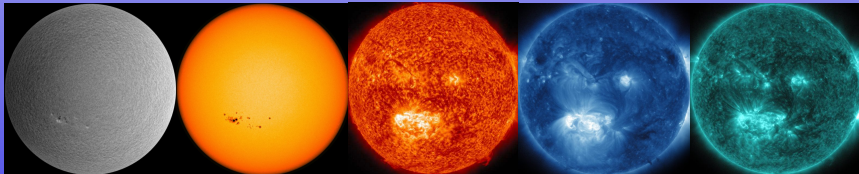


# Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

21 kwietnia 2015



# Transport energii

Zgodnie z prawami termodynamiki energia (ciepło) przepływa od obszarów o temperaturze wyższej do obszarów o temperaturze niższej. Strumień energii  $F$  jest proporcjonalny do różnicy temperatur  $T$ :

$$F \propto - \frac{dT}{dr}$$

- w typowych sytuacjach astrofizycznych temperatura spada w miarę oddalania się od centrum.
- powyższe nie jest prawem, istnieją wyjątki, np: zdegenerowane jądro chłodzone neutrinowo + spalanie w warstwie sferycznej (ang. *shell burning*)
- współczynnik proporcjonalności jest funkcją zależną od składu „chemicznego” materii  $X_i$ , temperatury, gęstości, ciśnienia i zjawisk odpowiedzialnych za przepływ energii
- najważniejsze procesy odpowiedzialne za przepływ energii to:
  - 1 transport promienisty
  - 2 konwekcja
  - 3 przewodnictwo cieplne

# Transport promieniowania

Pod pojęciem promieniowania rozumiemy cząstki „bezmasowe”, poruszające się z prędkością światła  $c$ :

- 1 fotony  $\gamma$  (przede wszystkim)
- 2 neutrino  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$  (w ekstremalnych sytuacjach: supernowe typu implozyjnego, protogwiazdy neutronowe, dyski akrecyjne wokół czarnych dziur)

Pełny opis promieniowania wymaga podania w każdym punkcie gwiazdy  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  rozkładu prawdopodobieństwa  $f$  kątów pod jakimi poruszają się fotony i rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów. Daje to w sumie sześć zmiennych, a obliczenia uwzględniające je wszystkie określamy jako *symulacje 6D*. Konieczne jest rozwiązanie równania transportu Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{reakcje z fotonami}$$

W praktyce często możliwe jest drastyczne uproszczenie powyższego opisu.

# Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)

Warunki panujące wewnątrz Słońca:

- 1 średnia droga swobodna fotonu  $L_\gamma \sim 2$  cm, wynikająca głównie z rozpraszania na swobodnych elektronach pochodzących ze zjonizowanego wodoru
- 2 średni spadek temperatury na drodze od centrum  $T_c \simeq 10^7$  K do powierzchni  $T \simeq 5800$  K:

$$\frac{T_c - T_\odot}{R_\odot} \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$$

Wnioski są następujące:

- 1 układ jest niemal w równowadze termicznej
- 2 promieniowanie ciała doskonale czarnego (gaz fotonowy) jest poprawnym opisem rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów
- 3 strumień energii emitowany na zewnątrz i do wewnątrz w odległości  $L_\gamma$  kasuje się z dokładnością około  $\sigma \Delta T^4 \sim 10^{-10}$

# Transport promieniowania w przybliżeniu LTE

W stanie LTE (Local Thermodynamic Equilibrium) transport fotonów można rozpatrywać przynajmniej z dwóch punktów widzenia:

- 1 jako proces dyfuzji gazu fotonowego pomiędzy rejonami o różnej gęstości fotonów
- 2 jako proces błędzenia przypadkowego fotonu

Pierwszy z opisów jest wygodniejszy z punktu widzenia równań struktury i ewolucji gwiazdy, drugi jest bardziej ilustratywny i pozwala powiązać makroskopowy współczynnik dyfuzji z mikroskopowymi procesami oddziaływania fotonów z materią (przekrojami czynnymi).

## Rozkład Bosego-Einsteina

W równowadze termodynamicznej, prawdopodobieństwo znalezienia fotonu (bezmasowego bozonu o spinie 1) w stanie o energii  $E_\gamma$  jest opisane rozkładem Bosego-Einsteina:

$$f(E_\gamma) = \frac{g}{e^{\frac{E_\gamma}{kT}} - 1}$$

gdzie czynnik  $g = 2$  pochodzi od 2 stanów polaryzacyjnych fotonu,  $kT$  - energia termiczna wyrażona jako iloczyn stałej Boltzmanna  $k$  i temperatury w skali bezwzględnej  $T$ .

Całkowita ilość  $N$  fotonów w objętości  $V$  wynosi ( $E_\gamma = h\nu = \hbar\omega = pc$ ):

$$n \equiv \frac{N}{V} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(E_\gamma) \frac{d^3p}{h^3} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{e^{pc/kT} - 1} = \frac{8\pi(kT)^3}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{e^z - 1}$$

Ostatnia całka wynosi  $2\zeta(3)$  co dalej niewiele nam nie mówi, chyba że znamy wartości funkcji  $\zeta$  Riemanna.

Analogicznie obliczamy gęstość energii:

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{V} = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4 \equiv a T^4$$

$$n \equiv \frac{N}{V} = \frac{16\pi\zeta(3)k^3}{h^3 c^3} T^3$$

Dzieląc  $\varepsilon$  przez  $n$  otrzymujemy średnią energię fotonu:

$$\langle E_\gamma \rangle = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} kT \simeq 2.7kT.$$

Ciśnienie można obliczyć z potencjału termodynamicznego  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}\Omega(V, T) &= -pV = kT V \iiint_{-\infty}^{\infty} \ln \left( 1 - e^{-E_\gamma/(kT)} \right) \frac{d^3 p}{h^3} = \\ &= kT \frac{4\pi V}{h^3} g \int_0^{\infty} p^2 \ln \left( 1 - e^{-\frac{pc}{kT}} \right) dp\end{aligned}$$

Po obliczeniu całki dostajemy równanie stanu gazu fotonowego:

$$p = \frac{\varepsilon}{3}$$

Celem kolejnych rachunków jest wyprowadzenie związku pomiędzy współczynnikiem dyfuzji  $D$  energii gazu fotonowego a średnią drogą swobodną w procesie błędzenia przypadkowego fotonu.

Kolejno przedstawiane kroki rozumowania to:

- 1 analityczne rozwiązanie równania dyfuzji o współczynniku  $D$  w przypadku „fotonów” początkowo skoncentrowanych w  $\vec{r} = 0$  (rozptywający się pik gaussowski)
- 2 numeryczne zasymulowanie procesu błędzenia fotonów ze średnią drogą swobodną  $L_\gamma$  zaczynając od  $\vec{r} = 0$
- 3 wywnioskowanie analitycznej postaci rozkładu prawdopodobieństwa w zależności od ilości skoków dla dużej liczby fotonów (rozkład normalny/Gausa)
- 4 przeliczenie liczby kroków  $k$  na czas  $ct = kL_\gamma$
- 5 porównanie wyników

Oczekiwany wynik to:

$$D = \frac{1}{3} c L_\gamma$$



# Dyfuzja fotonów: równanie dyfuzji

Równanie opisujące zachowanie energii ma postać:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \vec{F} = 0, \quad \vec{F} = -D \nabla \varepsilon$$

gdzie  $\vec{F}$  to strumień energii. Łącząc powyższe dostajemy równanie dyfuzji:

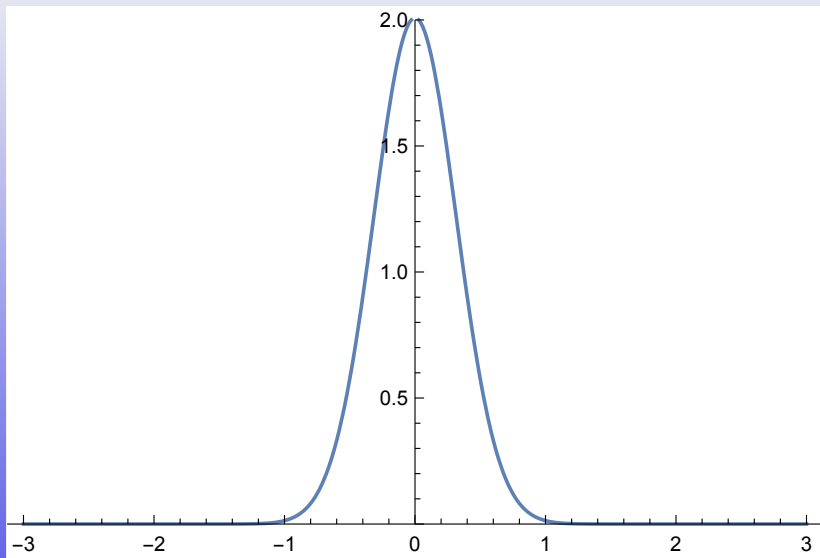
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = D \Delta \varepsilon$$

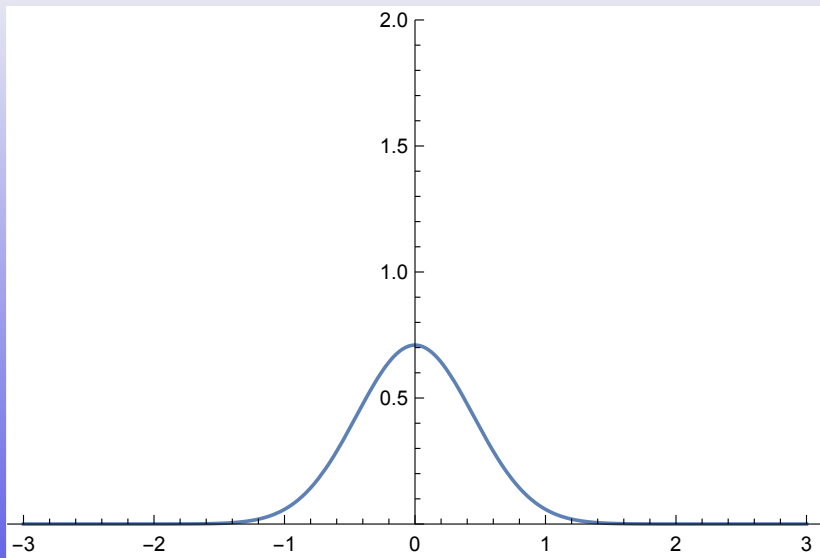
gdzie  $D$  to współczynnik dyfuzji, a  $\Delta \varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$  to operator Laplace'a w 3D.

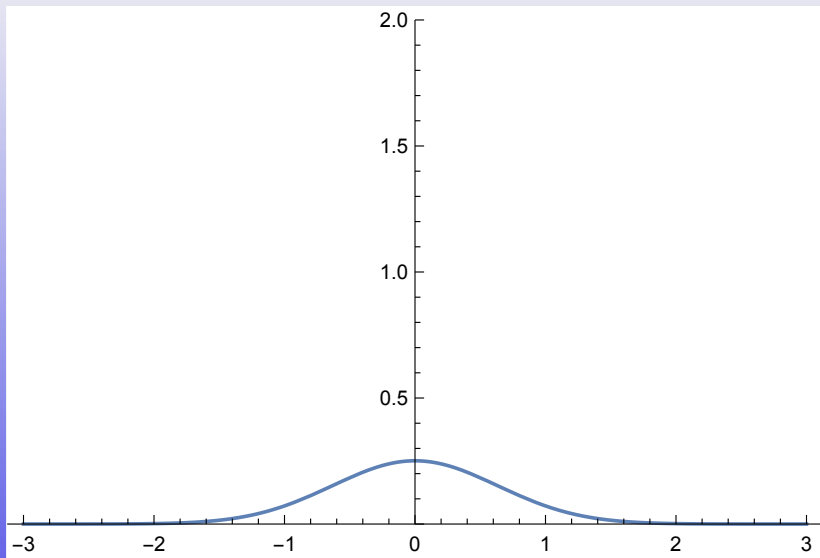
Funkcja Greena równania dyfuzji w  $N$  wymiarach:

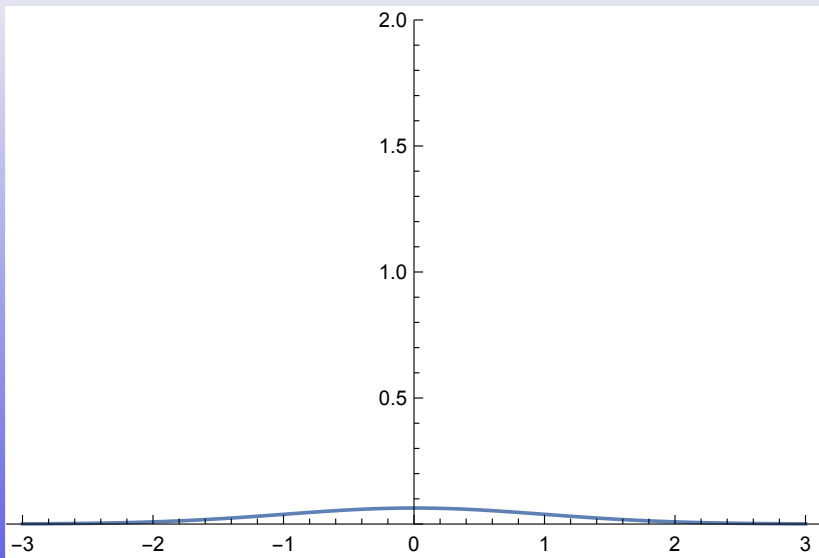
$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}^N}$$

opisuje „rozptywanie” się skoncentrowanej początkowo w  $\vec{r} = \vec{0}$  energii.









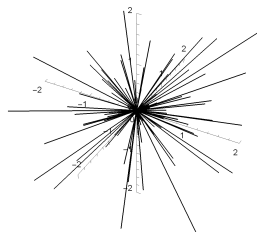
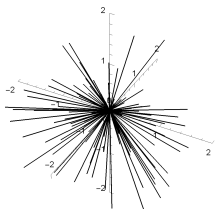
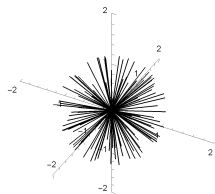
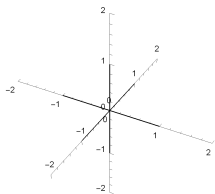
# Dyfuzja fotonów: błądzenie przypadkowe

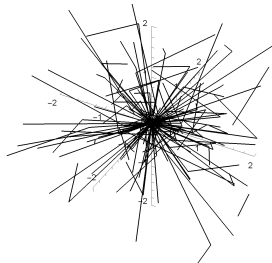
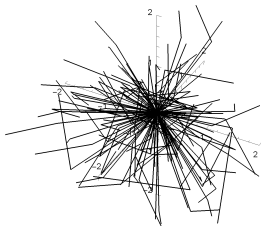
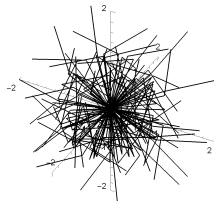
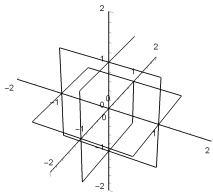
Zamiast dyfuzji, możemy rozważyć proces *błądzenia przypadkowego* fotonów, wykonujących skoki o średniej długości swobodnej  $L_\gamma$  w przypadkowych kierunkach.

Aby powiązać dyskretny proces z ciągłym, zauważamy, że skok fotonu na odległość  $L_\gamma$  wymaga czasu  $\Delta t$ , gdzie:

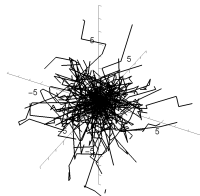
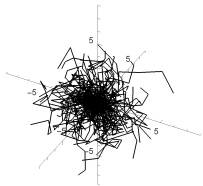
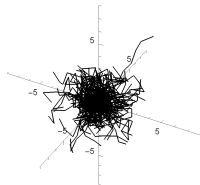
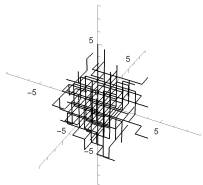
$$c\Delta t = L_\gamma,$$

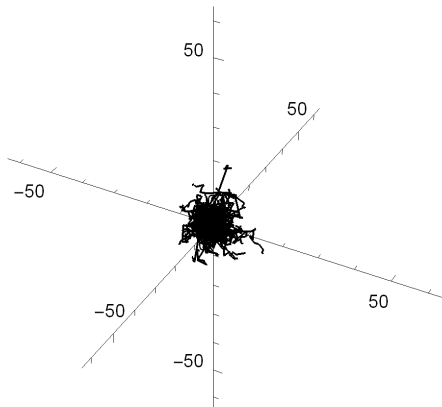
gdzie  $c$  to prędkość światła w próżni. Czyli po  $k$ -tym przeskoku w błądzeniu przypadkowym upływa czas  $t = k \frac{L_\gamma}{c}$ .

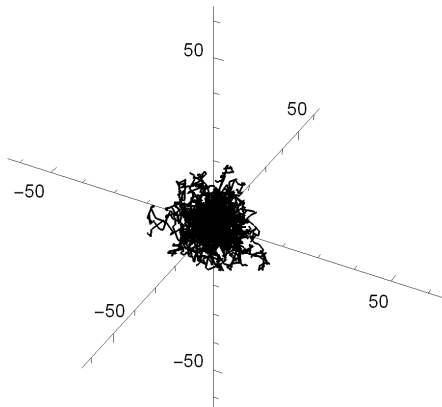


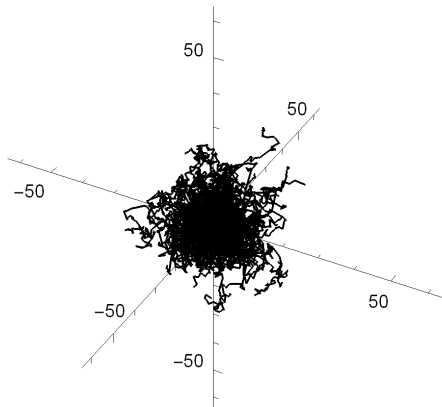


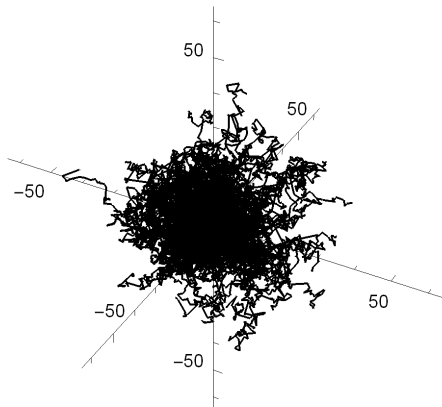


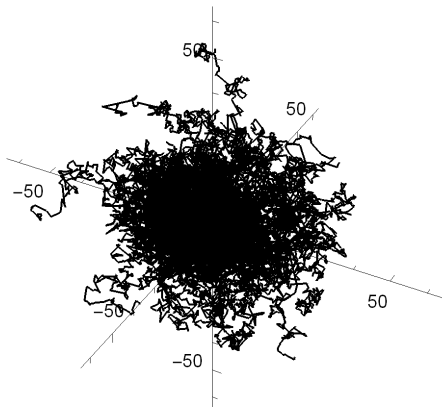


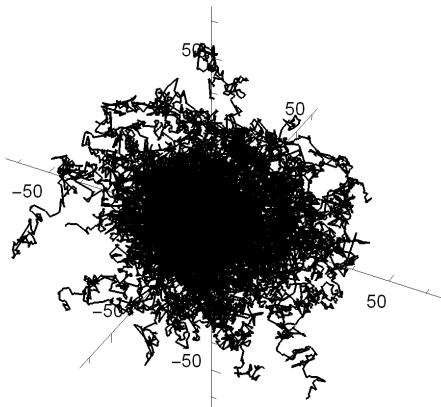












# Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe

W teorii błędzenia przypadkowego dowodzi się, że prawdopodobieństwo przyjmuje w granicy postać rozkładu Gaussa. Przez porównanie, współczynnik dyfuzji  $D$  w 3 wymiarach to:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{6\Delta t} = \frac{1}{6} L_\gamma \frac{L_\gamma}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{6\Delta t} = \frac{1}{6} q c L_\gamma$$

gdzie  $L_\gamma/\Delta = c$  oraz:

$$\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle^2 + \sigma^2, \quad q > 0.$$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa długości skoku to:

- średnia  $\langle r \rangle = L_\gamma$
- wariancja  $\sigma$

Jeżeli wariancja jest proporcjonalna do średniej długości swobodnej  $L_\gamma$ , to jej wpływ można zaabsorbować do współczynnika liczbowego  $q$ .



Przykłady o różnych rozkładach długości skoku (średnia zawsze wynosi  $L_\gamma$ ):

- skoki o jednakowej długości:
  - $P(r) = \delta(r - L_\gamma)$ ,
  - $\langle r \rangle = L_\gamma$ ,
  - $\sigma = 0$ ,
  - $q = 1$
- skoki o długości od zera do  $2L_\gamma$  i równomiernym rozkładzie:
  - $P(r) = \Theta(2L_\gamma - r)/(2L_\gamma)$ ,
  - $\langle r \rangle = L_\gamma$
  - $\sigma = L_\gamma/\sqrt{3}$ ,
  - $q = 4/3$
- rozkład wykładniczy („Poissona”)
  - $P(r) = e^{-r/L_\gamma}/L_\gamma$ ,
  - $\langle r \rangle = L_\gamma$ ,
  - $\sigma = L_\gamma$ ,
  - $q = 2$

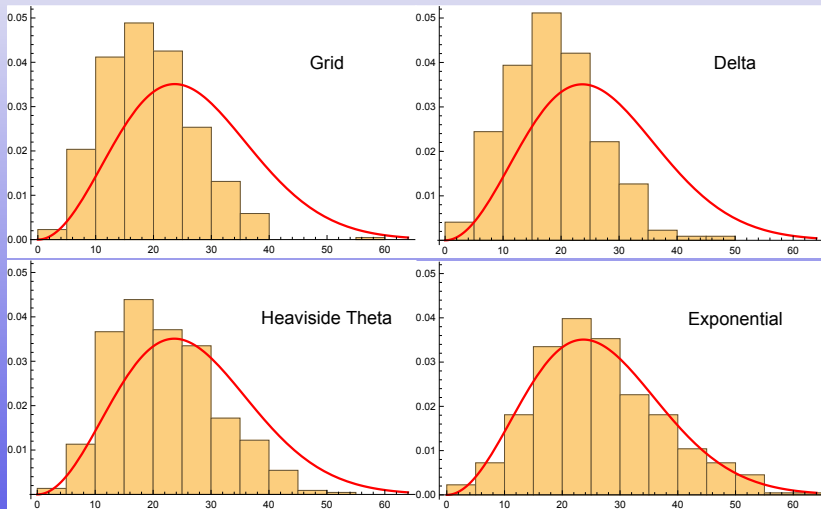
# Współczynnik dyfuzji w błędzeniu przypadkowym (2)

Tylko dla rozkładu wykładniczego (eksponencjalnego) średnia i wariancja są sobie równe i wynoszą  $\langle r \rangle = \sigma = L_\gamma$  co daje  $q = 2$  i **podwojony** współczynnik dyfuzji:

$$D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Inne, poprawne wyprowadzenie powyższego wzoru polega na przybliżeniu równania transportu promieniowania.

# Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe vs dyfuzja



# Przekrój czynny a średnia droga swobodna

Porównanie równania dyfuzji z błędzeniem przypadkowym pozwala nam jednoznacznie powiązać makroskopowy proces dyfuzji energii promienistej, opisany współczynnikiem dyfuzji  $D$ , z mikroskopowym procesem oddziaływania fotonów z materią, opisanym średnią drogą swobodną  $L_\gamma$ .

## Strumień energii

$$F_\gamma = -D \frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4}{3}acL_\gamma T^3 \frac{dT}{dr}, \quad D = \frac{1}{3}L_\gamma c$$

Standardowo prawdopodobieństwo oddziaływania „fotonu” z tarczą opisujemy za pomocą *przekroju czynnego*:

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma n}$$

gdzie:  $n$  - gęstość „atomów” tarczy,  $\sigma$  - całkowity przekrój czynny na oddziaływanie (zderzenie, absorpcja).

# Przekrój czynny: przykład

Obliczanie przekrojów czynnych to standardowe zadanie fizyki cząstek elementarnych, jądrowej i atomowej.

W Słońcu istotne są następujące procesy z udziałem fotonów:

- 1 rozpraszanie na swobodnych elektronach, (przekrój czynny Thomsona):

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} \simeq 6.65 \times 10^{-29} m^2$$

- 2 procesy atomowe: przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi lub/i stanami swobodnymi

$$\sigma = \sigma(E_\gamma)$$

# Średnia nieprzeźroczystość Rosselanda

Średnią długość swobodną można wyrazić także za pomocą *nieprzeźroczystości*  $\kappa$  i gęstości  $\rho$ :

$$L_{\gamma} = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

W praktyce używa się średniej harmoniczej ważonej **pochodną temperaturową rozkładu Plancka**:

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^{\infty} \frac{\partial B(x)}{\partial T} \frac{dx}{\sum_j \kappa_j(x)}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

gdzie:

$$\frac{\partial B(x)}{\partial T} = \frac{15}{\pi^4} \frac{4}{\sinh^2(x/2)}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe procesy, atomy i ich stany zjonizowane.

# Jonizacja i skład materii

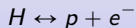
Znajomość wszystkich procesów atomowych pozwala na obliczenie nieprzeźroczystości materii o znanym składzie chemicznym i stopniu jonizacji.

W astrofizyce atomy dzielimy typowo na:

- wodór  $X$
- hel  $Y$
- „metale”  $Z$ , czyli wszystko co w tablicy Mendelejewa znajduje się dalej niż helem

Dla centrum Słońca (obecnie!):  $X = 0.34$ ,  $Y = 0.64$ ,  $Z = 0.02$ . Zawartość „metali” jest niewielka, ale ma kluczowy wpływ na nieprzeźroczystość.

Rozważmy rozpad atomu wodoru na proton i elektron:



W równowadze, potencjały chemiczne muszą spełniać:

$$\mu_H = \mu_p + \mu_{e^-}$$

Dla klasycznej granicy relatywistycznego kwantowego gazu doskonałego (Bosego/Fermiego-Diraca):

$$\frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} \rightarrow e^{-(mc^2+E')/kT} e^{\mu/kT}$$

potencjał chemiczny wynosi:

$$\mu = mc^2 + kT \ln \left( \frac{n}{g} \lambda^3 \right)$$

gdzie  $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$  to *termiczna długość fali de Broglie'a*.

Wstawiając wzór na  $\mu$  do równania równowagi otrzymujemy równanie Saha:

$$\frac{n_p n_{e^-}}{n_H} = \frac{g_p g_{e^-}}{g_H} \frac{1}{\lambda_e^3} e^{-\frac{Q}{kT}}$$

gdzie energia wiązania/ionizacji  $Q = (m_H - m_p - m_{e^-}) c^2$ .



# Równanie jonizacji: przykład rozwiązania

Z zasady zachowania ładunku (przy braku obecności innych jąder atomowych!) możemy podstawić  $n_e = n_p$ . Sumaryczna gęstość  $n_p + n_H = \rho/m_H$ , co daje prosty algebraiczny układ równań do rozwiązania:

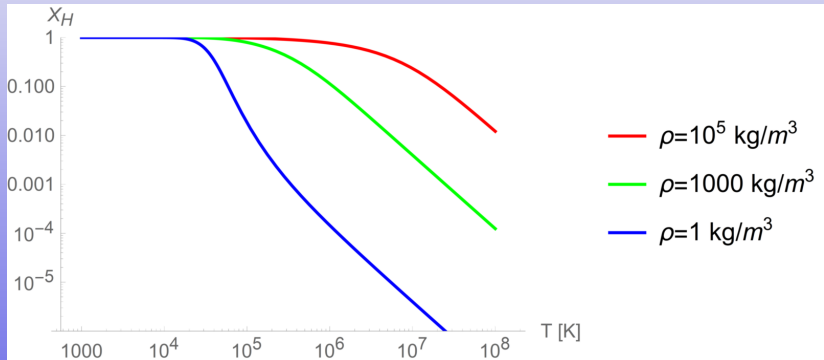
$$\begin{cases} \frac{n_p^2}{n_H} = \frac{2h^3}{\sqrt{2\pi m_e kT}^3} e^{\frac{E_0}{kT}} \\ n_p + n_H = \rho/m_H \end{cases}$$

gdzie  $E_0 = -13.6 \text{ eV} = eE_0 \text{ J}$  ( $e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  - ładunek elektronu) to energia jonizacji/wiązania atomu wodoru.

Wprowadzając zawartość protonów  $X_p \equiv n_p/n$  oraz atomów wodoru  $X_H = n_H/n$  problem można sprowadzić do równania kwadratowego:

$$\frac{X_p^2}{1 - X_p} = f(\rho, T), \quad f \propto \frac{T^{3/2} e^{-E_0/(kT)}}{\rho}$$

# Równanie jonizacji: przykład rozwiązania

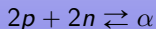


Atomy wodoru „styka $\acute$ ją si $\acute$ e” ju $\acute$ z dla  $\rho > 1600 \text{ kg/m}^3$ .

# Uniwersalność równania Saha

Istotne jest podkreślenie, iż równanie Saha może być stosowane w różnych sytuacjach astrofizycznych, i nie tylko:

- nuklearna równowaga statystyczna (NSE, Nuclear Statistical Equilibrium), np: reakcja typu „dysocjacji” cząstek  $\alpha$  (jąder atomu helu  ${}^4\text{He}$ ) na protony i neutrony:

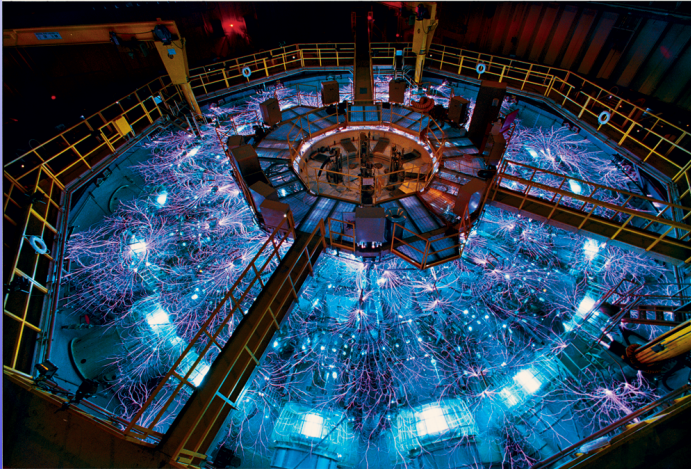


- dysocjacja dwuatomowych molekuł, np: wodoru cząsteczkowego:



W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL <http://opalopacity.lnl.gov/>, i jego kontynuacje, np: <http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>

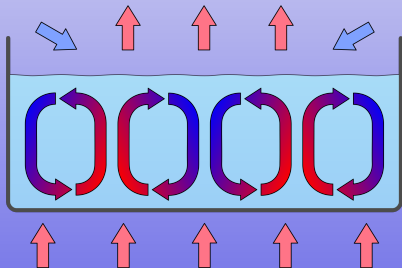


W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL <http://opalopacity.llnl.gov/>, i jego kontynuacje, np: <http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>



Jeżeli tempo produkcji energii jest duże, a procesy przewodnictwa ciepła nie nadążają z jej odprowadzaniem, tworzą się warunki prowadzące do niestabilności hydrodynamicznych. Najważniejszy przykład to *konwekcja*.



Konwekcja w 2D (YouTube)

# Wyprowadzenie warunku konwekcji

- rozważamy bąbel gazu, który **adiabaticznie** (bez wymiany ciepła z otoczeniem) przemieszcza się o  $\Delta r$  w górę:

$$P = K\rho^\gamma \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{ad}} = \gamma \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\text{ad}}$$

- na tym samym odcinku  $\Delta r$  gęstość gazu doskonałego w gwiazdzie zmieni się jak:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_* = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_* + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_*$$

- zakładamy, że ciśnienie w bąblu wyrównało się z ciśnieniem w gwiazdzie:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_* = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{ad}}$$

- jeżeli gęstość wewnątrz bąbla spada szybciej niż gęstość w gwiazdzie, to zaczyna on się unosić jak balon na gorące powietrze:

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\text{ad}} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_* \rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{P} - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_* \rightarrow \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

# Prawie kompletny układ równań struktury gwiazdy

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F = -D \frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \dots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$  – masa zawarta w kuli o promieniu  $r$
- $P(r), \rho(r)$  – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$  – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$  – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia  $L(r) = L_{\odot}$  produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w  $r = 0$ .