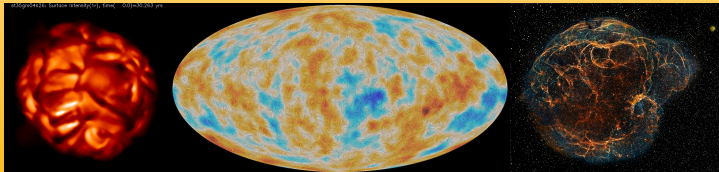


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

17 kwietnia 2018



Gwiazdy

Astrofizyczny opis gwiazdy składa się z czterech składników:

- 1 struktura hydrostatyczna (równowaga gradientu ciśnienia i grawitacji):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$

- 2 zachowanie masy/związek rozkładu masy z grawitacją:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

- 3 transport energii/pomieniowania (gwiazdy świecą!),
- 4 produkcja/źródło energii (reakcje termojądrowe).

Docelowo potrzebujemy 4 równań, których rozwiązanie wyznaczy pełną strukturę gwiazdy: ciśnienie $P(r)$, gęstość $\rho(r)$, temperaturę $T(r)$, strumień energii $L(r)$ i skład chemiczny/izotopowy $X_i(r)$. Warunki brzegowe wyznaczają masę całkowitą $M(R)$, promień R , temperatura powierzchniowa $T(R)$ oraz jasność gwiazdy $L(R)$.

Początkowy skład chemiczny wynika z nukleosyntezy kosmologicznej (Wielkiego Wybuchu). 

Funkcje Lane-Emdena

Równanie:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$

$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$

- dla $n = 1$

$$w_1 = \frac{\sin x}{x}$$

- dla $n = 5$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.

Oznaczmy:

x_0 – miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena,

$w'_n(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3 (-x_0^2 w'_n(x_0))$$

Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} M = 4\pi\lambda^3\rho_C (-x_0^2 w'_n(x_0)) \\ R = \lambda x_0 \\ \lambda^2 = \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} \\ h_C = K(n+1)\rho_C^{1/n} \end{cases} \quad (1)$$

Ostatnie równanie eliminuje h_C , z drugiego bierzemy λ . Zostają dwa równania łączące M , R i ρ_C . Po wyeliminowaniu gęstości centralnej ρ_C pozostaje skomplikowany wzór łączący promień R i masę M ciała:

$$R = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{x_0}{w'_n(x_0)} \right)^{\frac{n-1}{n-3}} \left(\frac{4\pi G}{K(n+1)x_0^2} \right)^{n/(n-3)} M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

Politropy: zależność masa-promień

Pomijając czynniki zależne tylko od równania stanu, t.j. K i n , mamy:

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

- dla $n < 1$ promień ciała R rośnie przy dokładaniu masy M
- dla $n = 1$ promień ciała R jest stały, niezależnie od masy M
- dla $1 < n < 3$ promień ciała **maleje** przy dokładaniu masy M
- dla $n = 3$ masa ciała $M = const$, i zależy wyłącznie od równania stanu (stałych fizycznych); w przypadku relatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego nazywamy ją *masą Chandrasekhara*
 $M_{Ch} \simeq m_{Planck}^3 / m_{proton}^2 \simeq 1.5 M_{\odot}$
- dla $3 < n < 5$ promień znowu rośnie z masą
- dla $n \geq 5$ promień jest nieskończony

One-zone model

Dane jest równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

Przybliżamy gradient ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{p(R) - p(0)}{R - 0} = -\frac{p_C}{R}$$

i analogicznie prawą stronę:

$$-\frac{Gm\rho}{r^2} \sim -\frac{GM\rho_C}{R^2}$$

Dostajemy:

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

One-zone model vs polytropic model

W modelu politropowym:

$$\begin{aligned}\frac{GM}{R} &= \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}}{R} = \frac{4\pi G\rho_C}{3} \left(-3\frac{w'_n(x_0)}{x_0} \right) \lambda^2 x_0^2 = \\ &= -x_0 w'_n(x_0) 4\pi G\rho_C \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} = -x_0 w'_n(x_0) h_C = \\ &= -x_0 w'_n(x_0)(n+1) \frac{p_C}{\rho_C}\end{aligned}$$

One-zone

Politropa

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{p_C}{\rho_C} = C_n \frac{GM}{R}$$

$$C_n = -\frac{1}{x_0 w'_n(x_0)(n+1)}$$



Formowanie gwiazdy

Rozważmy kulę „pyłu” o promieniu $R(t)$ i masie M zapadającą się pod wpływem własnego przyciągania grawitacyjnego.

Czas kolapsu jest równy czasowi spadku swobodnego w polu masy punktowej. Z zasady zachowania energii mechanicznej:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R_0} + \frac{GMm}{R(t)}, \quad v = \frac{dR(t)}{dt}$$

Czas kolapsu T wynosi:

$$T = \frac{1}{2GM} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}}} = \sqrt{\frac{R_0^3}{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

Wynik podaje się zwykle poprzez gęstość średnią kuli $\bar{\rho}$:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$$

Dla Słońca $T \simeq 0.5$ godziny.

Twierdzenie wirialne

Całkujemy obie strony równania równowagi hydrostatycznej pomnożone przez $4\pi r^3$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \rightarrow \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -\int_0^R 4\pi r^3 \frac{Gm\rho}{r^2} dr$$

Lewą stronę całkujemy przez części:

$$4\pi r^3 P(r) \Big|_0^R - 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr = -3 \int_V P dV$$

natomiast prawa to grawitacyjna energia potencjalna:

$$\int_0^R -\frac{Gm\rho}{r} 4\pi r^2 dr = \int_V -\frac{Gm\rho}{r} dV$$

Otrzymujemy wynik znany jako *twierdzenie wirialne*:

$$E_{\text{grav}} + 3 \int_V P dV = 0$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza

Energia wewnętrzna gazu doskonałego to $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla gazu jednoatomowego, gęstość tej energii ε to:

$$P = \frac{2}{3}\varepsilon$$

Z twierdzenia wirialnego mamy:

$$\Delta E_{\text{term}} = \frac{1}{2}\Delta E_{\text{graw}}$$

czyli połowa wyzwolonej energii grawitacyjnej „podgrzewa” gwiazdę. Druga połowa jest wyświecana ze średnią jasnością L . Czas świecenia „Słońca” kosztem energii grawitacyjnej nazywamy *skalą czasową Kelvina-Helmholtza*:

$$\tau_{KH} = \frac{\Delta E_{\text{graw}}}{L_{\odot}}$$

Skala czasowa Kelvina-Helmholtza II

- energia grawitacyjna np: jednorodnej kuli o masie M i promieniu R to:

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- energia ta jest nieskończona dla $R \rightarrow 0$, Słońce mogłoby świecić dowolnie długo
- nas interesuje czas świecenia przy kurczeniu się od $r \simeq 1 \text{ AU} \sim \infty$ do $r = R_{\odot}$
- wynosi on około $\tau_{\text{K-H}} \sim 10$ milionów lat
- na mocy twierdzenia wirialnego nieunikniony jest stały wzrost energii termicznej, a więc temperatury, w trakcie kurczenia się „gwiazdy”
- pojęcie „gwiazda Kelvina-Helmholtza” stosuje się wszędzie tam, gdzie źródłem wypromieniowanej energii jest energia grawitacyjna (kurczenie się obiektów) np:

- 1 powstawanie gwiazdy z obłoku
- 2 kurczenie się protogwiazdy neutronowej (promieniowanie to neutrina)

Model Eddingtona

- standardowy model Eddingtona to model politropowy z $n = 3$
- masa gwiazdy jest masą Chandrasekhara, zależną wyłącznie od β i stałych fizycznych
- związek pomiędzy β a masą gwiazdy jest algebraicznym równaniem 4 stopnia:

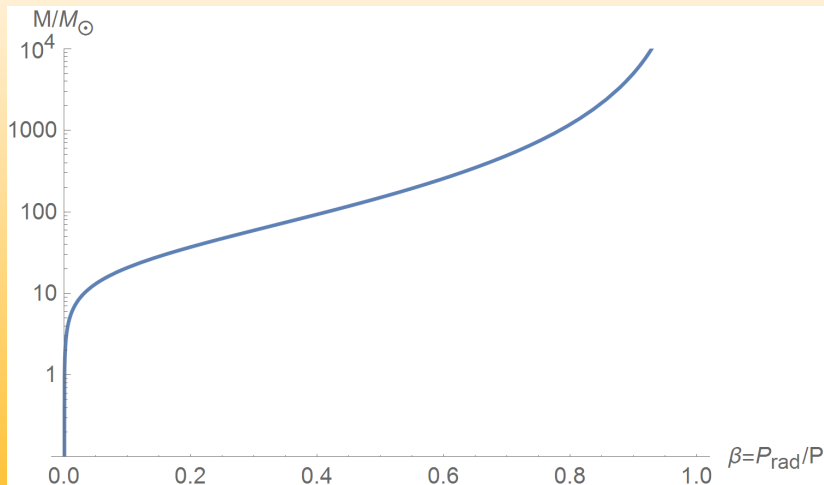
$$M^2 = \frac{48k^4}{\pi a G^3 \mu^4 m^4} \frac{\beta}{(1 - \beta)^4} (-x_0^2 w_3'(x_0))^2$$

gdzie $w_3(x_0) = 0$, czyli $x_0 \simeq 6.9$ to miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena w_3 , a nachylenie w miejscu zerowym to $w_3'(x_0) \simeq -0.04$

- po wstawieniu wartości $\mu = 16/27$ dla zjonizowanej materii po Wielkim Wybuchu i $\beta = 0.5$

$$M \simeq 150M_{\odot}.$$

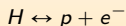
Masa gwiazdy III populacji w modelu Eddingtona



Jonizacja

Jonizacja

Rozważmy rozpad atomu wodoru na proton i elektron:



W równowadze, potencjały chemiczne muszą spełniać:

$$\mu_H = \mu_p + \mu_{e^-}$$

Dla klasycznej granicy relatywistycznego kwantowego gazu doskonałego (Bosego/Fermiego-Diraca):

$$\frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} \rightarrow e^{-(mc^2+E')/kT} e^{\mu/kT}$$

potencjał chemiczny wynosi:

$$\mu = mc^2 + kT \ln \left(\frac{n}{g} \lambda^3 \right)$$

gdzie $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ to *termiczna długość fali de Broglie'a*.

Wstawiając wzór na μ do równania równowagi otrzymujemy równanie Saha:

$$\frac{n_p n_{e^-}}{n_H} = \frac{g_p g_{e^-}}{g_H} \frac{1}{\lambda_e^3} e^{-\frac{Q}{kT}}$$

gdzie energia wiązania/jonizacji $Q = (m_H - m_p - m_{e^-}) c^2$.

Równanie jonizacji: przykład rozwiązania

Z zasady zachowania ładunku (przy braku obecności innych jąder atomowych!) możemy podstawić $n_e = n_p$. Sumaryczna gęstość $n_p + n_H = \rho/m_H$, co daje prosty algebraiczny układ równań do rozwiązania:

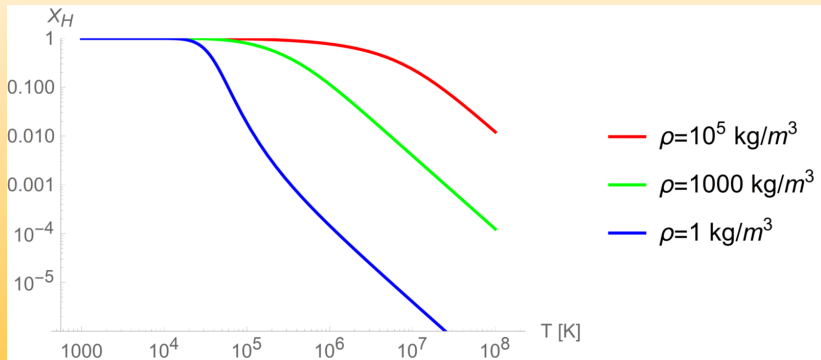
$$\begin{cases} \frac{n_p^2}{n_H} = \frac{2h^3}{\sqrt{2\pi m_e kT}^3} e^{\frac{E_0}{kT}} \\ n_p + n_H = \rho/m_H \end{cases}$$

gdzie $E_0 = -13.6 \text{ eV} = eE_0 \text{ J}$ ($e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ - ładunek elektronu) to energia jonizacji/wiązania atomu wodoru.

Wprowadzając zawartość protonów $X_p \equiv n_p/n$ oraz atomów wodoru $X_H = n_H/n$ problem można sprowadzić do równania kwadratowego:

$$\frac{X_p^2}{1 - X_p} = f(\rho, T), \quad f \propto \frac{T^{3/2} e^{-E_0/(kT)}}{\rho}$$

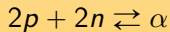
Równanie jonizacji: przykład rozwiązania



Atomy wodoru „stykają się” już dla $\rho > 1600 \text{ kg/m}^3$.

Istotne jest podkreślenie, iż równanie Saha może być stosowane w różnych sytuacjach astrofizycznych, i nie tylko:

- nuklearna równowaga statystyczna (NSE, Nuclear Statistical Equilibrium), np: reakcja typu „dysocjacji” cząstek α (jąder atomu helu ${}^4\text{He}$) na protony i neutrony:



- dysocjacja dwuatomowych molekuł, np: wodoru cząsteczkowego:



Transport energii: promieniowanie

Zgodnie z prawami termodynamiki energia (ciepło) przepływa od obszarów o temperaturze wyższej do obszarów o temperaturze niższej. Strumień energii F jest proporcjonalny do różnicy temperatur T :

$$F \propto - \frac{dT}{dr}$$

- w typowych sytuacjach astrofizycznych temperatura spada w miarę oddalania się od centrum.
- powyższe nie jest prawem, istnieją wyjątki, np: zdegenerowane jądro chłodzone neutrinowo + spalanie w warstwie sferycznej (ang. *shell burning*)
- współczynnik proporcjonalności jest funkcją zależną od składu „chemicznego” materii X_i , temperatury, gęstości, ciśnienia i zjawisk odpowiedzialnych za przepływ energii

Najważniejsze procesy odpowiedzialne za przepływ energii

- 1 transport promienisty
- 2 konwekcja
- 3 przewodnictwo cieplne

Transport promieniowania

Pod pojęciem promieniowania rozumiemy cząstki „bezmasowe”, poruszające się z prędkością światła c :

- 1 fotony γ (przede wszystkim)
- 2 neutrino $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ (w ekstremalnych sytuacjach: supernowe typu implozyjnego, protogwiazdy neutronowe, dyski akrecyjne wokół czarnych dziur)

Pełny opis promieniowania wymaga podania w każdym punkcie gwiazdy $\vec{r} = \{x, y, z\}$ rozkładu prawdopodobieństwa f kątów pod jakimi poruszają się fotony i rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów. Daje to w sumie sześć zmiennych, a obliczenia uwzględniające je wszystkie określamy jako *symulacje 6D*. Konieczne jest rozwiązanie równania transportu Boltzmanna:

$$\frac{\partial f}{c \partial t} + \vec{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{reakcje z fotonami}$$

W praktyce często możliwe jest drastyczne uproszczenie powyższego opisu.

Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)

Warunki panujące wewnątrz Słońca:

- 1 średnia droga swobodna fotonu $L_\gamma \sim 2$ cm, wynikająca głównie z rozpraszania na swobodnych elektronach pochodzących ze zjonizowanego wodoru
- 2 średni spadek temperatury na drodze od centrum $T_c \simeq 10^7$ K do powierzchni $T \simeq 5800$ K:

$$\frac{T_c - T_\odot}{R_\odot} \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$$

Wnioski są następujące:

- 1 układ jest niemal w równowadze termicznej
- 2 promieniowanie ciała doskonale czarnego (gaz fotonowy) jest poprawnym opisem rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów
- 3 strumień energii emitowany na zewnątrz i do wewnątrz w odległości L_γ kasuje się z dokładnością około $\sigma \Delta T^4 \sim 10^{-10}$

W stanie LTE (Local Thermodynamic Equilibrium) transport fotonów można rozpatrywać przynajmniej z dwóch punktów widzenia:

- 1 jako proces dyfuzji gazu fotonowego pomiędzy rejonami o różnej gęstości fotonów
- 2 jako proces błędzenia przypadkowego fotonu

Pierwszy z opisów jest wygodniejszy z punktu widzenia równań struktury i ewolucji gwiazdy, drugi jest bardziej ilustratywny i pozwala powiązać makroskopowy współczynnik dyfuzji z mikroskopowymi procesami oddziaływania fotonów z materią (przekrojami czynnymi).

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08