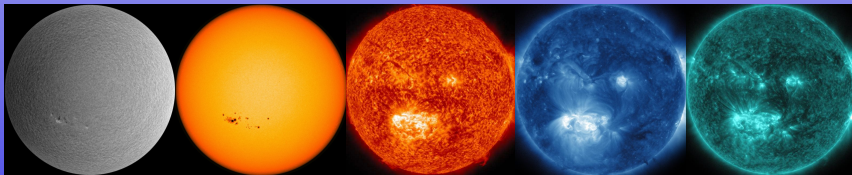


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

19 kwietnia 2016



$$p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

γ – wykładnik politropy, n – indeks politropy

- $n \rightarrow \infty, \gamma = 1$ – izotermiczne równanie stanu
- $n = 5, \gamma = \frac{6}{5}$ – wartość graniczna pomiędzy skończonymi a nieskończonymi rozwiązaniami (sfera Plummera)
- $n = 3, \gamma = \frac{4}{3}$ – model „Słońca”, relatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 3/2, \gamma = \frac{5}{3}$ – nierelatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 1, \gamma = 2$ – gwiazda konwektywna
- $n \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty$ – przypadek stałej gęstości

Politropowe równanie stanu: wzory

	γ – wykładnik politropy	n – indeks politropy
ciśnienie	$p = K\rho^\gamma$	$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$
„entalpia” właściwa $h = (H/V)/\rho$	$h = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$	$h = K(n+1)\rho^{1/n}$
„prędkość dźwięku” $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$	$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$	$c_s^2 = K(1 + \frac{1}{n})\rho^{1/n}$
	$c_s^2 = (\gamma - 1) h$	$h = n c_s^2$
	$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$	$h = (n + 1) \frac{p}{\rho}$

Równanie równowagi dla entalpii

Wcześniej pokazaliśmy, że użycie „entalpii” właściwej $\nabla h = \nabla p / \rho$ upraszcza równania.

$$\frac{\nabla p}{\rho} \equiv \nabla h = -\nabla \Phi_g \quad (1a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad (1b)$$

Pierwsze równanie można scałkować:

$$h + \Phi_g = \text{const} \quad (2a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad (2b)$$

Działając obustronnie operatorem Laplace'a Δ na pierwsze z równań i korzystając z drugiego mamy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0$$

Równanie Lane-Emdena

Po wyprowadzeniu wzoru na entalpię gazu politropowego, otrzymujemy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0, \quad h(\rho) = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{1/n}$$

do ostatecznie daje jedno równanie różniczkowe:

$$\Delta h + 4\pi G \left(\frac{\gamma-1}{K\gamma} \right)^n h^n = 0$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych na postać:

$$\Delta h = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dh}{dr} \right) = \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh}{dr}$$

Standardową postać otrzymamy dokonując równoczesnej zamiany zmiennej radialnej r i funkcji niewiadomej h :

$$h(x) = h_c w(x), \quad r = \lambda x$$

Po przeprowadzeniu rachunków otrzymujemy słynne równanie Lane-Emdena:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0.$$

Funkcje Lane-Emdena

Równanie:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$

$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$

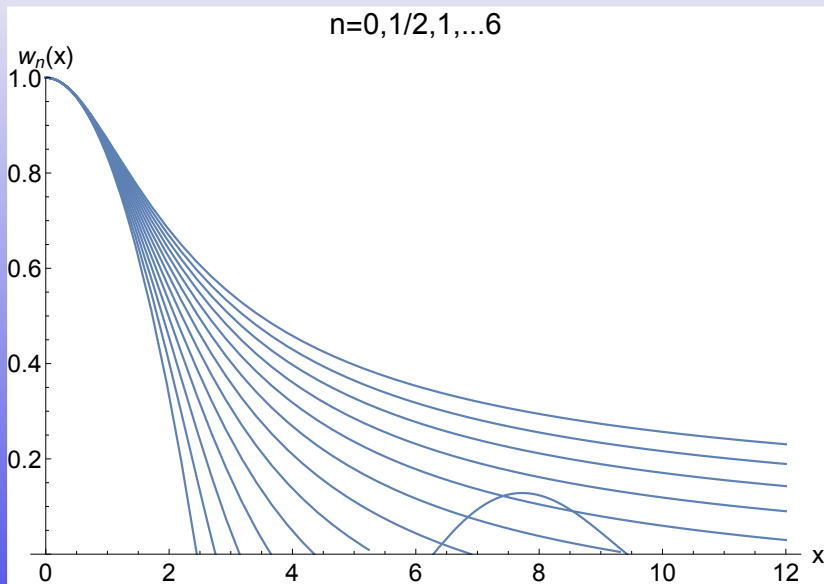
- dla $n = 1$

$$w_1 = \frac{\sin x}{x}$$

- dla $n = 5$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Funkcje Lane-Emdena: wykresy



Skalowanie do rozmiarów fizycznych

Rozwiązanie opisują wzory:

$$h(r) = h_C w_n(r/\lambda), \quad \rho(r) = \rho_C w_n(r/\lambda)^n$$

gdzie skalowanie opisuje kombinacja o wymiarze długości:

$$\lambda = c_s \sqrt{\frac{n}{4\pi G \rho_C}} = \sqrt{\frac{h_C}{4\pi G \rho_C}}$$

Wielkość $1/\sqrt{G\rho}$ ma wymiar czasu, natomiast c_s to prędkość „dźwięku”, obie liczone dla wartości w centrum „gwiazdy”.

Strukturalnie wzór na λ wygląda identycznie jak wzór na *długość Jeansa*.

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.

Oznaczmy:

x_0 – miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena,

$w'_n(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3 (-x_0^2 w'_n(x_0))$$

Przykłady struktury dla zadanego R i M

Jeżeli znamy masę M i promień R obiektu, oraz potrafimy obliczyć indeks n równania stanu materii z której jest zbudowany, to znamy strukturę wewnętrzną:

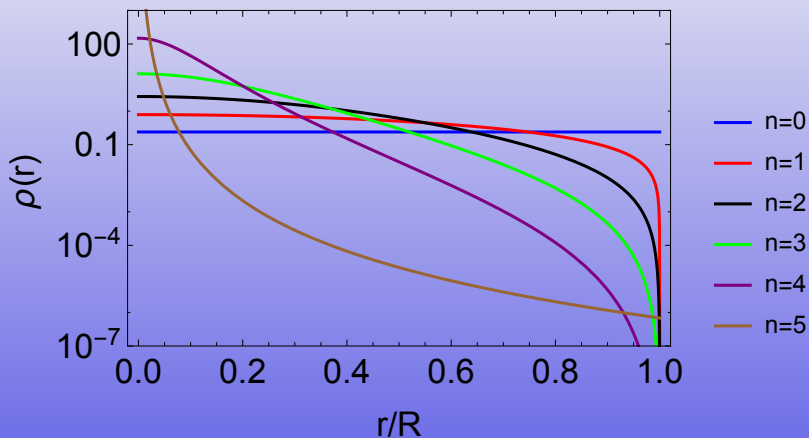
$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} w_n \left(\frac{r}{R} x_0 \right)^n \left(-\frac{x_0}{3x_1} \right)$$

Wielkość:

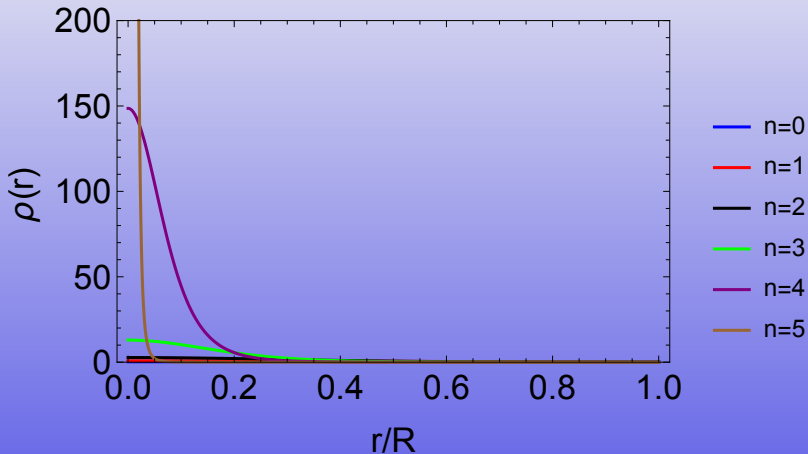
$$-\frac{x_0}{3x_1} = \frac{\rho_C}{\bar{\rho}}$$

gdzie: ρ_C – gęstość centralna (w środku), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – gęstość średnia, nazywamy *kontrastem gęstości*.

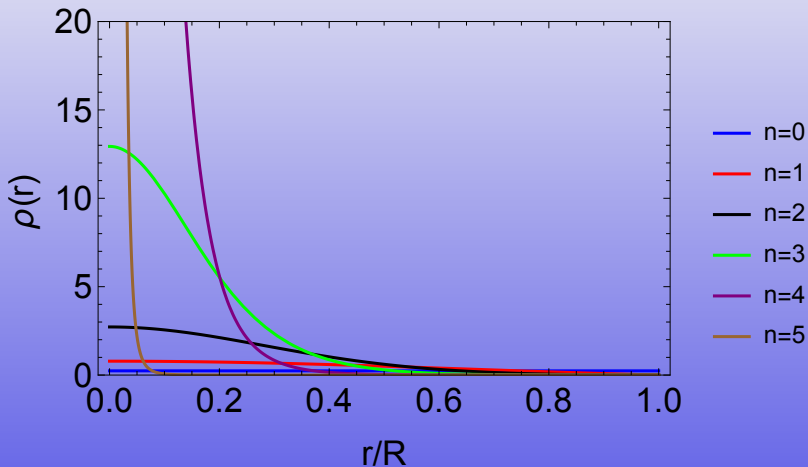
Przykłady struktury dla zadanego R i M



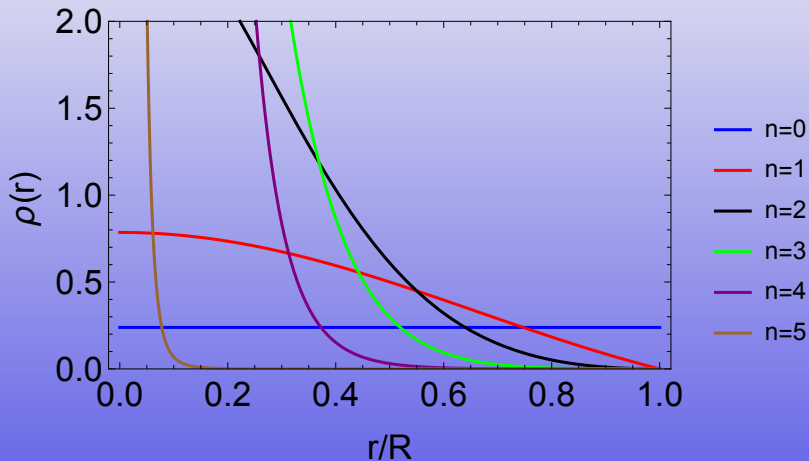
Przykłady struktury dla zadanego R i M



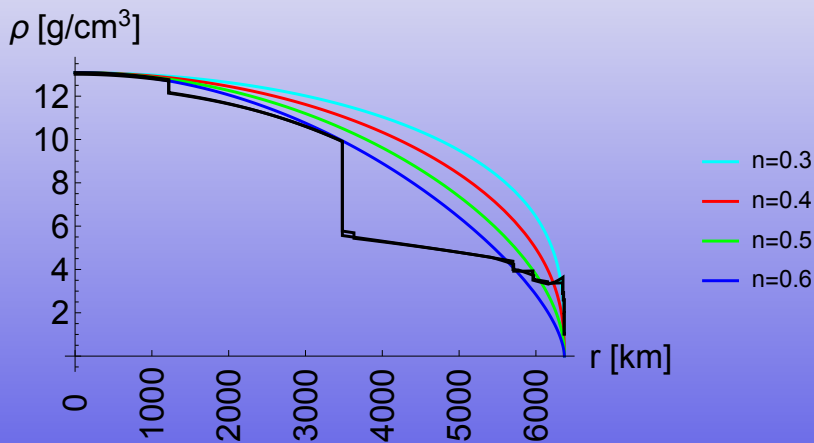
Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Politropowy model Ziemi vs PREM



Politropy: zależność masa-promień

Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} M = 4\pi\lambda^3\rho_C (-x_0^2 w'_n(x_0)) \\ R = \lambda x_0 \\ \lambda^2 = \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} \\ h_C = K(n+1)\rho_C^{1/n} \end{cases} \quad (3)$$

Ostatnie równanie eliminuje h_C , z drugiego bierzemy λ . Zostają dwa równania łączące M , R i ρ_C . Po wyeliminowaniu gęstości centralnej ρ_C pozostaje skomplikowany wzór łączący promień R i masę M ciała:

$$R = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{x_0}{w'_n(x_0)} \right)^{\frac{n-1}{n-3}} \left(\frac{4\pi G}{K(n+1)x_0^2} \right)^{n/(n-3)} M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

Politropy: zależność masa-promień

Pomijając czynniki zależne tylko od równania stanu, t.j. K i n , mamy:

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

- dla $n < 1$ promień ciała R rośnie przy dokładaniu masy M
- dla $n = 1$ promień ciała R jest stały, niezależnie od masy M
- dla $1 < n < 3$ promień ciała **maleje** przy dokładaniu masy M
- dla $n = 3$ masa ciała $M = \text{const}$, i zależy wyłącznie od równania stanu (stałych fizycznych); w przypadku relatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego nazywamy ją *masą Chandrasekhara*
 $M_{Ch} \simeq m_{Planck}^3 / m_{proton}^2 \simeq 1.5M_{\odot}$
- dla $3 < n < 5$ promień znowu rośnie z masą
- dla $n \geq 5$ promień jest nieskończony

Masa Chandrasekhara

Zależną tylko od stałych fizycznych (K w równaniu stanu $P = K\rho^{4/3}$) masę politropy z $n = 3$ nazywamy *masą Chandrasekhara*:

$$M_{Ch} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2} (-x_0^2 x_1).$$

W przypadku gdy ciśnienie pochodzi od relatywistycznego, zdegenerowanego gazu elektronowego:

$$K = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} hc \left(\frac{Y_e}{m_{proton}} \right)^{4/3}.$$

Masa Chandrasekhara

$$M_{Ch} = \frac{\sqrt{3\pi}}{8} (-x_0^2 x_1) \frac{m_{Planck}^3}{m_{proton}^2} (2Y_e)^2 \simeq 1.44 M_{\odot} (2Y_e)^2$$

W przypadku materii złożonej z jąder atomowych o jednakowej liczbie protonów i neutronów (np: ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$)

liczba elektronów na barion wynosi $Y_e = 0.5$.

One-zone model

Dane jest równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

Przybliżamy gradient ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{p(R) - p(0)}{R - 0} = -\frac{p_C}{R}$$

i analogicznie prawą stronę:

$$-\frac{Gm\rho}{r^2} \sim -\frac{GM\rho_C}{R^2}$$

Dostajemy:

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

One-zone model vs polytropic model

W modelu politropowym:

$$\begin{aligned}\frac{GM}{R} &= \frac{G \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho}}{R} = \frac{4\pi G \rho_C}{3} \left(-3 \frac{w'_n(x_0)}{x_0} \right) \lambda^2 x_0^2 = \\ &= -x_0 w'_n(x_0) 4\pi G \rho_C \frac{h_C}{4\pi G \rho_C} = -x_0 w'_n(x_0) h_C = \\ &= -x_0 w'_n(x_0) (n+1) \frac{p_C}{\rho_C}\end{aligned}$$

One-zone

Politropa

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{p_C}{\rho_C} = C_n \frac{GM}{R}$$

$$C_n = -\frac{1}{x_0 w'_n(x_0)(n+1)}$$



Słońce

Standardowy model Eddingtona

Zakładamy, że stosunek ciśnienia gazu fotonowego P_{rad} do ciśnienia gazu doskonałego P_{gaz} jest stały:

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{gaz}}} = \frac{\beta}{1 - \beta} = \text{const}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \\ P_{\text{gaz}} = \frac{k}{m} \rho T \\ \frac{P_{\text{rad}}}{P} = \beta \\ P_{\text{rad}} + P_{\text{gaz}} = P \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $P, P_{\text{rad}}, P_{\text{gaz}}, T$. Po wyeliminowaniu temperatury otrzymujemy równanie stanu w postaci barotropowej, t.j. zawierającej wyłącznie ciśnienie P , gęstość ρ i stałe fizyczne lub „materiałowe”:

$$P = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{a}} \left(\frac{k\rho}{(1-\beta)m} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3} = K\rho^{1+\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, n = 3$$

- standardowy model Eddingtona to model politropowy z $n = 3$
- masa gwiazdy jest masą Chandrasekhara, zależną wyłącznie od β i stałych fizycznych
- związek pomiędzy β a masą gwiazdy jest algebraicznym równaniem 4 stopnia:

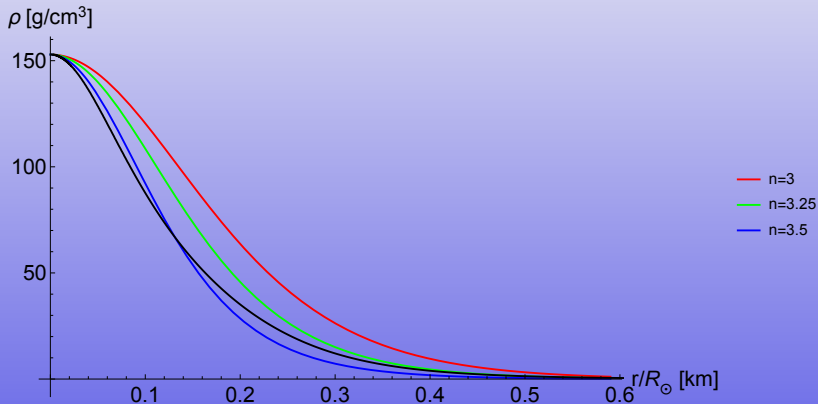
$$M^2 = \frac{48k^4}{\pi a G^3 m^4} \frac{\beta}{(1 - \beta)^4} (-x_0^2 w_3'(x_0))^2$$

gdzie $w_3(x_0) = 0$, czyli $x_0 \simeq 6.9$ to miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena w_3 , a nachylenie w miejscu zerowym to $w_3'(x_0) \simeq -0.04$

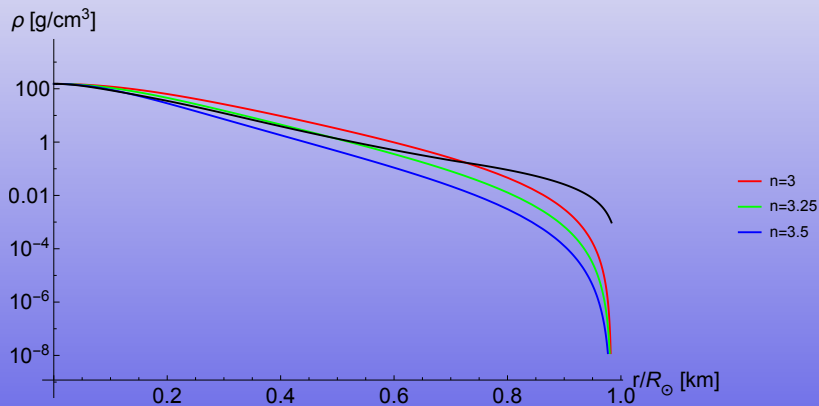
- po wstawieniu odpowiednich wartości dla Słońca (m - masa atomu wodoru \simeq masa protonu) otrzymujemy:

$$\beta \simeq 0.0026$$

Politropowy model Słońca vs SSM



Politropowy model Słońca vs SSM



- niewyróżniająca się gwiazda Galaktyki
- ze względu na bliskość kompleksowo przebadana eksperymentalnie i teoretycznie
- stale monitorowana, w niektórych aspektach (np: plamy słoneczne) od kilkuset lat
- występują w niej prawie wszystkie procesy istotne w teorii ewolucji gwiazd
- jest perfekcyjnie sferyczne ($\Delta R/R \simeq 7 \times 10^{-5}$) i bardzo wolno obraca się (raz na miesiąc)

Słońce: widmo elektromagnetyczne

Słońce z dobrym przybliżeniem promieniuje jak ciało doskonale czarne. Widmo energetyczne (energia fotonu $E_\gamma = h\nu$) promieniowania ma postać Plancka:

$$\frac{dL}{d(h\nu)} = L_\odot \frac{15}{(\pi k T_\odot)^4} \frac{(h\nu)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Temperaturę efektywną $T_\odot = T_{\text{eff}}$ definiujemy poprzez całkowitą moc promieniowania, tak aby był spełniony wzór Stefana-Boltzmana $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 T_\odot^4$.

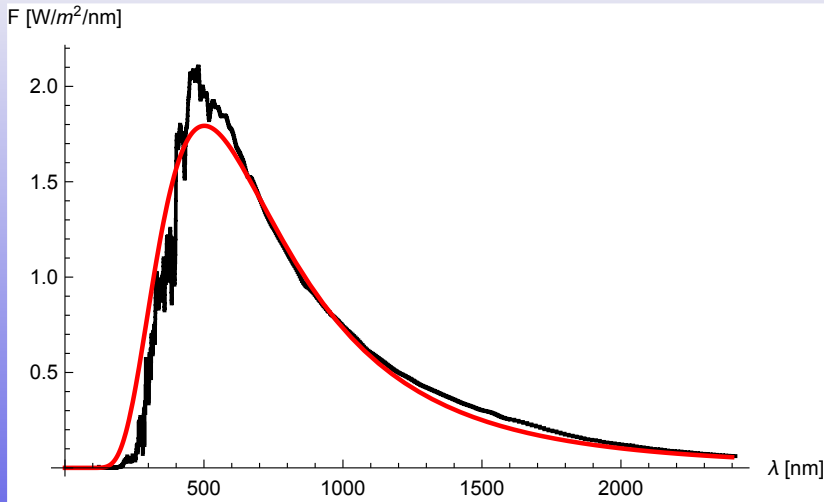
Stała słoneczna

Natężenie promieniowania w odległości $d = 1$ AU nazywamy *stałą słoneczną*:

$$\frac{L_\odot}{4\pi d^2} = 1361 \text{ W/m}^2$$

Faktyczna ilość energii na m^2 docierająca do powierzchni Ziemi jest zmienna i prawie 10 razy mniejsza.

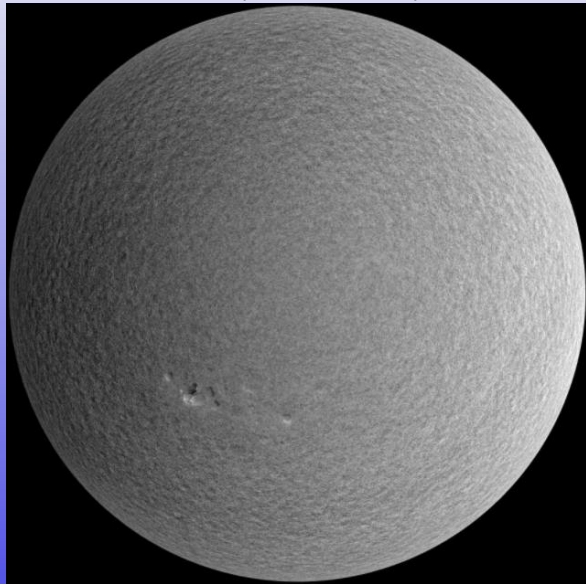
Widmo termiczne i obserwowane



$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \frac{2\pi hc^2}{\sigma T^4} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, T = 5877 \text{ K}, d = 1 \text{ AU}, L_{\odot} = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

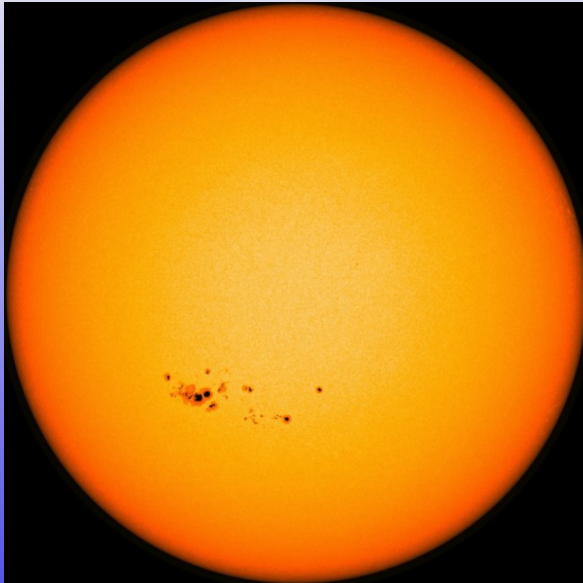
„Powierzchnia” Słońca

Prędkości radialne (dopplerogram)



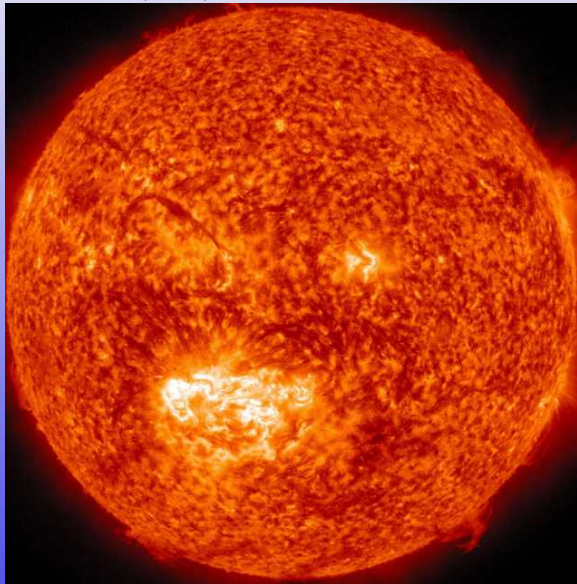
„Powierzchnia” Słońca

Światło widzialne



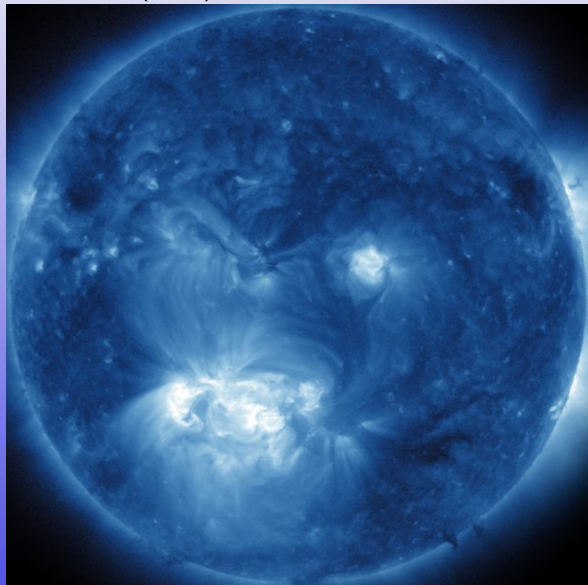
„Powierzchnia” Słońca

Ultrafiolet (UV1)



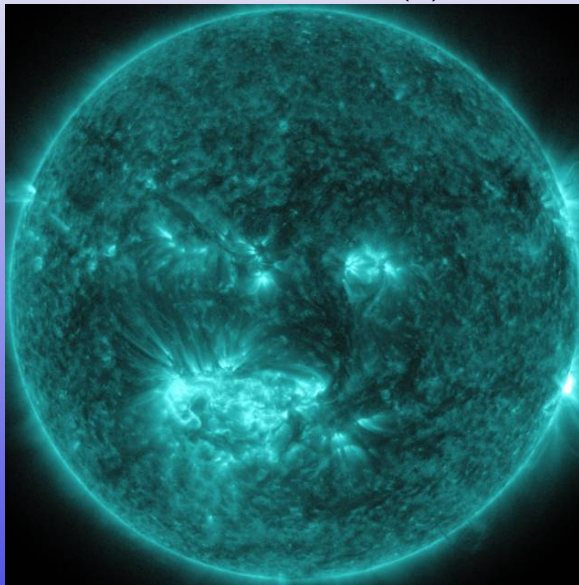
„Powierzchnia” Słońca

Ultrafiolet (UV2)

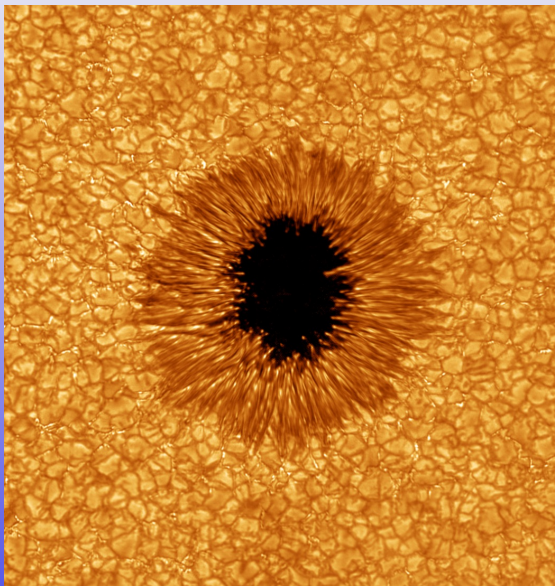


„Powierzchnia” Słońca

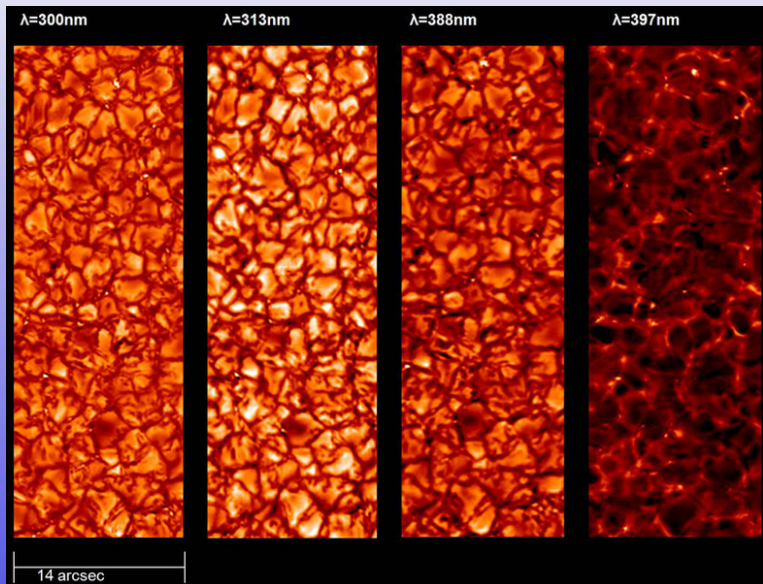
Promieniowanie roentgenowskie (X)



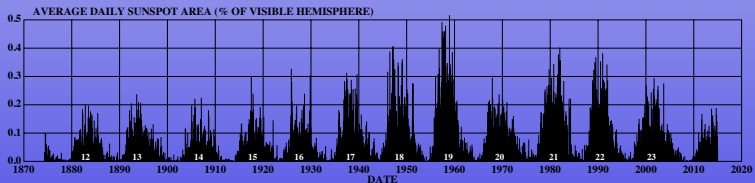
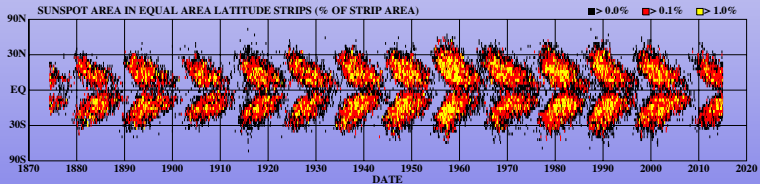
„Powierzchnia” Słońca



„Powierzchnia” Słońca



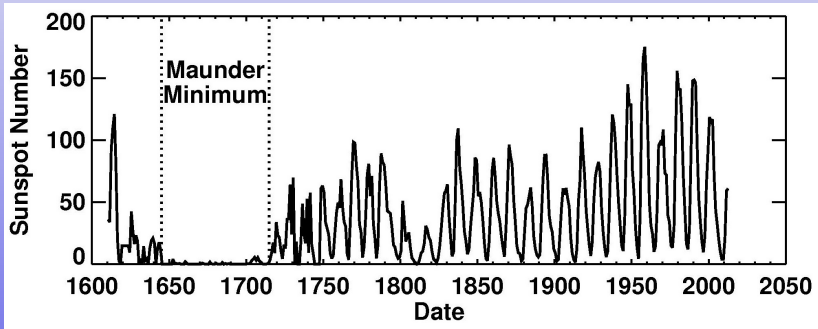
DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS

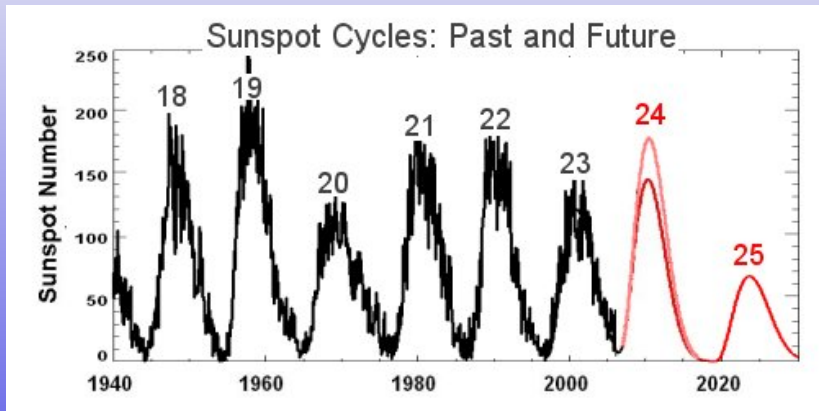


<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/BFLY.PDF>

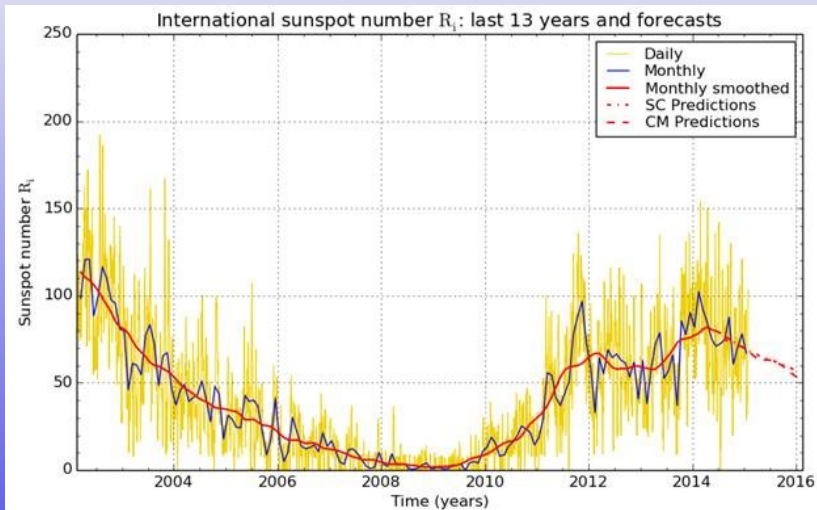
HATHAWAY NASA/ARC 2015/03

Plamy słoneczne





Plamy słoneczne



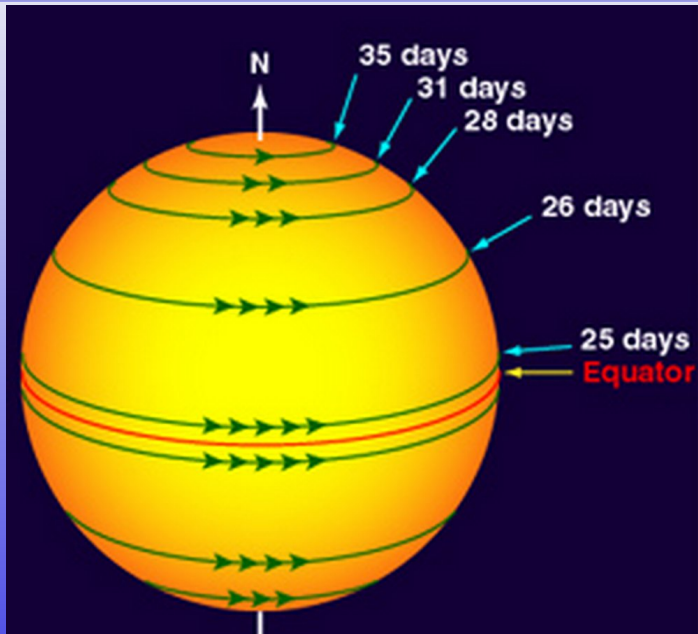
Podstawowe fakty:

- 1 okres obrotu na równiku $T \simeq 25$ dni
- 2 dla porównania: okres orbity tuż nad powierzchnią Słońca

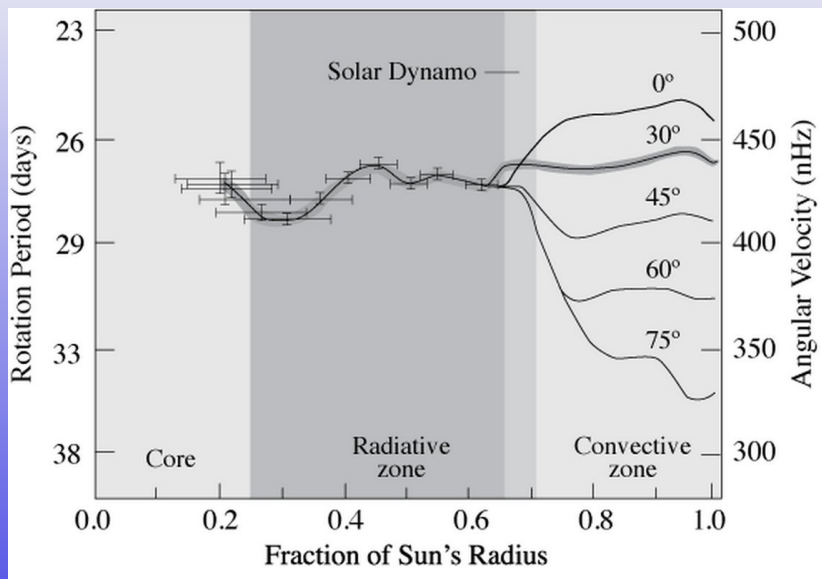
$$2\pi / \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^3}} \simeq 2.7 \text{ godziny}$$

- 3 Słońce obraca się ponad 200 razy wolniej niż to możliwe
- 4 rotacja ma charakter różnicowy: obrót na równiku jest szybszy ($T=25$ dni) niż na biegunach ($T>30$ dni)
- 5 rotacja zmienia się z odległością od centrum

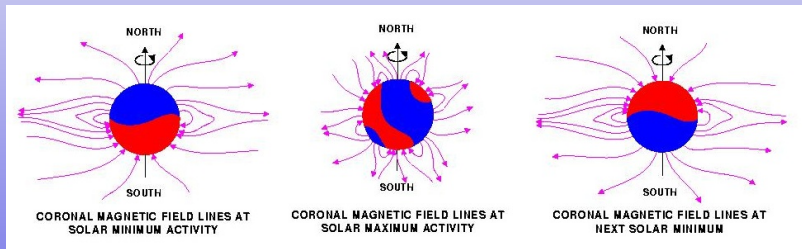
Rotacja Słońca



Rotacja Słońca



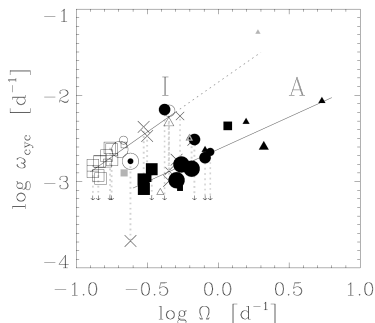
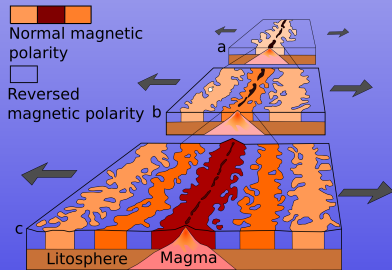
Pole magnetyczne Słońca



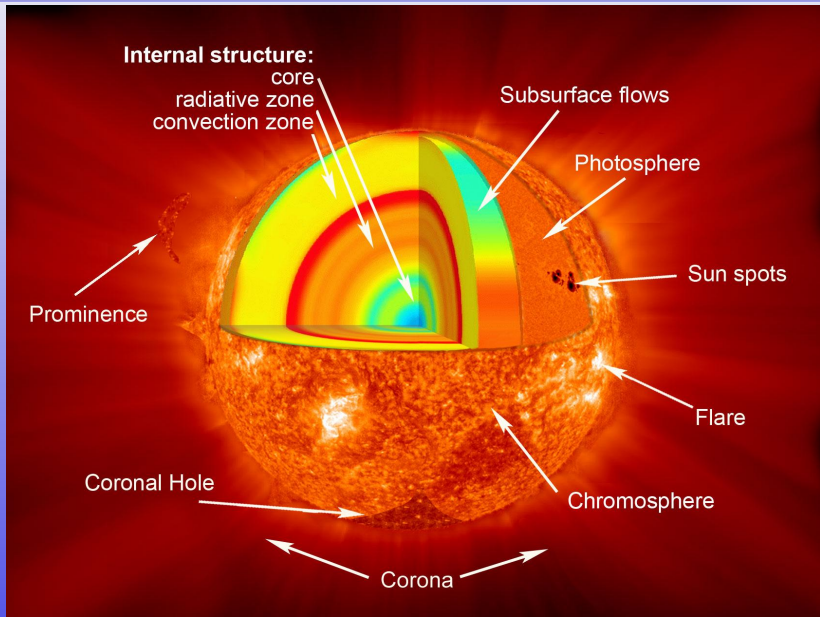
Cykl aktywności Słońca

Pełny cykl aktywności obejmuje dwa maksima aktywności ze zmianą biegunów magnetycznych, po czym pole magnetyczne wraca do pozycji wyjściowej.

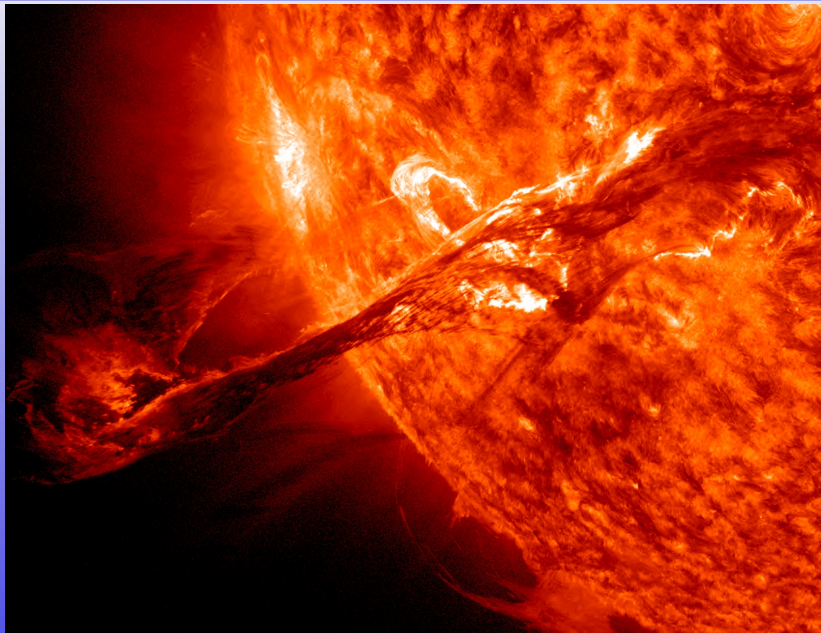
- dla Słońca pełny cykl wynosi $2 \times 11 = 22$ lata
- analogiczne zjawisko przebiegunowania pola magnetycznego Ziemi zachodzi w kwaziperiodyczny sposób z czasem od 700 tysięcy do 2 milionów lat. Ostatnie miało miejsce 780 tys. lat temu.
- podobne zjawisko obserwujemy dla innych gwiazd



Atmosfera Słońca



Wybuchy na Słońcu



Wybuchy na Słońcu

