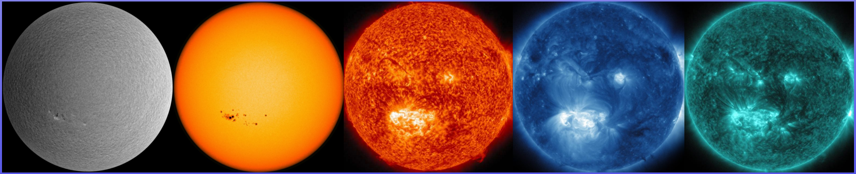
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

21 kwietnia 2015



Jonizacja i skład materii

Znajomość wszystkich procesów atomowych pozwala na obliczenie nieprzeźroczystości materii o znanym składzie chemicznym i stopniu jonizacji.

W astrofizyce atomy dzielimy typowo na:

- wodór X
- hel Y
- „metale” Z, czyli wszystko co w tablicy Mendelejewa znajduje się dalej niż helem

Dla centrum Słońca (obecnie!): $X = 0.34, Y = 0.64, Z = 0.02$.

Zawartość „metali” jest niewielka, ale ma kluczowy wpływ na nieprzeźroczystość.

Jonizacja

Rozważmy rozpad atomu wodoru na proton i elektron:

$$H \leftrightarrow p + e^{-}$$

W równowadze, potencjały chemiczne muszą spełniać:

$$\mu_H = \mu_p + \mu_{e^-}$$

Dla klasycznego gazu doskonałego:

$$\mu = mc^2 + kT \ln\left(\frac{n}{g}\lambda^3\right)$$

gdzie $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ to *termiczna długość fali de Broglie'a*. Wstawiając wzór na μ do równania równowagi otrzymujemy równanie Saha:

$$\frac{n_p n_{e^-}}{n_H} = \frac{g_p g_{e^-}}{g_H} \frac{1}{\lambda_e^3} e^{-\frac{Q}{kT}}$$

gdzie energia wiązania/jonizacji $Q = (m_H - m_p - m_{e^-})\, c^2$.

Równanie jonizacji: przykład rozwiązania

Z zasady zachowania ładunku (przy braku obecności innych jąder atomowych!) możemy podstawić $n_e = n_p$. Sumaryczna gęstość $n_p + n_H = \rho/m_H$, co daje prosty algebraiczny układ równań do rozwiązania:

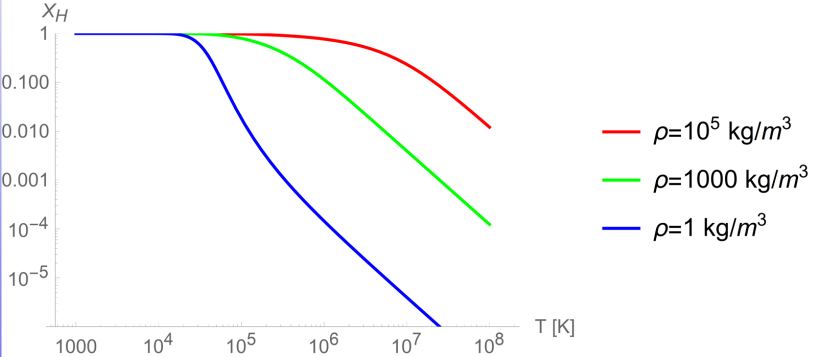
$$\begin{cases} \frac{n_p^2}{n_H} = \frac{2h^3}{\sqrt{2\pi m_e kT}^3} e^{\frac{E_0}{kT}} \\ n_p + n_H = \rho/m_H \end{cases}$$

gdzie $E_0 = -13.6$ eV$= eE_0$ J ($e \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C - ładunek elektronu) to energia jonizacji/wiązania atomu wodoru.

Wprowadzając *zawartość* protonów $X_p \equiv n_p/n$ oraz atomów wodoru $X_H = n_H/n$ problem można sprowadzić do równania kwadratowego:

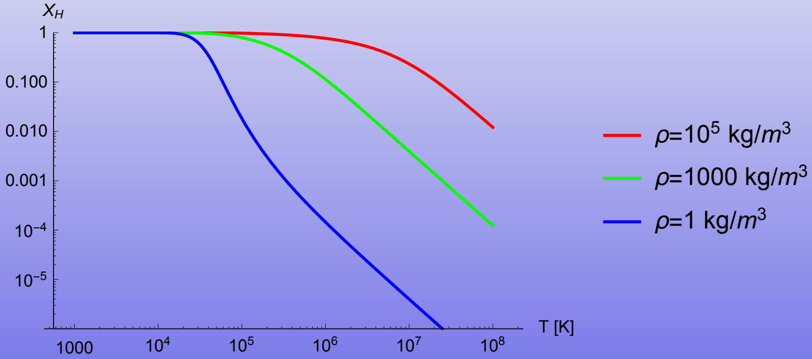
$$\frac{X_p^2}{1 - X_p} = f(\rho, T), \qquad f \propto \frac{T^{3/2} e^{-E_0/(kT)}}{\rho}$$

Równanie jonizacji: przykład rozwiązania



Atomy wodoru „stykają się" już dla $\rho > 1600 kg/m^3$.

Równanie jonizacji: przykład rozwiązania



Atomy wodoru „stykają się” już dla $\rho > 1600 kg/m^3$.

Uniwersalność równania Saha

Istotne jest podkreślenie, iż równanie Saha może być stosowane w różnych sytuacjach astrofizycznych, i nie tylko:

- nuklearna równowaga statystyczna (NSE, Nuclear Statistical Equilibrium), np: reakcja typu „dysocjacji" cząstek α (jąder atomu helu ^{4}He) na protony i neutrony:

$$2p + 2n \rightleftarrows \alpha$$

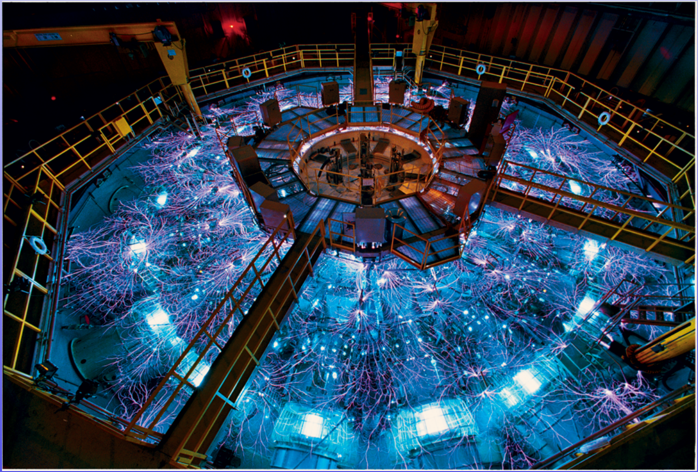
- dysocjacja dwuatomowych molekuł, np: wodoru cząsteczkowego:

$$H_2 \rightleftarrows 2H$$

OPAL

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL http://opalopacity.llnl.gov/, i jego kontynuacje, np: http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html



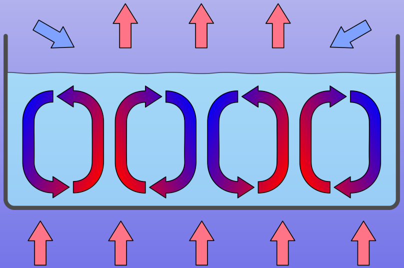
OPAL

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL http://opalopacity.llnl.gov/, i jego kontynuacje, np: http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html

Konwekcja

Jeżeli tempo produkcji energii jest duże, a procesy przewodnictwa ciepła nie nadążają z jej odprowadzaniem, tworzą się warunki prowadzące do niestabilności hydrodynamicznych. Najważniejszy przykład to *konwekcja*.



Konwekcja w 2D (YouTube)

Wyprowadzenie warunku konwekcji

- rozważamy bąbel gazu, który **adiabatycznie** (bez wymiany ciepła z otoczeniem) przemieszcza się o Δr w górę:

$$P = K\rho^{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}} = \gamma\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- na tym samym odcinku Δr gęstość gazu doskonałego w gwieździe zmieni się jak:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{*} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{*} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{*}$$

- zakładamy, że ciśnienie w bąblu wyrównało się z ciśnieniem w gwieździe:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{*} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- jeżeli gęstość wewnątrz bąbla spada szybciej niż gęstość w gwieździe, to zaczyna on się unosić jak balon na gorące powietrze:

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{*} \rightarrow \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{P} - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{*} \rightarrow \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

Prawie kompletny układ równań struktury gwiazdy

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F = -D\frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 + \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \ldots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$ – masa zawarta w kuli o promieniu r
- $P(r), \rho(r)$ – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$ – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia $L(r) = L_\odot$ produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w $r = 0$.

Standardowy model Eddingtona

Zakładamy, że stosunek ciśnienia gazu fotonowego P_{rad} do ciśnienia gazu doskonałego P_{gaz} jest stały:

$$\frac{P_{\mathrm{rad}}}{P_{\mathrm{gaz}}} = \frac{\beta}{1-\beta} = const$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \\ P_{\mathrm{gaz}} = \frac{k}{m}\,\rho T \\ \frac{P_{\mathrm{rad}}}{P} = \beta \\ P_{\mathrm{rad}} + P_{\mathrm{gaz}} = P \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $P, P_{\mathrm{rad}}, P_{\mathrm{gaz}}, T$. Po wyeliminowaniu temperatury otrzymujemy równanie stanu w postaci barotropowej, t.j. zawierającej wyłącznie ciśnienie P, gęstość ρ i stałe fizyczne lub „materiałowe”:

$$P = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{a}} \left(\frac{k\rho}{(1-\beta)m} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3} = K\rho^{1+\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, n = 3$$

Średnia droga swobodna fotonu w modelu Eddingtona

W modelu Eddingtona gęstość energii gazu fotonowego to:

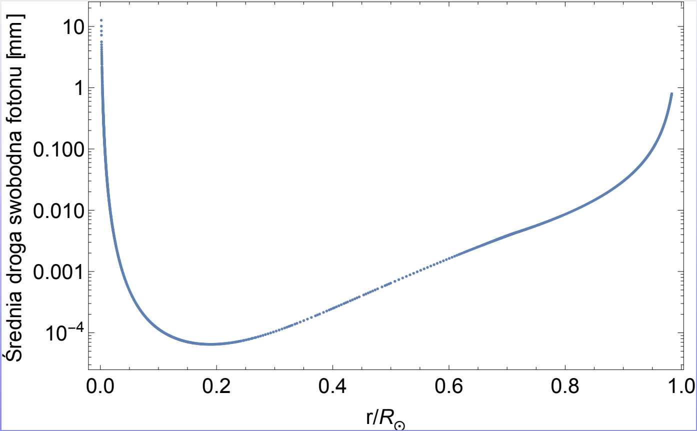
$$aT^4 = 3P_{\mathrm{rad}} = 3\beta P$$

Po wstawieniu do równań:

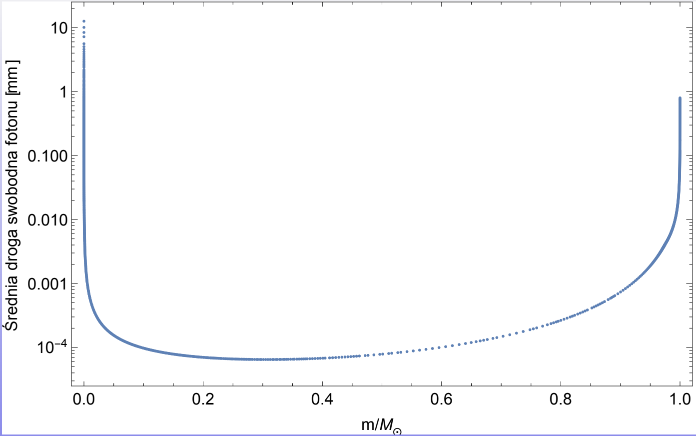
$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3} L_\gamma c \frac{d(aT^4)}{dr} \end{cases}$$

dostajemy specjalną postać drogi swobodnej:

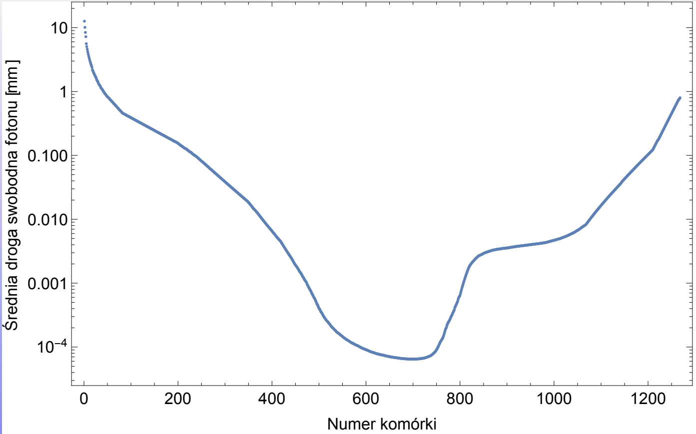
$$L_\gamma = \frac{L_\odot}{4\pi Gc\beta\ m\rho}$$



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

- standardowy model Eddingtona to model politropowy z $n = 3$
- masa gwiazdy jest masą Chandrasekhara, zależną wyłącznie od β i stałych fizycznych (patrz Wykład 6, Masa i promień)
- związek pomiędzy β a masą gwiazdy jest algebraicznym równaniem 4 stopnia:

$$M^2 = \frac{48 k^4}{\pi a G^3 m^4} \frac{\beta}{(1-\beta)^4} \left(-x_0^2 w_3'(x_0)\right)^2$$

  gdzie $w_3(x_0) = 0$, czyli $x_0 \simeq 6.9$ to miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena w_3, a nachylenie w miejscu zerowym to $w_3'(x_0) \simeq -0.04$
- po wstawieniu odpowiednich wartości dla Słońca (m - masa atomu wodoru $\simeq$ masa protonu) otrzymujemy:

$$\beta \simeq 0.0026$$

Model punktowy (Cowlinga)

- formalnie równanie na profil temperatury można rozwiązać osobno (jeżeli założymy, że $D = const$) zaczynając od powierzchni nie wnikając skąd wzięła się energia:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2} = -D\frac{d(aT^4)}{dr}, \quad T(R_\odot) = T_\odot$$

- w takim modelu $T \to \infty$ dla $r \to 0$ a cała energia pochodzi z punktu $r = 0$,
- w praktyce zakłada się, że energia wychodzi z małego, skończonego obszaru: konwektywnego jądra

Twierdzenie wirialne

Całkujemy obie strony równania równowagi hydrostatycznej pomnożone przez $4\pi r^3$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \rightarrow \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr}\, dr = -\int_0^R 4\pi r^3 \frac{Gm\rho}{r^2}\, dr$$

Lewą stronę całkujemy przez części:

$$4\pi r^3 P(r)\Big|_0^R - 3\int_0^R P\, 4\pi r^2 dr = -3\int_V P\, dV$$

natomiast prawa to grawitacyjna energia potencjalna:

$$\int_0^R -\frac{Gm\rho}{r} 4\pi r^2\, dr = \int_V -\frac{Gm\rho}{r}\, dV$$

Otrzymujemy wynik znany jako *twierdzenie wirialne*:

$$E_{\mathrm{graw}} + 3\int_V P\, dV = 0$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza

Energia wewnętrzna gazu doskonałego to $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla gazu jednoatomowego, gęstość tej energii ε to:

$$P = \frac{2}{3}\varepsilon$$

Z twierdzenia wirialnego mamy:

$$\Delta E_{\mathrm{term}} = \frac{1}{2}\Delta E_{\mathrm{graw}}$$

czyli połowa wyzwolonej energii grawitacyjnej „podgrzewa” gwiazdę. Druga połowa jest wyświecana ze średnią jasnością L. Czas świecenia „Słońca” kosztem energii grawitacyjnej nazywamy *skalą czasową Kelvina-Helmholtza*:

$$\tau_{KH} = \frac{\Delta E_{\mathrm{graw}}}{L_{\odot}}$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza II

- energia grawitacyjna np: jednorodnej kuli o masie M i promieniu R to:

$$E_{\text{graw}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

- energia ta jest nieskończona dla $R \to 0$, Słońce mogłoby świecić dowolnie długo
- nas interesuje czas świecenia przy kurczeniu się od $r \simeq 1$ AU $\sim \infty$ do $r = R_\odot$
- wynosi on około $\tau_{\text{K-H}} \sim 10$ milionów lat
- na mocy twierdzenia wirialnego nieunikniony jest stały wzrost energii termicznej, a więc temperatury, w trakcie kurczenia się „gwiazdy"
- pojęcie „gwiazda Kelvina-Helmholtza" stosuje się wszędzie tam, gdzie źródłem wypromieniowanej energii jest energia grawitacyjna (kurczenie się obiektów) np:
  1. powstawanie gwiazdy z obłoku
  2. kurczenie się protogwiazdy neutronowej (promieniowanie to neutrina)

Skala dynamiczna

Rozważmy kulę „pyłu” o promieniu $R(t)$ i masie M zapadającą się pod wpływem własnego przyciągania grawitacyjnego.
Czas kolapsu jest równy czasowi spadku swobodnego w polu masy punktowej. Z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{R(t)}, \qquad v = \frac{dR(t)}{dt}$$

Czas kolapsu T wynosi:

$$T = \frac{1}{2GM}\int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}}} = \sqrt{\frac{R_0^3}{2GM}}\frac{\pi}{2}$$

Wynik podaje się zwykle poprzez gęstość średnią kuli $\bar{\rho}$:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32}}\frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

Dla Słońca $T \simeq 0.5$ godziny.

Źródło energii Słońca

Dotąd konsekwentnie omijaliśmy pytanie: *gdzie gwiazda produkuje energię niezbędną do świecenia?*
Strumień energii L wypływający przez sferę o promieniu r musi być równy całce z objętościowego tempa produkcji energii ε:

$$L(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 \, dr \to \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Równanie to przyjmuje jeszcze prostszą postać, gdy zamiast r użyjemy masy m zawartej w kuli o promieniu r jako zmiennej radialnej:

$$\frac{dL(r)}{dm} = \varepsilon/\rho = \epsilon$$

gdzie ϵ jest tempem produkcji energii na jednostkę masy.

Kompletny układ równań

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P}\frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{cases}$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ, temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i:

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$ lub $P(r)$, $m(r)$, $T(r)$ oraz $L(r)$.