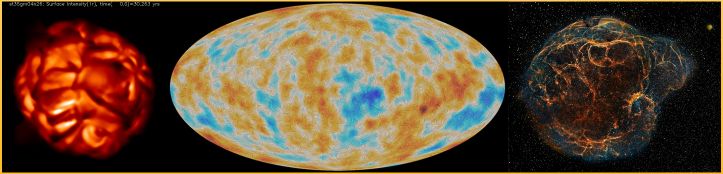
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

24 kwietnia 2018



Gwiazdy

Celem kolejnych rachunków jest wyprowadzenie związku pomiędzy współczynnikiem dyfuzji D energii gazu fotonowego a średnią drogą swobodną w procesie błądzenia przypadkowego fotonu.

Kolejno przedstawiane kroki rozumowania to:

1. analityczne rozwiązanie równania dyfuzji o współczynniku D w przypadku „fotonów” początkowo skoncentrowanych w $\vec{r} = 0$ (rozpływający się pik gaussowski)
2. numeryczne zasymulowanie procesu błądzenia fotonów ze średnią drogą swobodną L_γ zaczynając od $\vec{r} = 0$
3. wywnioskowanie analitycznej postaci rozkładu prawdopodobieństwa w zależności od ilości skoków dla dużej liczby fotonów (rozkład normalny/Gaussa)
4. przeliczenie liczby kroków k na czas $ct = kL_\gamma$
5. porównanie wyników

Oczekiwany wynik to:

$$D = \frac{1}{3} c \, L_\gamma$$

Dyfuzja fotonów: równanie dyfuzji

Równanie opisujące zachowanie energii ma postać:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \vec{F} = 0, \quad \vec{F} = -D\nabla\varepsilon$$

gdzie $\vec{F}$ to strumień energii. Łącząc powyższe dostajemy równanie dyfuzji:

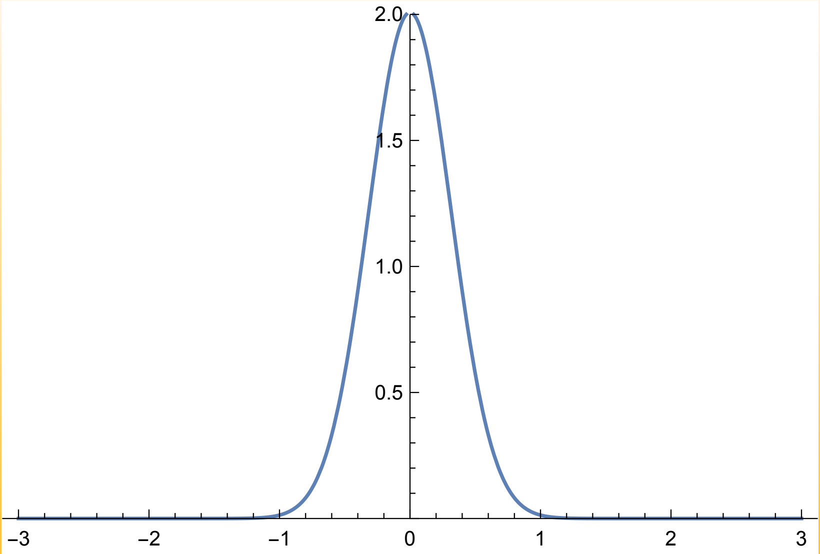
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = D\Delta\varepsilon$$

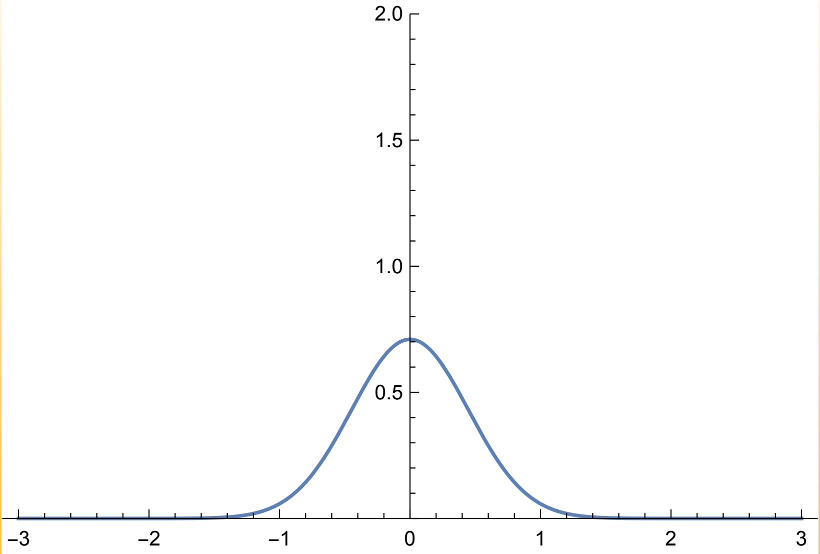
gdzie D to współczynnik dyfuzji, a $\Delta\varepsilon \equiv \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}$ to operator Laplace'a w 3D.

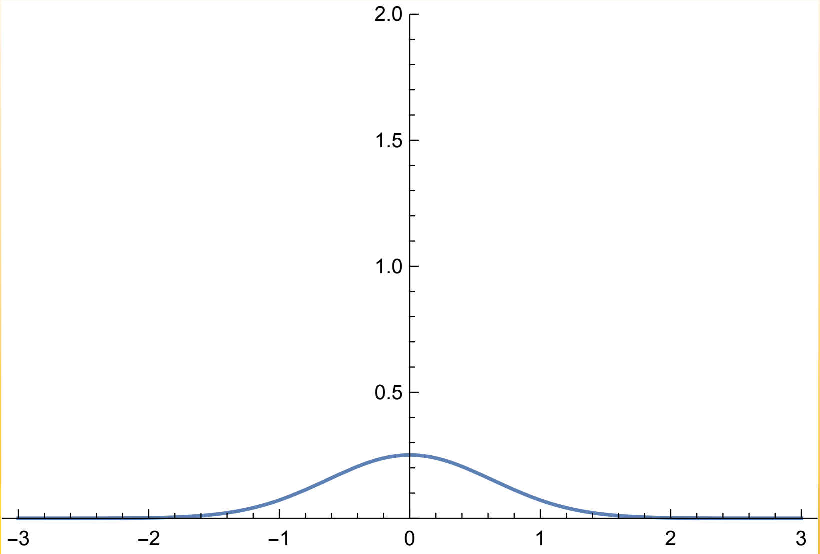
Funkcja Greena równania dyfuzji w N wymiarach:

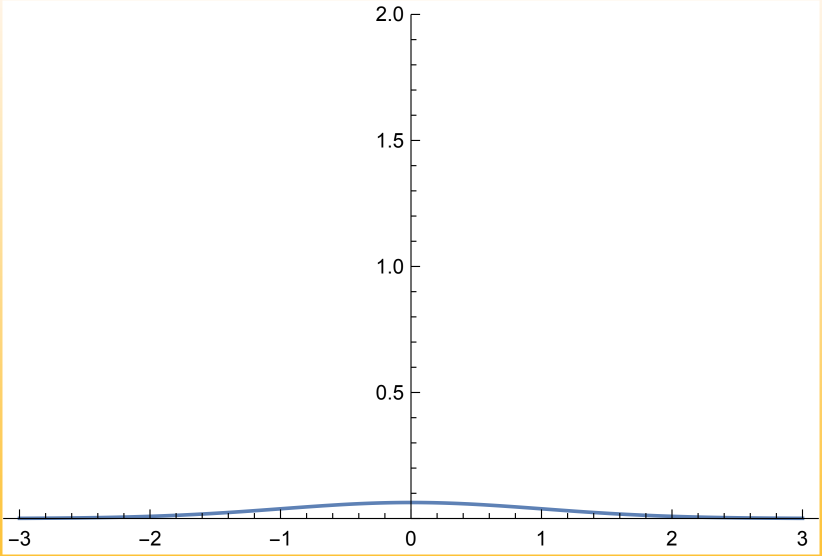
$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}^N}$$

opisuje „rozpływanie" się skoncentrowanej początkowo w $\vec{r} = \vec{0}$ energii.


2.0
1.5
1.0
0.5
−3
−2
−1
0
1
2
3


2.0
1.5
1.0
0.5
−3
−2
−1
0
1
2
3


2.0
1.5
1.0
0.5
–3
–2
–1
0
1
2
3


2.0
1.5
1.0
0.5
−3
−2
−1
0
1
2
3

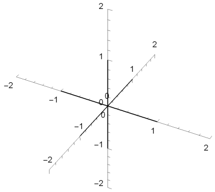
Dyfuzja fotonów: błądzenie przypadkowe

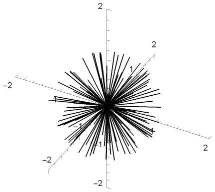
Zamiast dyfuzji, możemy rozważyć proces *błądzenia przypadkowego* fotonów, wykonujących skoki o średniej długości swobodnej L_γ w przypadkowych kierunkach.

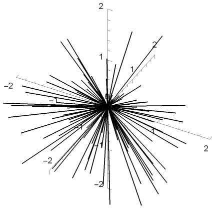
Aby powiązać dyskretny proces z ciągłym, zauważamy, że skok fotonu na odległość L_γ wymaga czasu Δt, gdzie:

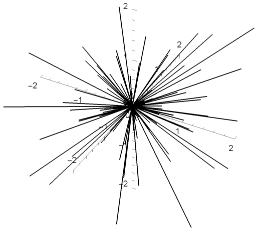
$$c\Delta t = L_\gamma,$$

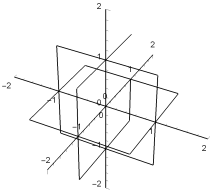
gdzie c to prędkość światła w próżni. Czyli po k-tym przeskoku w błądzeniu przypadkowym upływa czas $t = k\frac{L_\gamma}{c}$.

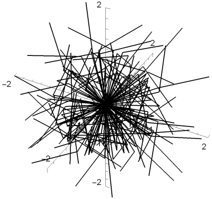


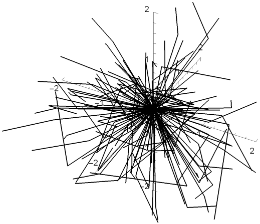


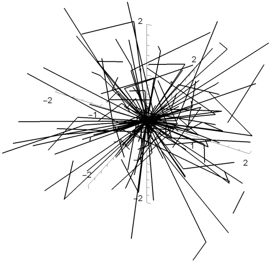


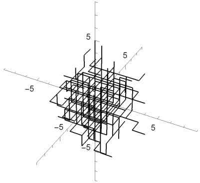
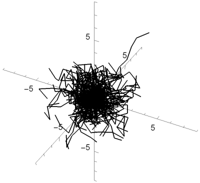
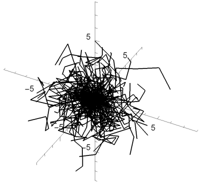
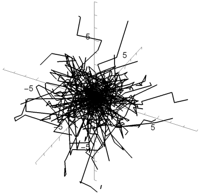


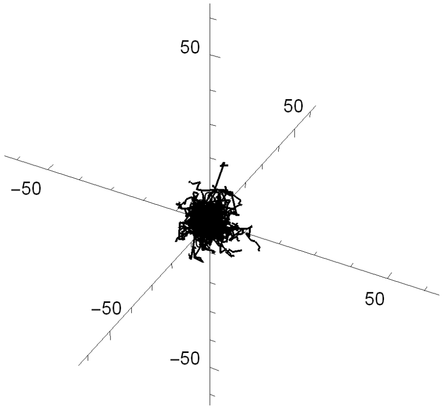

2
1
0
-1
-2

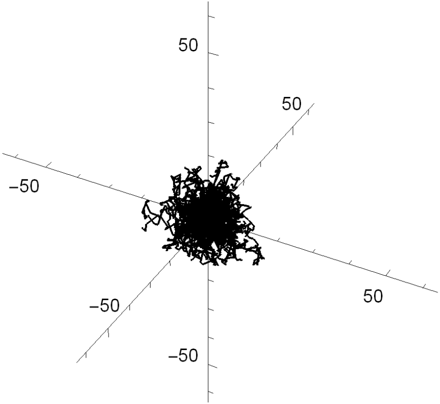

2
-2

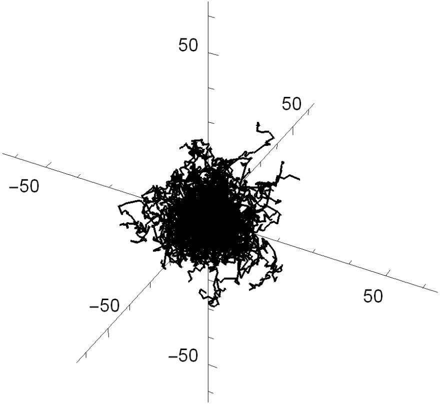

2
-2

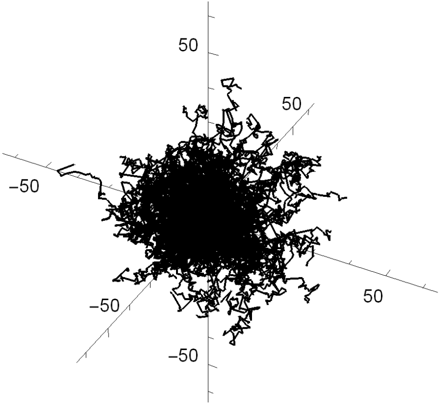

2
-2

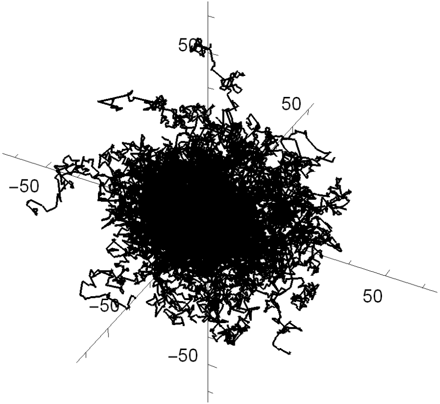

5
5
−5
−5
5
−5

5
5
−5
−5
5
−5

5
5
−5
−5
5
−5

5
5
−5
−5
5
−5

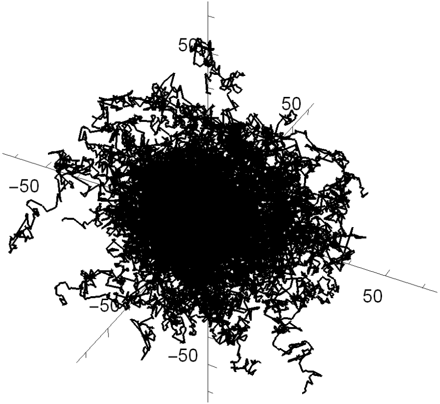

50
50
-50
-50
50
-50


50
50
-50
-50
50
-50


50
50
–50
–50
50
–50


50
50
-50
50
-50
-50


50
50
-50
50
-50
-50


50
50
−50
50
−50
−50

Dyfuzja fotonów: błądzenie przypadkowe

W teorii błądzenia przypadkowego dowodzi się, że prawdopodobieństwo przyjmuje w granicy postać rozkładu Gaussa. Przez porównanie, współczynnik dyfuzji D w 3 wymiarach to:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{6\Delta t} = \frac{1}{6} L_\gamma \frac{L_\gamma}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{6\Delta t} = \frac{1}{6} q \, c \, L_\gamma$$

gdzie $L_\gamma/\Delta t = c$ oraz:

$$\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle^2 + \sigma^2, \qquad q > 0.$$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa długości skoku to:

- średnia $\langle r \rangle = L_\gamma$
- wariancja σ

Jeżeli wariancja jest proporcjonalna do średniej długości swobodnej L_γ, to jej wpływ można zaabsorbować do współczynnika liczbowego q.

Współczynnik dyfuzji w błądzeniu przypadkowym

Przykłady o różnych rozkładach długości skoku (średnia zawsze wynosi L_γ):

- skoki o jednakowej długości:
  - $P(r) = \delta(r - L_\gamma)$,
  - $\langle r \rangle = L_\gamma$,
  - $\sigma = 0$,
  - $q = 1$
- skoki o długości od zera do $2L_\gamma$ i równomiernym rozkładzie:
  - $P(r) = \Theta(2L_\gamma - r)/(2L_\gamma)$,
  - $\langle r \rangle = L_\gamma$
  - $\sigma = L_\gamma/\sqrt{3}$,
  - $q = 4/3$
- rozkład wykładniczy („Poissona”)
  - $P(r) = e^{-r/L_\gamma}/L_\gamma$,
  - $\langle r \rangle = L_\gamma$,
  - $\sigma = L_\gamma$,
  - $q = 2$

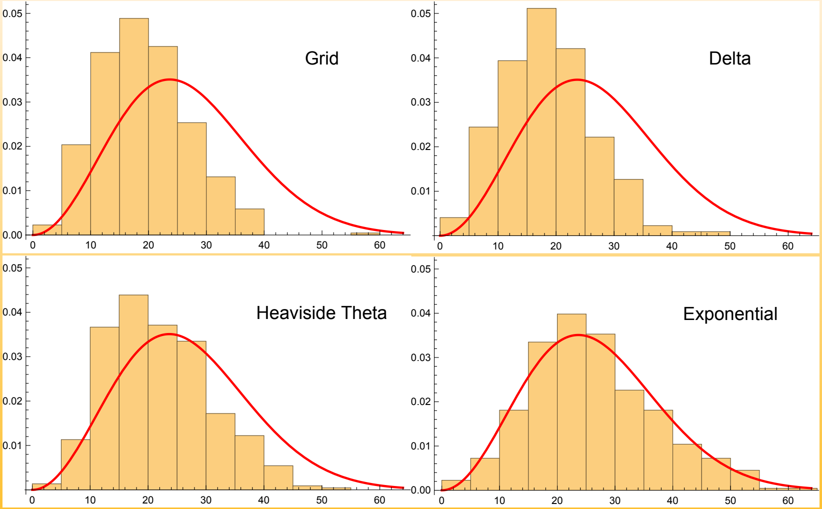
Współczynnik dyfuzji w błądzeniu przypadkowym (2)

Tylko dla rozkładu wykładniczego (eksponencjalnego) średnia i wariancja są sobie równe i wynoszą $\langle r \rangle = \sigma = L_\gamma$ co daje $q = 2$ i **podwojony** współczynnik dyfuzji:

$$D = \frac{1}{3}\, L_\gamma\, c$$

Inne, poprawne wyprowadzenie powyższego wzoru polega na przybliżaniu równania transportu promieniowania.

Dyfuzja fotonów: błądzenie przypadkowe vs dyfuzja



Przekrój czynny a średnia droga swobodna

Porównanie równania dyfuzji z błądzeniem przypadkowym pozwala nam jednoznacznie powiązać makroskopowy proces dyfuzji energii promienistej, opisany współczynnikiem dyfuzji D, z mikroskopowym procesem oddziaływania fotonów z materią, opisanym średnią drogą swobodną L_γ.

Strumień energii

$$F_\gamma = -D \frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4}{3} a c L_\gamma T^3 \frac{dT}{dr}, \quad D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Standardowo prawdopodobieństwo oddziaływania „fotonu” z tarczą opisujemy za pomocą *przekroju czynnego*:

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma n}$$

gdzie: n - gęstość „atomów” tarczy, σ - całkowity przekrój czynny na oddziaływanie (zderzenie, absorpcja).

Przekrój czynny: przykład

Obliczanie przekrojów czynnych to standardowe zadanie fizyki cząstek elementarnych, jądrowej i atomowej.
W gwiazdach istotne są następujące procesy z udziałem fotonów:

1. rozpraszanie na swobodnych elektronach, (przekrój czynny Thomsona):

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} \simeq 6.65 \times 10^{-29} m^2$$

2. procesy atomowe: przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi lub/i stanami swobodnymi

$$\sigma = \sigma(E_\gamma)$$

Średnia nieprzeźroczystość Rosselanda

Średnią długość swobodną można wyrazić także za pomocą *nieprzeźroczystości* κ i gęstości ρ:

$$L_\gamma = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

W praktyce używa się średniej harmonicznej ważonej **pochodną temperaturową rozkładu Plancka**:

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^\infty \frac{\partial B(x)}{\partial T} \frac{dx}{\sum_i \kappa_i(x)}, \qquad x = \frac{h\nu}{kT}$$

gdzie:

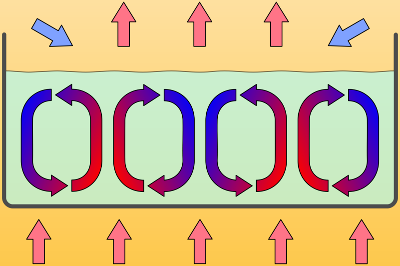
$$\frac{\partial B(x)}{\partial T} = \frac{15}{\pi^4} \frac{4}{\sinh^2(x/2)}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe procesy, atomy i ich stany zjonizowane.

Transport energii: konwekcja

Konwekcja

Jeżeli tempo produkcji energii jest duże, a procesy przewodnictwa ciepła nie nadążają z jej odprowadzaniem, tworzą się warunki prowadzące do niestabilności hydrodynamicznych. Najważniejszy przykład to *konwekcja*.



Konwekcja w 2D (YouTube)

Wyprowadzenie warunku konwekcji

- rozważamy bąbel gazu, który **adiabatycznie** (bez wymiany ciepła z otoczeniem) przemieszcza się o Δr w górę:

$$P = K\rho^{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}} = \gamma \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- na tym samym odcinku Δr gęstość gazu doskonałego w gwieździe zmieni się jak:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{*} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{*} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{*}$$

- zakładamy, że ciśnienie w bąblu wyrównało się z ciśnieniem w gwieździe:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{*} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}}$$

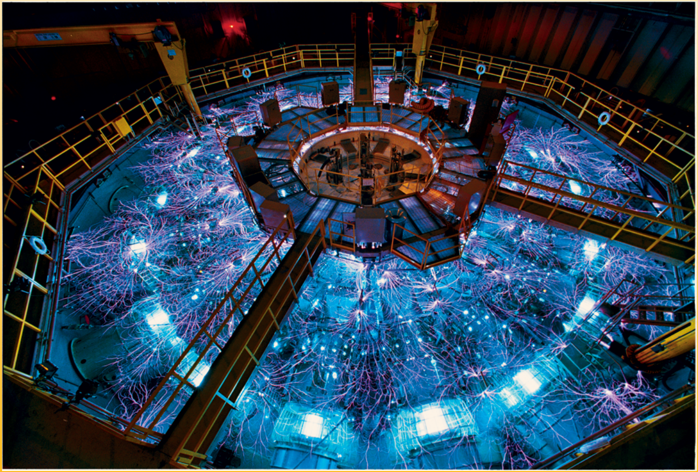
- jeżeli gęstość wewnątrz bąbla spada szybciej niż gęstość w gwieździe, to zaczyna on się unosić jak balon na gorące powietrze:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{*} \rightarrow \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{P} - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{*} \rightarrow \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

OPAL

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL http://opalopacity.llnl.gov/, i jego kontynuacje, np: http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html



OPAL

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL http://opalopacity.llnl.gov/, i jego kontynuacje, np: http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html

Prawie kompletny układ równań struktury gwiazdy

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F = -D\frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \ldots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$ – masa zawarta w kuli o promieniu r
- $P(r), \rho(r)$ – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$ – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia $L(r) = L_\odot$ produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w $r = 0$.

Model punktowy (Cowlinga)

- formalnie równanie na profil temperatury można rozwiązać osobno (jeżeli założymy, że $D = const$) zaczynając od powierzchni nie wnikając skąd wzięła się energia:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2} = -D\frac{d(aT^4)}{dr}, \quad T(R_\odot) = T_\odot$$

- w takim modelu $T \to \infty$ dla $r \to 0$ a cała energia pochodzi z punktu $r = 0$,
- w praktyce zakłada się, że energia wychodzi z małego, skończonego obszaru: konwektywnego jądra

Średnia droga swobodna fotonu w modelu Eddingtona

W modelu Eddingtona gęstość energii gazu fotonowego to:

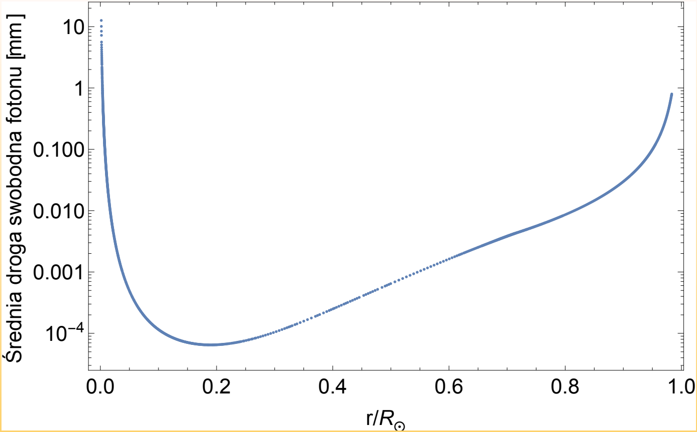
$$aT^4 = 3P_{\mathrm{rad}} = 3\beta P$$

Po wstawieniu do równań:

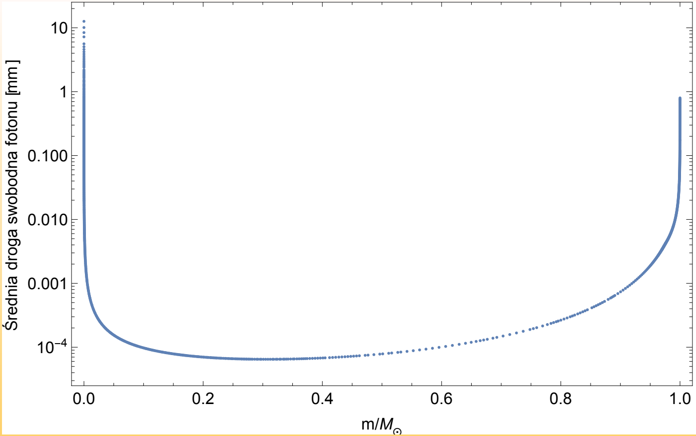
$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3} L_\gamma c \frac{d(aT^4)}{dr} \end{cases}$$

dostajemy specjalną postać drogi swobodnej:

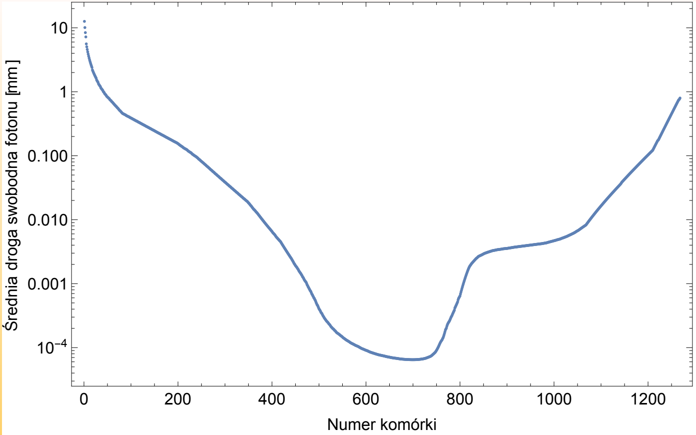
$$L_\gamma = \frac{L_\odot}{4\pi Gc\beta\ m\rho}$$



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

Źródło energii gwiazdy

Dotąd konsekwentnie omijaliśmy pytanie: *gdzie gwiazda produkuje energię niezbędną do świecenia?*
Strumień energii L wypływający przez sferę o promieniu r musi być równy całce z objętościowego tempa produkcji energii ε:

$$L(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 \, dr \rightarrow \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Równanie to przyjmuje jeszcze prostszą postać, gdy zamiast r użyjemy masy m zawartej w kuli o promieniu r jako zmiennej radialnej:

$$\frac{dL(r)}{dm} = \varepsilon/\rho = \epsilon$$

gdzie ϵ jest tempem produkcji energii na jednostkę masy.

Kompletny układ równań

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{cases}$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ, temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i:

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$ lub $P(r)$, $m(r)$, $T(r)$ oraz $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_\odot) = M_\odot \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_\odot) = \rho(R_\odot) = 0 \\ T(R_\odot) = T_\odot \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu *„wpisz w Mathematicę i użyj* ***NDSolve***”

Synteza termojądrowa

Współczesny model gwiazdy domyka obliczenie tempa produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej i powiązanej z nimi produkcji neutrin.

- co do zasady wzór $E = mc^2$ dobrze wyjaśnia źródło energii
- cztery atomy wodoru przekształcają się w atom helu
- masa atomu helu/cząstki α jest mniejsza niż masa 4 atomów wodoru/protonów
- różnica masy $(4m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{He}})c^2$ przekształcana jest na fotony γ i neutrina elektronowe ν_e
- neutrina z prędkością światła uciekają od razu, dlatego odejmuje się je od tempa produkcji energii (dla Słońca jest to 2%, ale dla presupernowej praktycznie 100%)

Chcesz wiedzieć więcej?

Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08