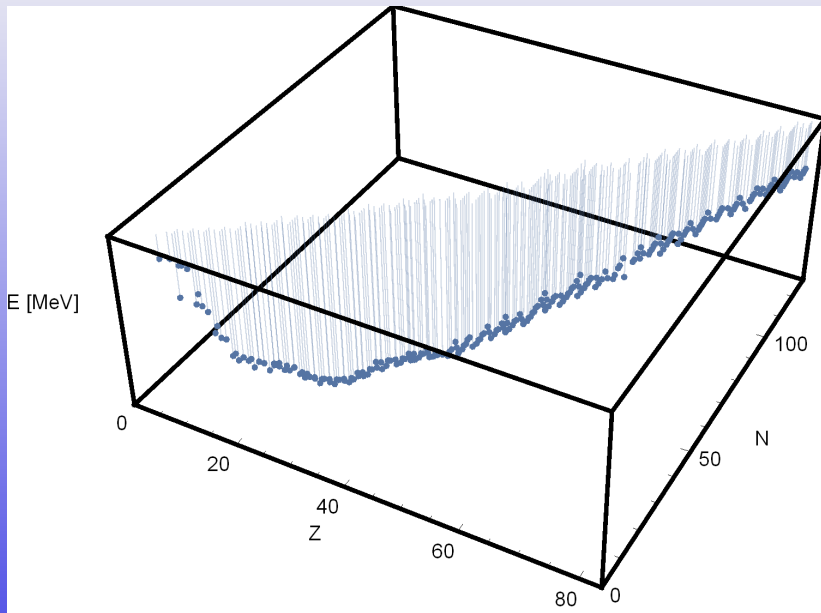
Energia wiązania jąder



Energia wiązania jąder



Energia wiązania jąder



Kluczowe dla zrozumienia procesu syntezy jądrowej z wodoru w gwiazdach są następujące fakty:

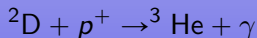
- jądro wodoru to proton
- nie istnieją stabilne jądra atomowe, które nie posiadają neutronów
- oddziaływania silne nie zamieniają protonów w neutrony
- proces zamiany protonu w neutron zachodzi przez oddziaływania słabe i jest związany z emisją neutrino ν_e
- zachowanie ładunku elektrycznego Q jest oczywiste
- zachowana musi być liczba barionowa B i leptonowa L_e
- zachowana jest energia, pęd i moment pędu (wliczając spin)
- „reguła kciuka”: reakcja zachodzi najszybciej przez oddziaływania silne, chyba że jest zabroniona przez prawa zachowania – drugie w kolejności są oddziaływania elektromagnetyczne, na końcu słabe

Rozważmy podstawową (pierwszą) reakcję cyklu pp , w której produkowany jest deuter (${}^2\text{H}$, czasem oznaczany jako d lub D):



$B = 1$	$B = 1$	$B = 2$	$B = 0$	$B = 0$
$Q = 1$	$Q = 1$	$Q = 1$	$Q = 1$	$Q = 0$
$L = 0$	$L = 0$	$L = 0$	$L = -1$	$L = 1$

Kolejna reakcja zachodzi przez oddziaływania elektromagnetyczne:



Hel ${}^3\text{He}$ wchodzi w różne reakcje, co powoduje rozgałęzienie się cyklu, np:

- ① cykl ppl : $2 {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p^+$
- ② cykl $ppll, pplll$: ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$

Formalnie mogą występować wszystkie możliwe reakcje dozwolone przez prawa zachowania. W praktyce tempo większości z nich jest pomijalnie małe, co uzasadnia użycie tempa reakcji równego zero, czyli całkowite usunięcie danej reakcji.

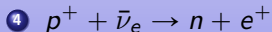
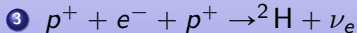
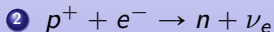
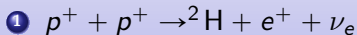
Przykład: przyjmujemy, że w Słońcu **nie zachodzą** możliwe w innych warunkach reakcje:

- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n + 3.27 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + p + 4.03 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma (= 23.85 \text{ MeV})$

Sieć reakcji tego typu określamy jako **hardwired network**.

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe w czystym wodorze, zgodne z zasadami zachowania:



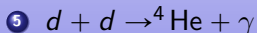
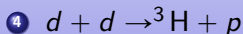
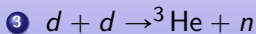
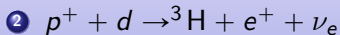
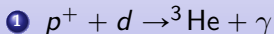
Reakcja 1 wymaga pokonania bariery potencjału elektrostatycznego, co jest możliwe poprzez tunelowanie kwantowe. Reakcja 2 jest endotermiczna, czyli wymaga dostarczenia energii około 0.8 MeV w postaci temperatury lub/i potencjału chemicznego.

Reakcja 3 jest bardzo mało prawdopodobna, gdyż wymaga spotkania 3 cząstek.

Reakcja 4 nie może zachodzić z braku źródła antyneutrin; przekrój czynny jest przynajmniej 20 rzędów wielkości mniejszy niż dla pozostałych reakcji.

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy możliwe do pomyślenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru i wodoru:



- ① reakcja zachodzi szybko, przez oddziaływania elektromagnetyczne
- ② reakcja zachodzi wolno, przez oddziaływania słabe
- ③ reakcja mało prawdopodobna, z powodu małego stężenia deuteru
- ④ jak wyżej
- ⑤ proces elektromagnetyczny wolniejszy $\alpha \simeq 1/137$ razy od procesów „silnych” podanych wyżej

„Wyprowadzenie” cyklu pp

Wypiszmy niektóre możliwe do pomyslenia reakcje jądrowe z udziałem deuteru, wodoru i ^3He :

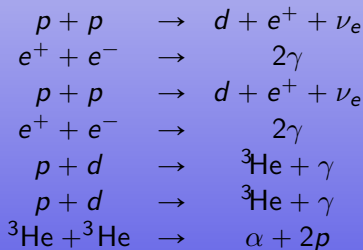
- 1 $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + 2p^+$
- 2 $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^5\text{He} + p^+ + e^+ + \nu_e$
- 3 $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{Li} + d(= p + n)$
- 4 $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^6\text{Be} + \gamma$
- 5 $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^5\text{Li} + p^+$

- 1 reakcja zachodzi bardzo szybko, przez oddziaływania silne
- 2 reakcja zachodzi bardzo wolno, przez oddziaływania słabe
- 3 reakcja endotermiczna
- 4 jak wyżej
- 5 proces elektromagnetyczny; produkt czyli ^6Be natychmiast (0.5×10^{-20} sekundy) rozpada się na ^5Li wyrzucając proton, po czym ^5Li w taki sam sposób rozpada się do ^4He — reakcja okazuje się równoważna pierwszej
- 6 ^5Li rozpada się przez wyrzut protonu z czasem 3×10^{-22} sekundy

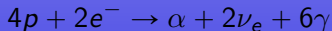
Wynik powyższych rozważań daje cykl *ppl*:



lub raczej:



W skrócie:



Rola fotonów, neutrin, neutronów i pozytonów

W procesie syntezy termojądrowej, oprócz jąder, biorą udział inne cząstki:

- fotony γ ulegają termalizacji i uwzględniamy je pośrednio poprzez właściwości termodynamiczne materii
- neutrina natychmiastowo opuszczają wnętrze gwiazdy i można po prostu odjąć ich energię od sumarycznego ciepła reakcji; dla Słońca ich strumienie i rozkład energetyczny są starannie liczone, gdyż stale je obserwujemy na Ziemi – zwykle **nie są** uwzględniane w sieci reakcji, za wyjątkiem supernowych typu „II”
- swobodne neutrony w Słońcu praktycznie nie są produkowane i nie wchodzi w skład sieci reakcji; w innych gwiazdach bywają stale obecne i muszą być uwzględniane
- pozytony zaraz po wytworzeniu anihilują z elektronami:
 $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$; dla $kT \sim m_e$ są stale obecne

Bilans energetyczny cyklu *ppl*

Na masę atomu składa się:

- 1 masa jądra atomowego – dominująca część
- 2 masa **elektronów** – mała, ale istotna część
- 3 energia wiązania powłok elektronowych – pomijalnie mała

Masę jąder/atomów można podać na kilka równoważnych sposobów:

- w atomowych jednostkach masy, amu lub u , równych $\frac{1}{12}m_{12C}$
- poprzez energię wiązania Q :

$$m_{AZ} = Nm_n + Zm_H - Q/c^2$$

Energia wiązania często podawana jest na nukleon, i we wzorze powyżej musimy ją przemnożyć przez $A = N + Z$

- jako deficyt masy $\Delta m = \Delta E/c^2$, poniżej mierzony względem ^{12}C :

$$(Z\Delta m_H + N\Delta m_n - \Delta m_{AZ}) = A\frac{Q}{A}$$

Bilans energetyczny cyklu *ppl* c.d.

Bilans masy cyklu *ppl* można zapisać w skrócie jako:

$$4m_p + 2m_e - m_\alpha = Q$$

gdzie m_p – masa protonu, m_e – masa elektronu, m_α – masa **cząstki alfa**, natomiast Q to energia w postaci promieniowania: fotonów i neutrin.

Pamiętając, że masy atomów to:

$$m_H = m_p + m_e, \quad m_{4\text{He}} = m_\alpha + 2m_e$$

otrzymujemy po prostu:

$$4m_H - m_{4\text{He}} = Q \simeq 26.73 \text{ MeV}$$

Odjęcie energii neutrin jest możliwe tylko w sensie uśrednionym, gdyż za każdym razem jest ona inna. Jest to około 0.5 MeV, przypadkowo wartość bliska masy elektronu, relatywnie 2% całej produkowanej energii.

Układ równań różniczkowych: wprowadzenie

Rozważmy reakcję:



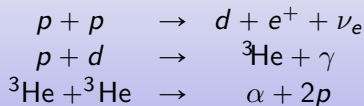
Ilości pozytonów i neutronów nie śledzimy. Zostają ilości protonów n_p i deuteronów n_d . Ich zmiana w czasie wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 + \dots \\ \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 + \dots\end{aligned}$$

gdzie $\lambda_{pp}(T, \rho)$ to tempo zachodzenia reakcji pp , a kropkami zaznaczono inne reakcje

- tempo ubywania protonów musi być równe podwojonemu tempu produkcji deuteronów
- liczba barionowa jest zachowana, czyli $n_p + 2n_d = \text{const}$: odpowiednie wyrazy po prawej stronie kasują się
- podobne wyrazy musimy napisać dla każdej z reakcji tworzącej lub niszczącej p , d itd.
- układ jest nieliniowy nawet dla $T, \rho = \text{const}$
- układ jest sztywny (stiff), co wymusza rozwiązywanie numeryczne metodami uwikłanymi (implicit)
- da się to robić np: w *Mathematica*: Method \rightarrow StiffnessSwitching lub BDF lub ImplicitRungeKutta

Układ równań różniczkowych cyklu ppl



Obliczamy tempo zmian ilości protonów n_p , deuteronów n_d , jąder helu-3 n_3 oraz cząstek alfa n_α :

$$\begin{aligned} \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_pn_d + 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_pn_d \\ \dot{n}_3 &= +\lambda_{pd}n_pn_d - 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_\alpha &= \lambda_{33}n_3^2 \end{aligned}$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

$$n_p + 2n_d + 3n_3 + 4n_\alpha = \text{const.}$$

Jakobian sieci reakcji

Układ opisujące reakcje można zapisać w postaci wektorowej

$$\vec{n} = \{n_p, n_d, n_3, n_\alpha\}$$

$$\dot{\vec{n}} = \vec{F}(\vec{n})$$

Nie da się go zapisać w postaci macierzowej, ale możemy utworzyć jacobian \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial n_j}$$

	p	d	${}^3\text{He}$	α
p	$-\lambda_{pd}n_d - 4\lambda_{pp}n_p$	$-\lambda_{pd}n_p$	$4\lambda_{33}n_3$	0
d	$-2\lambda_{pd}n_d + 4\lambda_{pp}n_p$	$-2\lambda_{pd}n_p$	0	0
${}^3\text{He}$	$3\lambda_{pd}n_d$	$2\lambda_{pd}n_p$	$-12\lambda_{33}n_3$	0
α	0	0	$8\lambda_{33}n_3$	0

Obliczenie szybkości reakcji

Wyznaczenie współczynników określających szybkość reakcji wymaga wykonania kilku kroków:

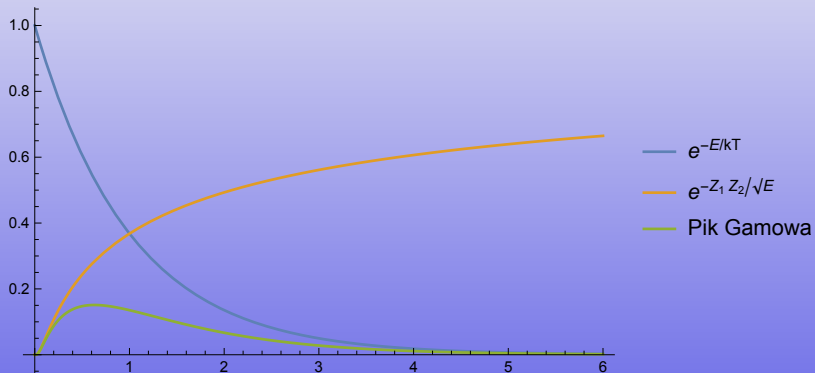
- 1 obliczenie lub zmierzenie przekroju czynnego na reakcję, np:
 σ_{pp}
- 2 uwzględnienie poprawek „kulombowskich”
- 3 uśrednienie w warunkach równowagi termicznej: gazu doskonałego

W obliczeniach tempa reakcji często decydujące są dwa przeciwstawnie działające wyrazy:

$$\lambda \propto \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} \sigma(E) E dE = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} S(E) e^{-const \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{E}}} dE$$

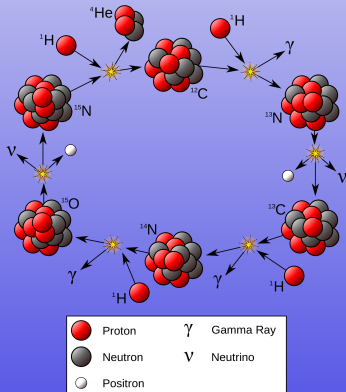
- rozkład Boltzmann'a $e^{-\frac{E}{kT}}$: ilość cząstek o dużych energiach maleje wykładniczo (tzw: ogon termiczny)
- odpychanie elektrostatyczne: $e^{-const \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{E}}}$ – im większa energia, tym większe prawdopodobieństwo tunelowania i zajścia reakcji

Pik Gamowa



Zupełnie odmiennym od opisanego wcześniej mechanizmem spalania wodoru jest cykl katalityczny CNO. Dominuje w gwiazdach o masie większej niż słoneczna.

Cykl CNO



Zupełnie odmiennym od opisanego wcześniej mechanizmem spalania wodoru jest cykl katalityczny CNO. Dominuje w gwiazdach o masie większej niż słoneczna.

Cykle pp

