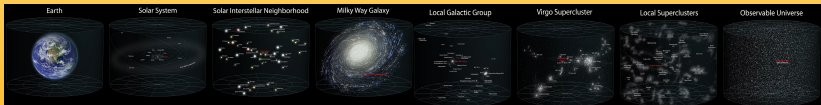


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

16 kwietnia 2019



Samograwitacja a symetria sferyczna

Fundamentalnym znakiem końca wieków ciemnych jest powstanie struktur **samograwitujących**, których ewolucja *staje się niezależna* od ekspansji Wszechświata: obiekty (gromady galaktyk, galaktyki, gromady kuliste, ...) przestają się rozszerzać.

Ich wspólną cechą jest (w pierwszym przybliżeniu) sferyczna symetria (M. Kopernik, De Revolutionibus).

Równanie równowagi hydrostatycznej *plynu* w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g w jednym wymiarze:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \quad (1)$$

gdzie: $P(r)$ – zależność ciśnienia od promienia r , $\rho(r)$ – gęstość, g – przyspieszenie grawitacyjne.

Ważne!

Trzy niewiadome funkcje P , ρ , g są powiązane – znając rozkład gęstości można obliczyć g .

Aby problem stał się rozwiązywalny, potrzebujemy dodatkowego równania wiążącego dwie niewiadome funkcje $P(r)$ oraz $\rho(r)$. Nazywamy ją **równaniem stanu** (ang. *Equation Of State*), w skrócie EOS.

Równanie stanu, zapisywana zwykle jako abstrakcyjna algebraiczna funkcja np: $p = p(\rho)$ zależy w ogólności od temperatury i składu „chemicznego”/jonizacji. Astrofizycy posługują się kilkunastoma różnymi równaniami stanu. Najważniejsze to:

- gaz doskonały, $pV = NkT$
Wymiarem [kT] jest **energia**, wymiarem ciśnienia [p] jest **gęstość energii**.
- gaz fermionowy, np: elektronowy
- gaz bozonowy, np: fotonowy
- politropowe równanie stanu $p = K\rho^\gamma$, $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$
- r. Van der Waalsa $(p + 3\rho^2)(1/\rho - 1/3) = \frac{8}{3}T$

W realistycznych obliczeniach EOS ma postać sporych rozmiarów tablicy liczb, która podlega interpolacji. Wartości są miksem wyników eksperymentalnych i zaawansowanych obliczeń teoretycznych.

Równanie stanu gazu doskonałego

$$pV = NkT$$

p – ciśnienie, V – objętość, N – liczba cząsteczek gazu,
 $k \equiv 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K – stała Boltzmana, T – temperatura w skali
bezwzględnej (w Kelwinach)

Interesuje nas sprowadzenie EOS do postaci $p = f(\rho)$. Korzystamy
z równości:

$$\text{masa gazu} = \rho V \equiv N m$$

gdzie: m – masa jednej cząsteczki gazu, ρ – gęstość.

$$p = \frac{kT}{m} \rho$$

Dla $T = \text{const}$ otrzymujemy **izotermiczne równanie stanu**:

$$p = c_s^2 \rho, \quad c_s \equiv \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad c_s - \text{prędkość dźwięku } (\simeq \text{prędkość atomów})$$

Kulistość planetoid I

- z obserwacji wiemy, że wszystkie dostatecznie duże ciała niebieskie przyjmują kształt kulisty
- dla ciał płynnych (gazowych, ciekłych) jest to oczywiste
- co w przypadku ciał skalistych, metalicznych, sypkich itp?

Rozważmy pionowy „walec” o wysokości h i gęstości ρ ustawiony na powierzchni kuli o promieniu R i gęstości ρ . Maksymalna wysokość walca, powyżej której ulegnie trwałej deformacji lub zniszczeniu to:

$$h_{max} = \frac{\sigma_{crit}}{\rho g} = \frac{\sigma_{crit}}{\frac{4}{3}\pi G \rho^2 R}$$

gdzie σ_{crit} to wytrzymałość materiału na ściskanie.

Definiujemy warunek krytyczny ($\pi \simeq 3$) na sferyczność jako $h_{max} \ll R$:

$$d = 2R \gg \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\sigma_{crit}}{G}}$$

Rozważmy materiał idealnie sprężysty o module Younga E i gęstości ρ_0 . Jego równanie stanu (EOS) to:

$$P(\rho) = E \ln(\rho/\rho_0).$$

Równanie równowagi hydrostatycznej przyjmuje postać:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dh} = -\rho g, \quad \rho(0) = \rho_0,$$

z rozwiązaniem:

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{1 - \frac{h\rho_0 g}{E}}$$

posiadającym osobliwość $\rho \rightarrow \infty$ dla $h\rho_0 g = E$.

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

- 1 skład „chemiczny” gazu
 - 2 masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
 - 3 stopień jonizacji/dysocjacji
- 1 75% wodoru (H), 25 % helu (${}^4\text{He}$)
 - 2 $m_{\text{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^1\text{H}$ (0.02% ${}^2\text{H}$),
 $m_{\text{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^4\text{He}$
(śladowe ilości ${}^3\text{He}$).
 - 3 dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} + \frac{X_{\text{He}}}{A_{\text{He}}} \right) = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho kT}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** $x2$, w postaci H_2 0.5.

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

- 1 skład „chemiczny” gazu
- 2 masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
- 3 stopień jonizacji/dysocjacji
- 1 75% wodoru (H), 25 % helu (${}^4\text{He}$)
- 2 $m_{\text{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^1\text{H}$ (0.02% ${}^2\text{H}$),
 $m_{\text{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^4\text{He}$
(śladowe ilości ${}^3\text{He}$).
- 3 dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} + \frac{X_{\text{He}}}{A_{\text{He}}} \right) = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho kT}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** $x2$, w postaci H_2 0.5.

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

- 1 skład „chemiczny” gazu
 - 2 masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
 - 3 stopień jonizacji/dysocjacji
- 1 75% wodoru (H), 25 % helu (${}^4\text{He}$)
 - 2 $m_{\text{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^1\text{H}$ (0.02% ${}^2\text{H}$),
 $m_{\text{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^4\text{He}$
(śladowe ilości ${}^3\text{He}$).
 - 3 dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} + \frac{X_{\text{He}}}{A_{\text{He}}} \right) = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho kT}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** $x2$, w postaci H_2 0.5.

$$P = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3}aT^4 = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c}T^4$$

Mieszanina fotonów i gazu doskonałego: Standardowy model Eddingtona

Zakładamy, że stosunek ciśnienia gazu fotonowego P_{rad} do ciśnienia gazu doskonałego P_{gaz} jest stały:

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{gaz}}} = \frac{\beta}{1 - \beta} = \text{const}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \alpha T^4 \\ P_{\text{gaz}} = \frac{k}{m} \rho T \\ \frac{P_{\text{rad}}}{P} = \beta \\ P_{\text{rad}} + P_{\text{gaz}} = P \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $P, P_{\text{rad}}, P_{\text{gaz}}, T$. Po wyeliminowaniu temperatury otrzymujemy równanie stanu w postaci barotropowej, t.j. zawierającej wyłącznie ciśnienie P , gęstość ρ i stałe fizyczne lub „materiałowe”:

$$P = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{\alpha}} \left(\frac{k\rho}{(1-\beta)m} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3} = K\rho^{1+\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, \quad n = 3$$

Równanie równowagi hydrostatycznej jest na ogół nieliniowe:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -g$$

Czy istnieje taka funkcja termodynamiczna, dla której powyższe równanie można zapisać jako:

$$\frac{d^?}{dx} = -g$$

Taka funkcja musi spełniać równanie:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad dh = \frac{dp}{\rho} \quad \rightarrow \quad h = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Dla izotermicznego EOS $p = c_s^2 \rho$:

$$h(\rho) = c_s^2 \ln(\rho/\rho_0)$$

W równowadze hydrostatycznej suma „entalpii” właściwej h oraz potencjału grawitacyjnego $-gx$ jest stała.

Równowaga hydrostatyczna: przypadek ogólny

W przypadku gdy pole grawitacyjne nie jest sferycznie symetryczne, np: w układzie podwójnym gwiazd, wyprowadzenie jednowymiarowe nie jest zadowalające. Dla dowolnego elementu płynu o objętości V otoczonego powierzchnią S warunek równowagi ma postać

$$\int_S p \, d\vec{S} = \int_V \rho \vec{g} \, dV$$

Aby obliczyć całkę po lewej stronie mnożymy ją przez dowolny stały wektor \vec{n} :

$$\vec{n} \cdot \int_S p \, d\vec{S} = \int_S \vec{n} p \, d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot (\vec{n} p) \, dV = \int_V (\nabla \cdot \vec{n}) p + \vec{n} \cdot \nabla p \, dV = \vec{n} \cdot \int_V \nabla p \, dV$$

Opuszczając dowolny wektor \vec{n} oraz całki otrzymujemy ostatecznie:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad (2)$$

Powyższe równanie należy uzupełnić o EOS (równanie stanu płynu) oraz związek gęstości ρ z polem grawitacyjnym \vec{g} .

Równowaga hydrostatyczna w przypadku ogólnym

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \equiv -\rho \vec{\nabla} \Phi_g \quad (3a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad \text{lub} \quad \Phi_g = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (3b)$$

$$p = p(\rho, \dots) \quad (3c)$$

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08