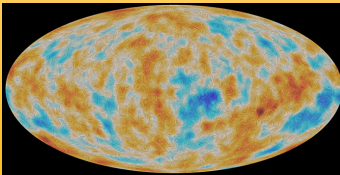
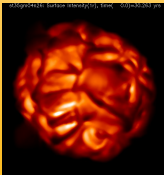


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

30 kwietnia 2019



Równowaga hydrostatyczna w przypadku ogólnym

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \equiv -\rho \vec{\nabla} \Phi_g \quad (1a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad \text{lub} \quad \Phi_g = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (1b)$$

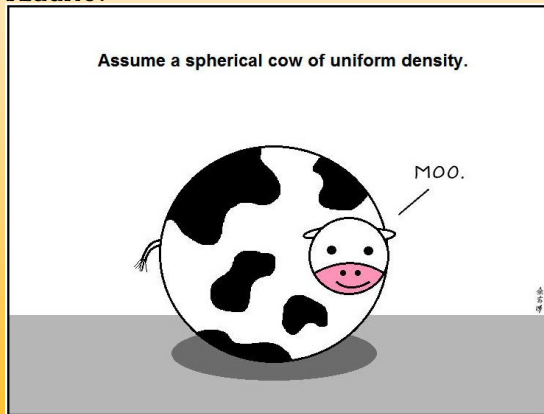
$$p = p(\rho, \dots) \quad (1c)$$

Postać preferowana

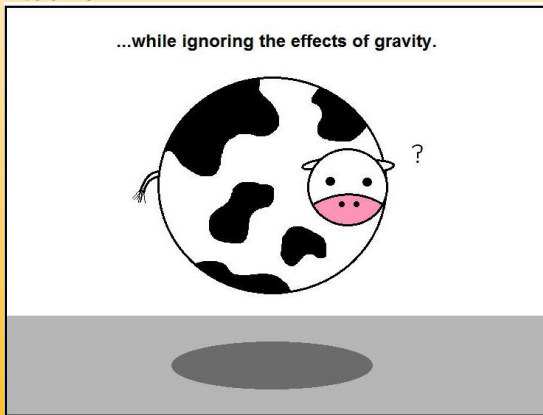
$$h(\rho) + \Phi_g = C \quad (2)$$

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!

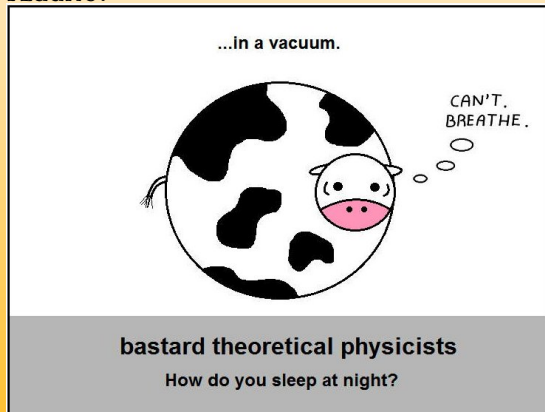
Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii *zwykle jest uzasadnione* lub przynajmniej przydatne:

- 1 planety, planety karłowate, duże księżyce
- 2 większość gwiazd
- 3 gwiazdy neutronowe, białe karły, czarne dziury
- 4 gromady kuliste gwiazd
- 5 gromady galaktyk, pustki (?)

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest **nieuzasadnione**:

- 1 galaktyki spiralne
- 2 dyski akrecyjne
- 3 obiekty bardzo szybko rotujące

Równowaga hydrostatyczna: przypadek sferycznie symetryczny

Równanie równowagi hydrostatycznej jest formalnie identyczne jak w stałym polu:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

ale teraz g jest funkcją r :

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Masę zawartą w kuli o promieniu r można łatwo obliczyć:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr$$

Zróżniczkowanie powyższej całki daje tzw. *równanie ciążłości*:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (3a)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3b)$$

$$p = p(\rho) \quad (3c)$$

Warunki początkowe:

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c$$

Warunek brzegowy (obcięcie matematycznego rozwiązania układu równań):

$$p(R) = \rho(R) = 0, \quad m(R) = M$$

gdzie R - promień ciała, M - masa ciała niebieskiego.

W astrofizyce bardzo często używa się jako zmiennej radialnej masy zawartej wewnątrz sfery o promieniu r .

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (4a)$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (4b)$$

$$p = p(\rho) \quad (4c)$$

W układzie powyżej niewiadomymi są funkcje $r(m)$, $p(m)$, $\rho(m)$, natomiast masa m gra rolę zmiennej niezależnej.

Opis w zmiennej niezależnej r nazywamy często Eulerowskim, natomiast opis w zmiennej m Lagranżowskim.

$$p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

γ – wykładnik politropy, n – indeks politropy

- $n \rightarrow \infty, \gamma = 1$ – izotermiczne równanie stanu
- $n = 5, \gamma = \frac{6}{5}$ – wartość graniczna pomiędzy skończonymi a nieskończonymi rozwiązaniami (sfera Plummera)
- $n = 3, \gamma = \frac{4}{3}$ – model „Słońca”, relatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 3/2, \gamma = \frac{5}{3}$ – nierelatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 1, \gamma = 2$ – gwiazda konwektywna
- $n \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty$ – przypadek stałej gęstości

Politropowe równanie stanu: wzory

	γ – wykładnik politropy	n – indeks politropy
ciśnienie	$p = K\rho^\gamma$	$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$
„entalpia” właściwa $h = \frac{(H/V)}{\rho}$	$h = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$	$h = K(n+1)\rho^{1/n}$
„prędkość dźwięku” $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$	$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$	$c_s^2 = K(1 + \frac{1}{n})\rho^{1/n}$
	$c_s^2 = (\gamma - 1) h$	$h = n c_s^2$
	$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$	$h = (n + 1) \frac{p}{\rho}$

Równanie równowagi dla entalpii

Wcześniej pokazaliśmy, że użycie „entalpii” właściwej $\nabla h = \nabla p / \rho$ upraszcza równania.

$$\frac{\nabla p}{\rho} \equiv \nabla h = -\nabla \Phi_g \quad (5a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad (5b)$$

Pierwsze równanie można scałkować:

$$h + \Phi_g = \text{const} \quad (6a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad (6b)$$

Działając obustronnie operatorem Laplace’a Δ na pierwsze z równań i korzystając z drugiego mamy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0$$

Równanie Lane-Emdena

Po wyprowadzeniu wzoru na entalpię gazu politropowego, otrzymujemy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0, \quad h(\rho) = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{1/n}$$

do ostatecznie daje jedno równanie różniczkowe:

$$\Delta h + 4\pi G \left(\frac{\gamma-1}{K\gamma} \right)^n h^n = 0$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych na postać:

$$\Delta h = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dh}{dr} \right) = \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh}{dr}$$

Standardową postać otrzymamy dokonując równoczesnej zamiany zmiennej radialnej r i funkcji niewiadomej h :

$$h(x) = h_c w(x), \quad r = \lambda x$$

Po przeprowadzeniu rachunków otrzymujemy słynne równanie Lane-Emdena:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0.$$

Równanie:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1, w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$

$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$

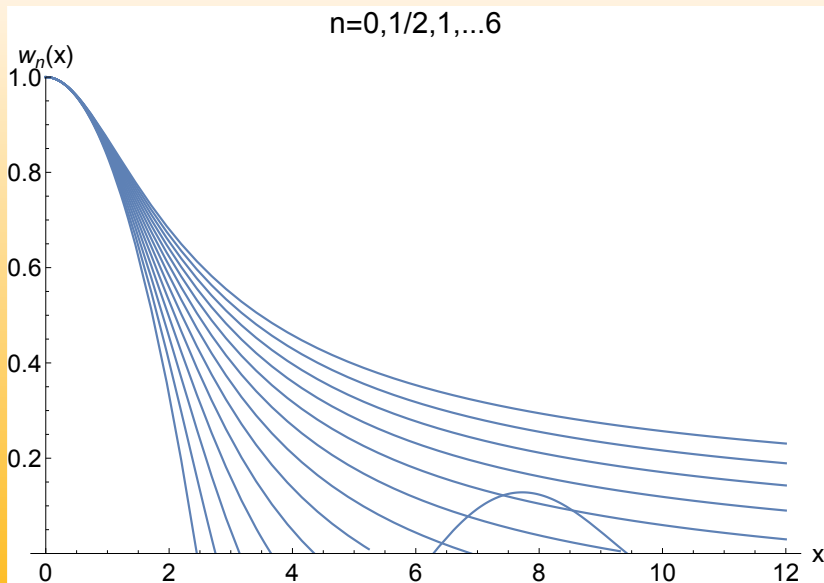
- dla $n = 1$

$$w_1 = \frac{\sin x}{x}$$

- dla $n = 5$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Funkcje Lane-Emdena: wykresy



Rozwiązanie opisują wzory:

$$h(r) = h_C w_n(r/\lambda), \quad \rho(r) = \rho_C w_n(r/\lambda)^n$$

gdzie skalowanie opisuje kombinacja o wymiarze długości:

$$\lambda = c_s \sqrt{\frac{n}{4\pi G \rho_C}} = \sqrt{\frac{h_C}{4\pi G \rho_C}}$$

Wielkość $1/\sqrt{G\rho}$ ma wymiar czasu, natomiast c_s to prędkość „dźwięku”, obie liczone dla wartości w centrum „gwiazdy”. Strukturalnie wzór na λ wygląda identycznie jak wzór na długość Jeansa.

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.

Oznaczmy:

x_0 – miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena,

$w'_n(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3 \left(-x_0^2 w'_n(x_0)\right)$$

Jeżeli znamy masę M i promień R obiektu, oraz potrafimy obliczyć indeks n równania stanu materii z której jest zbudowany, to znamy strukturę wewnętrzną:

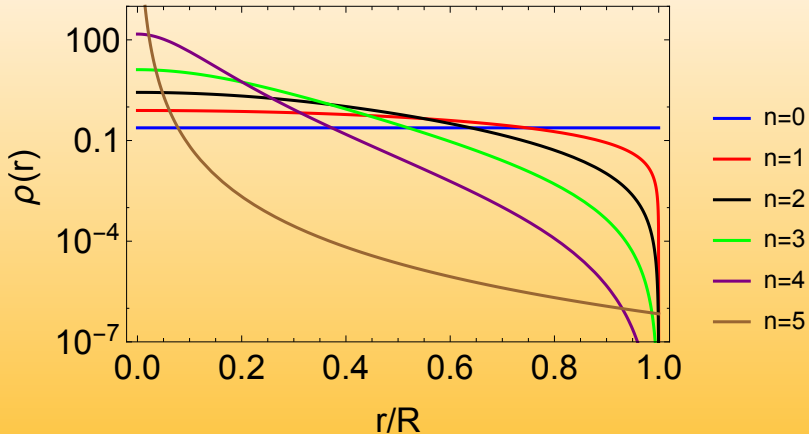
$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} w_n \left(\frac{r}{R} x_0 \right)^n \left(-\frac{x_0}{3x_1} \right)$$

Wielkość:

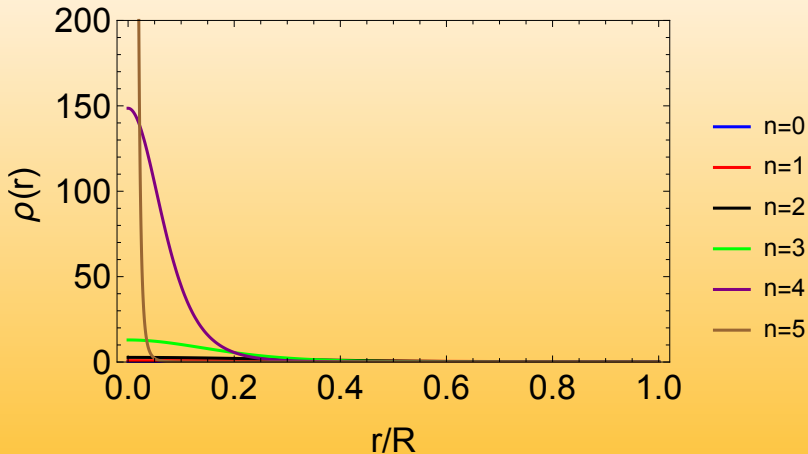
$$-\frac{x_0}{3x_1} = \frac{\rho_C}{\bar{\rho}}$$

gdzie: ρ_C – gęstość centralna (w środku), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – gęstość średnia, nazywamy *kontrastem gęstości*.

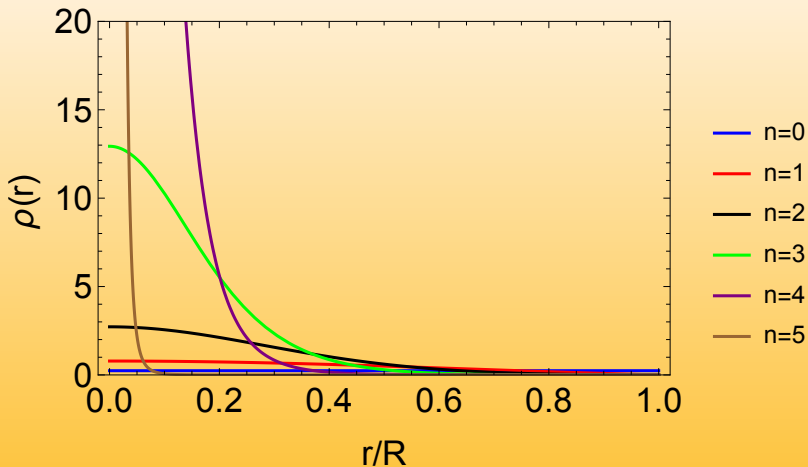
Przykłady struktury dla zadanego R i M



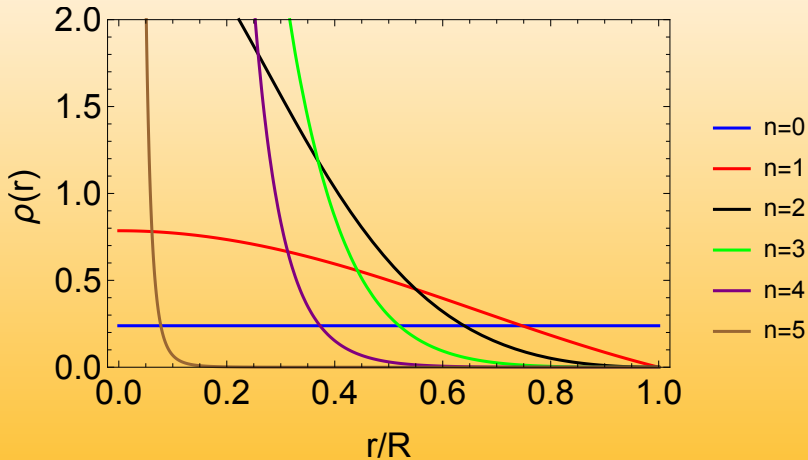
Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} M = 4\pi\lambda^3\rho_C (-x_0^2w'_n(x_0)) \\ R = \lambda x_0 \\ \lambda^2 = \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} \\ h_C = K(n+1)\rho_C^{1/n} \end{cases} \quad (7)$$

Ostatnie równanie eliminuje h_C , z drugiego bierzemy λ . Zostają dwa równania łączące M , R i ρ_C . Po wyeliminowaniu gęstości centralnej ρ_C pozostaje skomplikowany wzór łączący promień R i masę M ciała:

$$R = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{x_0}{w'_n(x_0)} \right)^{\frac{n-1}{n-3}} \left(\frac{4\pi G}{K(n+1)x_0^2} \right)^{n/(n-3)} M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

Politropy: zależność masa-promień

Pomijając czynniki zależne tylko od równania stanu, t.j. K i n , mamy:

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

- dla $n < 1$ promień ciała R rośnie przy dokładaniu masy M
- dla $n = 1$ promień ciała R jest stały, niezależnie od masy M
- dla $1 < n < 3$ promień ciała **maleje** przy dokładaniu masy M
- dla $n = 3$ masa ciała $M = \text{const}$, i zależy wyłącznie od równania stanu (stałych fizycznych); w przypadku relatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego nazywamy ją *masą Chandrasekhara*
 $M_{Ch} \simeq m_{Planck}^3 / m_{proton}^2 \simeq 1.5 M_{\odot}$
- dla $3 < n < 5$ promień znowu rośnie z masą
- dla $n \geq 5$ promień jest nieskończony

Dane jest równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

Przybliżamy gradient ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{p(R) - p(0)}{R - 0} = -\frac{p_C}{R}$$

i analogicznie prawą stronę:

$$-\frac{Gm\rho}{r^2} \sim -\frac{GM\rho_C}{R^2}$$

Dostajemy:

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

One-zone model vs polytropic model

W modelu politropowym:

$$\begin{aligned}\frac{GM}{R} &= \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}}{R} = \frac{4\pi G\rho_C}{3} \left(-3\frac{w'_n(x_0)}{x_0} \right) \lambda^2 x_0^2 = \\ &= -x_0 w'_n(x_0) 4\pi G\rho_C \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} = -x_0 w'_n(x_0) h_C = \\ &= -x_0 w'_n(x_0)(n+1) \frac{p_C}{\rho_C}\end{aligned}$$

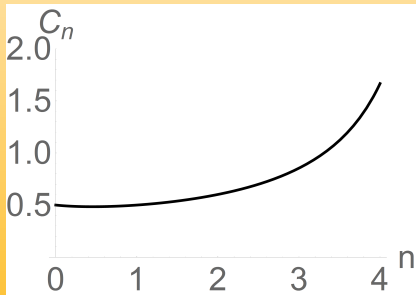
One-zone

Politropa

$$\frac{p_c}{\rho_c} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{p_c}{\rho_c} = C_n \frac{GM}{R}$$

$$C_n = -\frac{1}{x_0 w'_n(x_0)(n+1)}$$



Gwiazdy

Astrofizyczny opis gwiazdy składa się z czterech składników:

- 1 struktura hydrostatyczna (równowaga gradientu ciśnienia i grawitacji):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$

- 2 zachowanie masy/związek rozkładu masy z grawitacją:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

- 3 transport energii/pomieniowania (gwiazdy świecą!),
- 4 produkcja/źródło energii (reakcje termojądrowe).

Docelowo potrzebujemy 4 równań, których rozwiązanie wyznaczy pełną strukturę gwiazdy: ciśnienie $P(r)$, gęstość $\rho(r)$, temperaturę $T(r)$, strumień energii $L(r)$ i skład chemiczny/izotopowy $X_i(r)$. Warunki brzegowe wyznaczają masę całkowitą $M(R)$, promień R , temperatura powierzchniowa $T(R)$ oraz jasność gwiazdy $L(R)$.

Początkowy skład chemiczny wynika z nukleosyntezy kosmologicznej (Wielkiego Wybuchu).



Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08