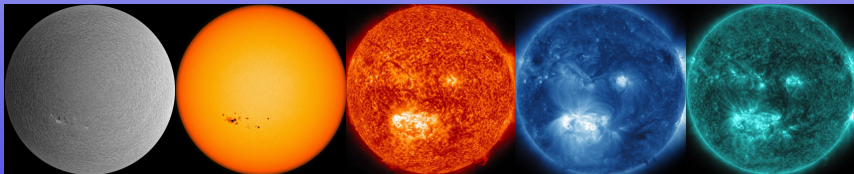


# Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

14 marca 2015



- niewyróżniająca się gwiazda Galaktyki
- ze względu na bliskość kompleksowo przebadana eksperymentalnie i teoretycznie
- stale monitorowana, w niektórych aspektach (np: plamy słoneczne) od kilkuset lat
- występują w niej prawie wszystkie procesy istotne w teorii ewolucji gwiazd
- jest perfekcyjnie sferyczne ( $\Delta R/R \simeq 7 \times 10^{-5}$ ) i bardzo wolno obraca się (raz na miesiąc)

# Słońce: widmo elektromagnetyczne

Słońce z dobrym przybliżeniem promieniuje jak ciało doskonale czarne. Widmo energetyczne (energia fotonu  $E_\gamma = h\nu$ ) promieniowania ma postać Plancka:

$$\frac{dL}{d(h\nu)} = L_\odot \frac{15}{(\pi k T_\odot)^4} \frac{(h\nu)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Temperaturę efektywną  $T_\odot = T_{\text{eff}}$  definiujemy poprzez całkowitą moc promieniowania, tak aby był spełniony wzór Stefana-Boltzmana  $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 T_\odot^4$ .

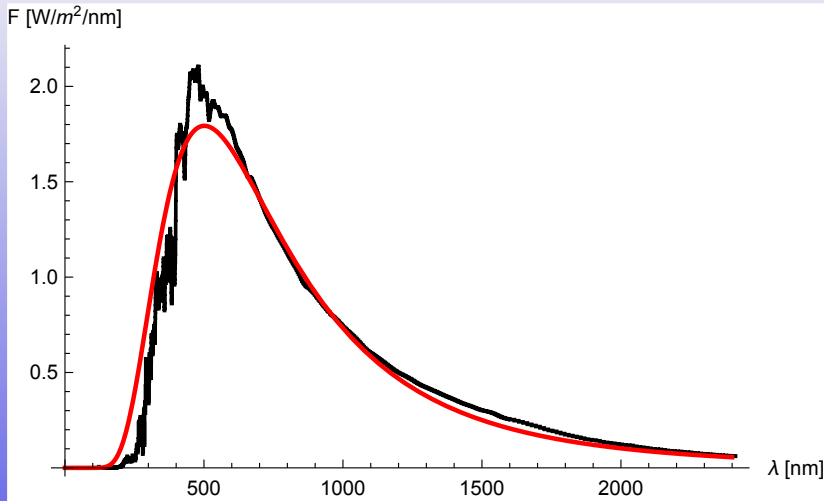
## Stała słoneczna

Natężenie promieniowania w odległości  $d = 1$  AU nazywamy *stałą słoneczną*:

$$\frac{L_\odot}{4\pi d^2} = 1361 \text{ W/m}^2$$

Faktyczna ilość energii na  $\text{m}^2$  docierająca do powierzchni Ziemi jest zmienna i prawie 10 razy mniejsza.

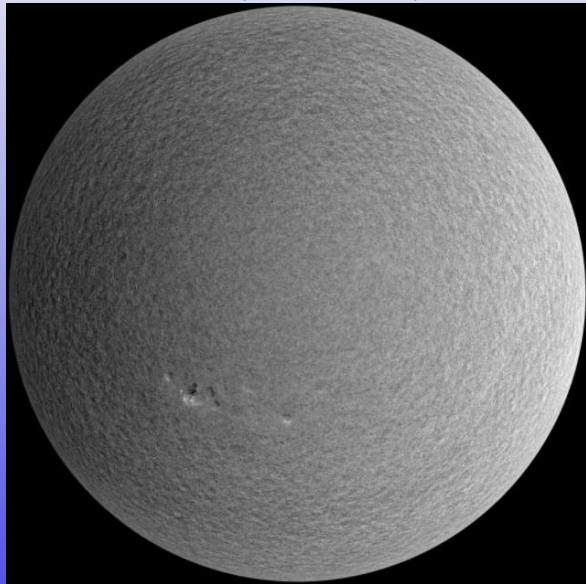
# Widmo termiczne i obserwowane



$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \frac{2\pi hc^2}{\sigma T^4} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, T = 5877 \text{ K}, d = 1 \text{ AU}, L_{\odot} = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

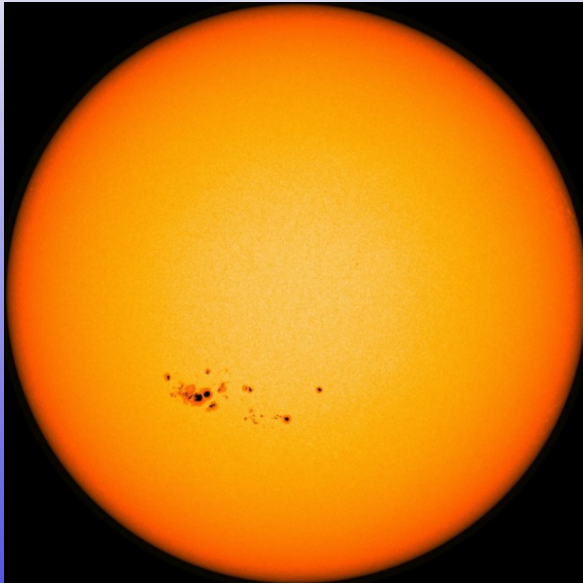
# „Powierzchnia” Słońca

Prędkości radialne (dopplerogram)



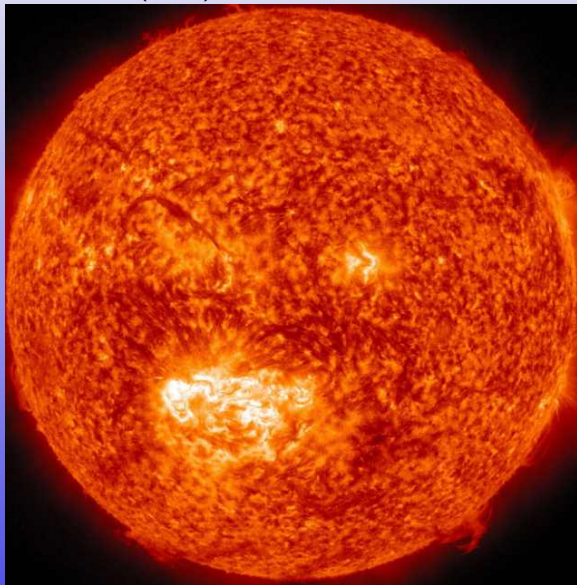
# „Powierzchnia” Słońca

Światło widzialne



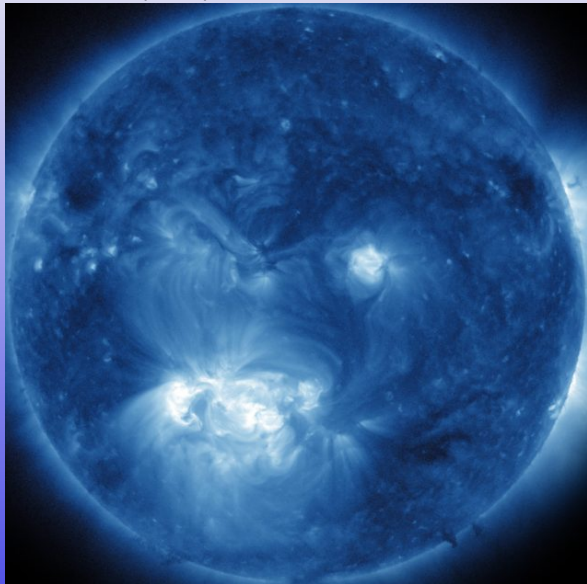
# „Powierzchnia” Słońca

Ultrafiolet (UV1)



# „Powierzchnia” Słońca

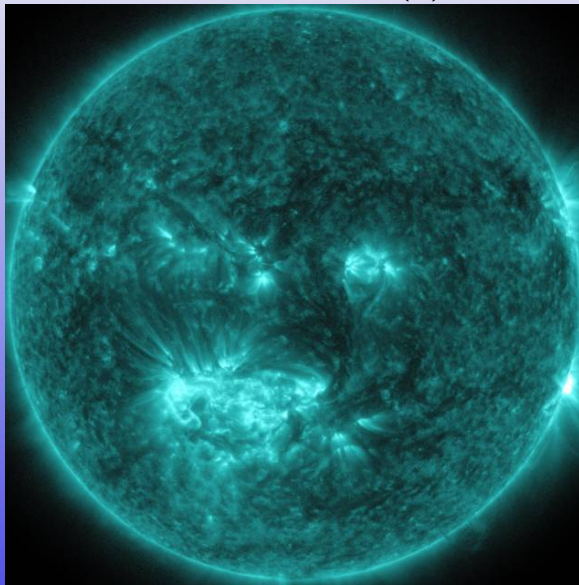
## Ultrafiolet (UV2)



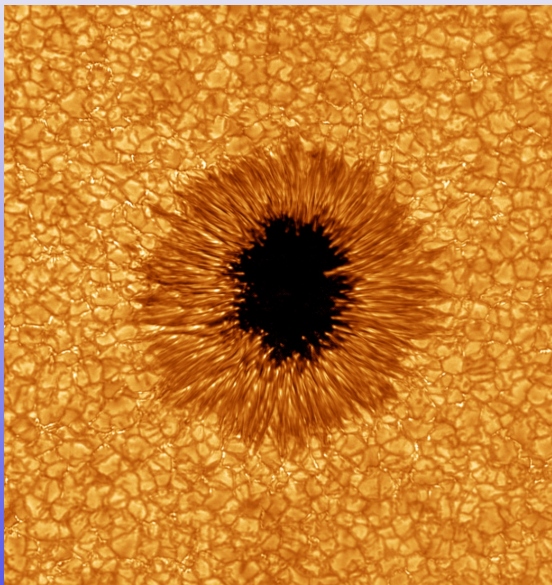


# „Powierzchnia” Słońca

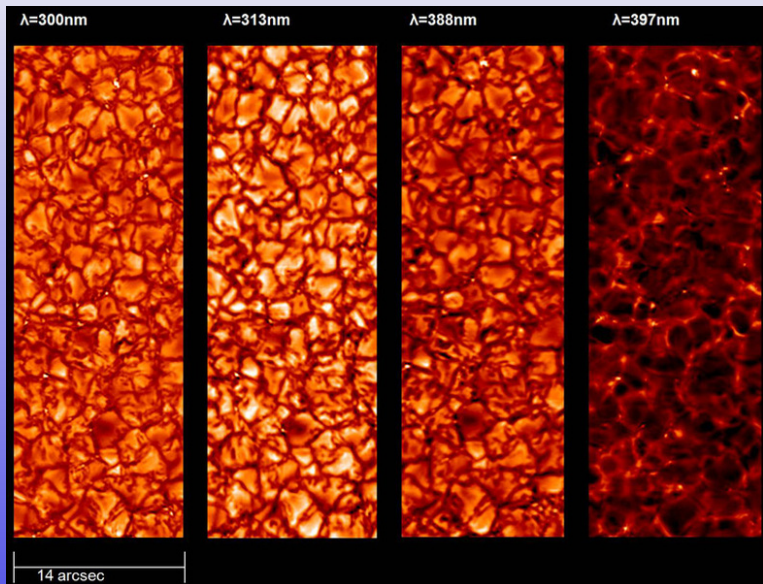
Promieniowanie roentgenowskie (X)



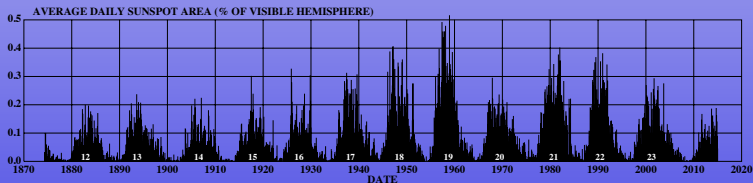
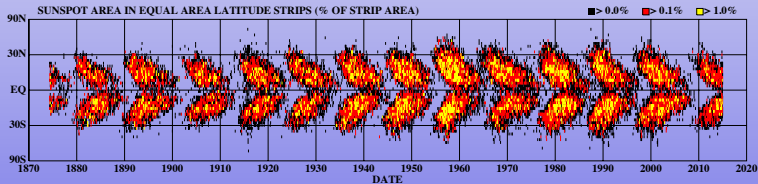
# „Powierzchnia” Słońca



# „Powierzchnia” Słońca



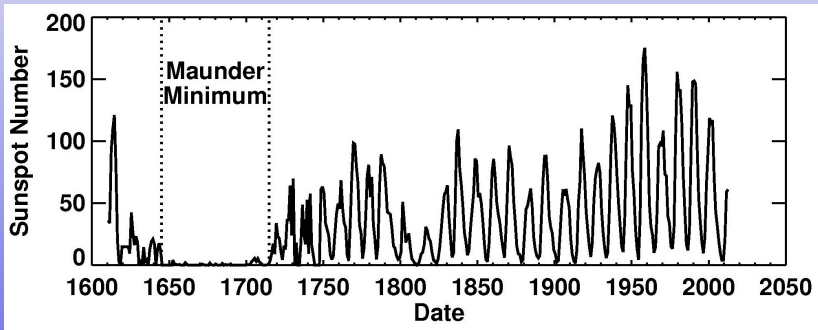
## DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS

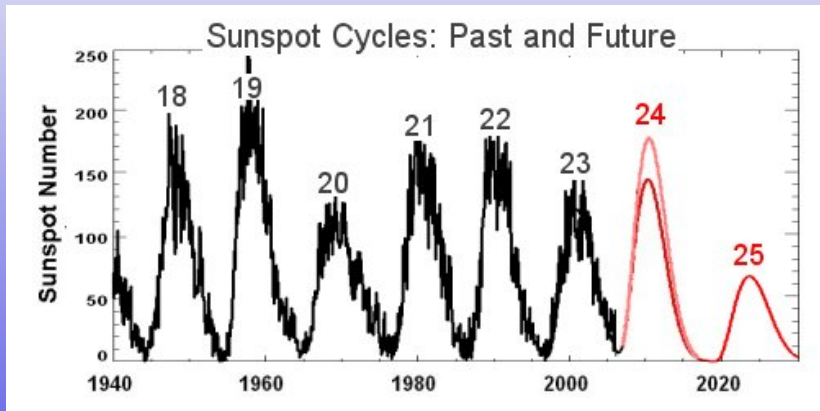


<http://solarscience.nas.nasa.gov/images/BFLY.PDF>

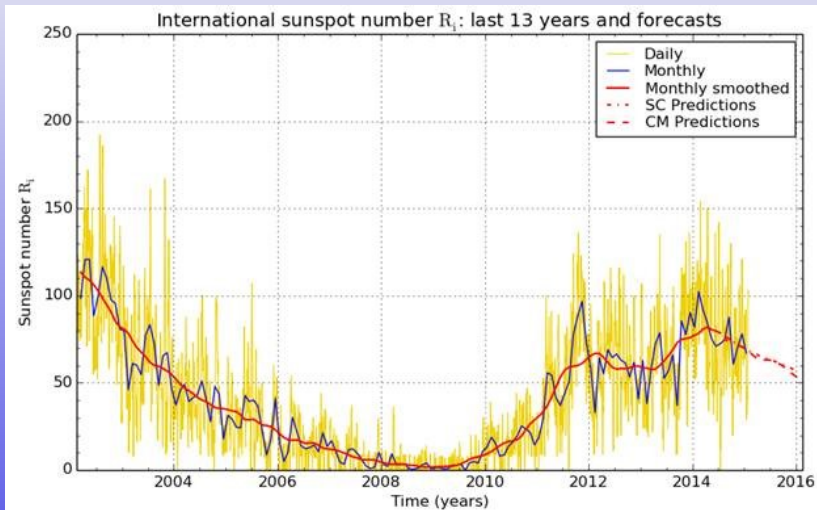
HATHAWAY NASA/ARC 2015/03

# Plamy słoneczne





# Plamy słoneczne



Podstawowe fakty:

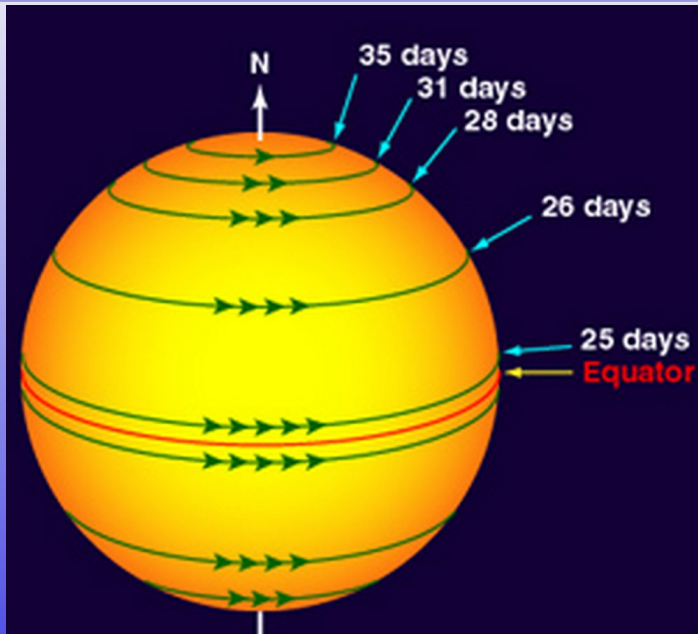
- 1 okres obrotu na równiku  $T \simeq 25$  dni
- 2 dla porównania: okres orbity tuż nad powierzchnią Słońca

$$2\pi / \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^3}} \simeq 2.7 \text{ godziny}$$

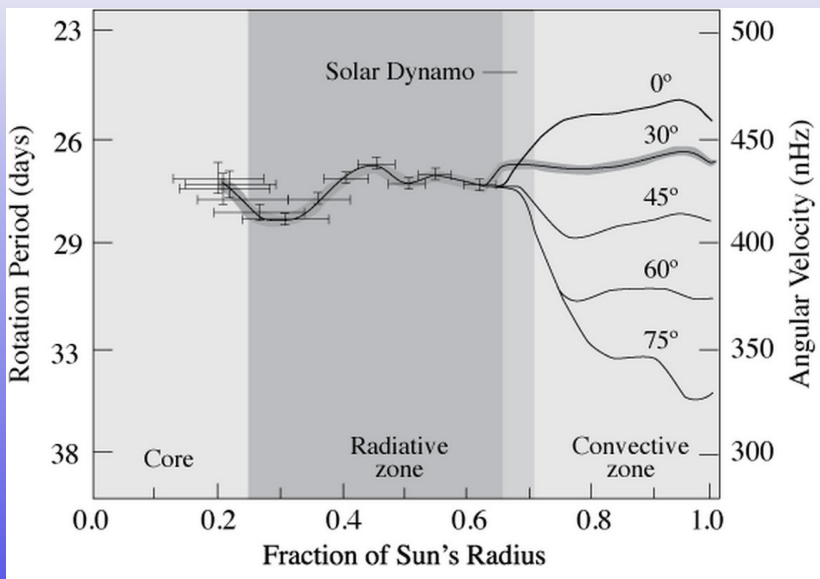
- 3 Słońce obraca się ponad 200 razy wolniej niż to możliwe
- 4 rotacja ma charakter różnicowy: obrót na równiku jest szybszy ( $T=25$  dni) niż na biegunach ( $T>30$  dni)
- 5 rotacja zmienia się z odległością od centrum



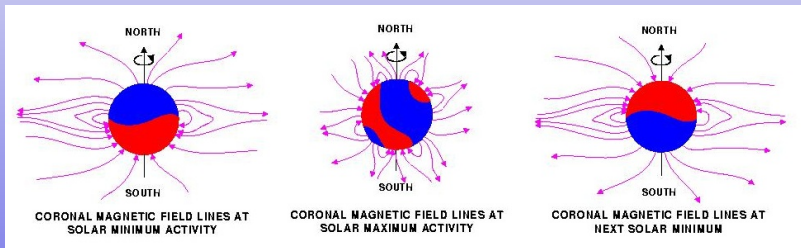
# Rotacja Słońca



# Rotacja Słońca



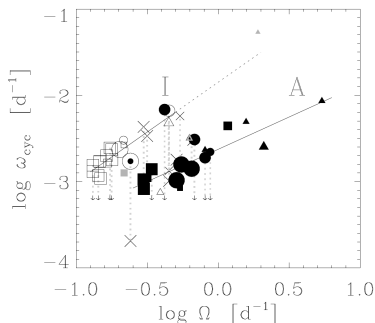
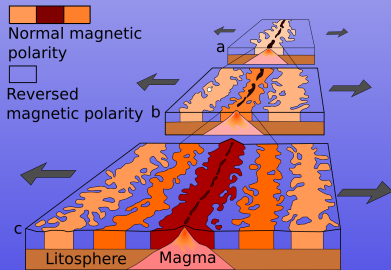
# Pole magnetyczne Słońca



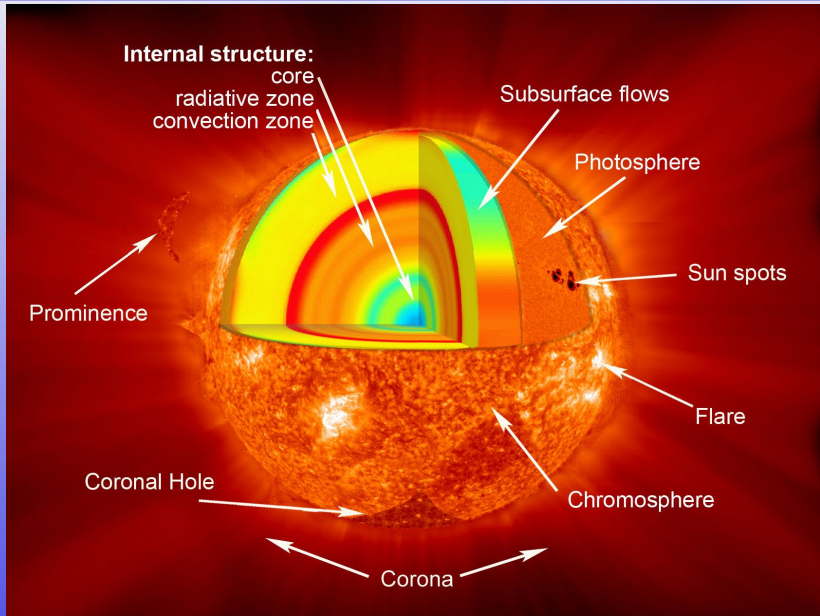
# Cykl aktywności Słońca

Pełny cykl aktywności obejmuje dwa maksima aktywności ze zmianą biegunów magnetycznych, po czym pole magnetyczne wraca do pozycji wyjściowej.

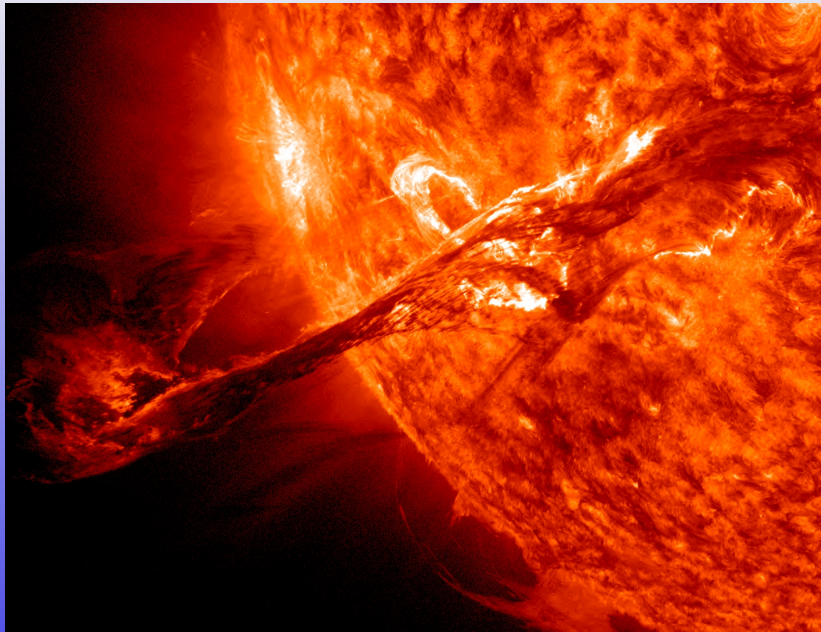
- dla Słońca pełny cykl wynosi  $2 \times 11 = 22$  lata
- analogiczne zjawisko przebiegunowania pola magnetycznego Ziemi zachodzi w kwaziperiodyczny sposób z czasem od 700 tysięcy do 2 milionów lat. Ostatnie miało miejsce 780 tys. lat temu.
- podobne zjawisko obserwujemy dla innych gwiazd



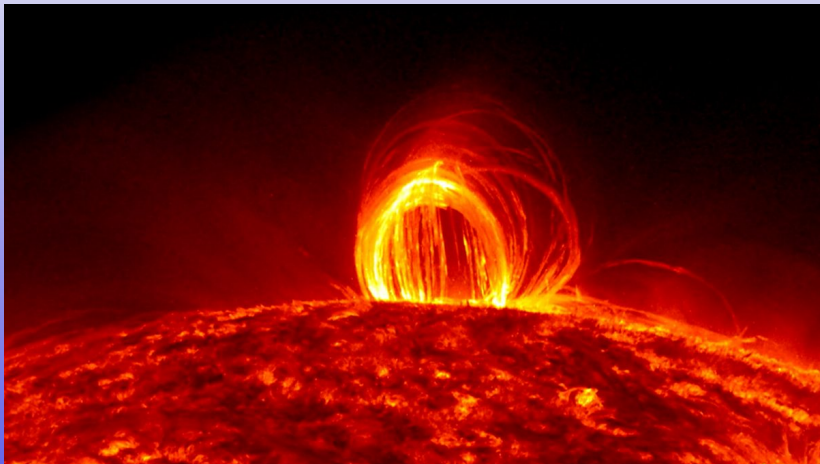
# Atmosfera Słońca



# Wybuchy na Słońcu



# Wybuchy na Słońcu



Zgodnie z prawami termodynamiki energia (ciepło) przepływa od obszarów o temperaturze wyższej do obszarów o temperaturze niższej. Strumień energii  $F$  jest proporcjonalny do różnicy temperatur  $T$ :

$$F \propto - \frac{dT}{dr}$$

- w typowych sytuacjach astrofizycznych temperatura spada w miarę oddalania się od centrum.
- powyższe nie jest prawem, istnieją wyjątki
- współczynnik proporcjonalności jest funkcją zależną od składu „chemicznego” materii  $X_i$ , temperatury, gęstości, ciśnienia i zjawisk odpowiedzialnych za przepływ energii
- najważniejsze procesy odpowiedzialne za przepływ energii to:
  - 1 transport promienisty
  - 2 konwekcja
  - 3 przewodnictwo cieplne



# Transport promieniowania

Pod pojęciem promieniowania rozumiemy cząstki „bezmasowe”, poruszające się z prędkością światła  $c$ :

- 1 fotony  $\gamma$  (przede wszystkim)
- 2 neutrina  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$  (w ekstremalnych sytuacjach: supernowe typu implozyjnego, protogwiazdy neutronowe, dyski akrecyjne wokół czarnych dziur)

Pełny opis promieniowania wymaga podania w każdym punkcie gwiazdy  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  rozkładu prawdopodobieństwa  $f$  kątów pod jakimi poruszają się fotony i rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów. Daje to w sumie sześć zmiennych, a obliczenia uwzględniające je wszystkie określamy jako *symulacje 6D*.

Konieczne jest rozwiązanie równania transportu Boltzmanna:

$$\frac{\partial f}{c \partial t} + \vec{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{reakcje z fotonami}$$

W praktyce często możliwe jest drastyczne uproszczenie powyższego opisu.

# Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)

Warunki panujące wewnątrz Słońca:

- 1 średnia droga swobodna fotonu  $L_\gamma \sim 2$  cm, wynikająca głównie z rozpraszania na swobodnych elektronach pochodzących ze zjonizowanego wodoru
- 2 średni spadek temperatury na drodze od centrum  $T_c \simeq 10^7$  K do powierzchni  $T \simeq 5800$  K:

$$\frac{T_c - T_\odot}{R_\odot} \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$$

Wnioski są następujące:

- 1 układ jest niemal w równowadze termicznej
- 2 promieniowanie ciała doskonale czarnego (gaz fotonowy) jest poprawnym opisem rozkładu prawdopodobieństwa energii fotonów
- 3 strumień energii emitowany na zewnątrz i do wewnątrz w odległości  $L_\gamma$  kasuje się z dokładnością około  $\sigma \Delta T^4 \sim 10^{-10}$

W stanie LTE (Local Thermodynamic Equilibrium) transport fotonów można rozpatrywać przynajmniej z dwóch punktów widzenia:

- 1 jako proces dyfuzji gazu fotonowego pomiędzy rejonami o różnej gęstości fotonów
- 2 jako proces błędzenia przypadkowego fotonu

Pierwszy z opisów jest wygodniejszy z punktu widzenia równań struktury i ewolucji gwiazdy, drugi jest bardziej ilustratywny i pozwala powiązać makroskopowy współczynnik dyfuzji z mikroskopowymi procesami oddziaływania fotonów z materią (przekrojami czynnymi).

## Rozkład Bosego-Einsteina

W równowadze termodynamicznej, prawdopodobieństwo znalezienia fotonu (bezmasowego bozonu o spinie 1) w stanie o energii  $E_\gamma$  jest opisane rozkładem Bosego-Einsteina:

$$f(E_\gamma) = \frac{g}{e^{\frac{E_\gamma}{kT}} - 1}$$

gdzie czynnik  $g = 2$  pochodzi od 2 stanów polaryzacyjnych fotonu,  $kT$  - energia termiczna wyrażona jako iloczyn stałej Boltzmann'a  $k$  i temperatury w skali bezwzględnej  $T$ .

Całkowita ilość  $N$  fotonów w objętości  $V$  wynosi ( $E_\gamma = h\nu = \hbar\omega = pc$ ):

$$n \equiv \frac{N}{V} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(E_\gamma) \frac{d^3p}{h^3} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{e^{pc/kT} - 1} = \frac{8\pi(kT)^3}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{e^z - 1}$$

Ostatnia całka wynosi  $2\zeta(3)$  co dalej niewiele nam nie mówi, chyba że znamy wartości funkcji  $\zeta$  Riemanna.

Analogicznie obliczamy gęstość energii:

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{V} = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4 \equiv a T^4$$

$$n \equiv \frac{N}{V} = \frac{16\pi\zeta(3)k^3}{h^3 c^3} T^3$$

Dzieląc  $\varepsilon$  przez  $n$  otrzymujemy średnią energię fotonu:

$$\langle E_\gamma \rangle = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} kT \simeq 2.7kT.$$

Ciśnienie można obliczyć z potencjału termodynamicznego  $\Omega$ :

$$\Omega(V, T) = -pV = kT \frac{4\pi V}{h^3} g \int_0^\infty p^2 \ln \left( 1 - e^{-\frac{pc}{kT}} \right) dp$$

Po obliczeniu całki dostajemy równanie stanu gazu fotonowego:

$$p = \frac{\varepsilon}{3}$$

Celem kolejnych rachunków jest wyprowadzenie związku pomiędzy współczynnikiem dyfuzji  $D$  energii gazu fotonowego a średnią drogą swobodną w procesie błędzenia przypadkowego fotonu. Kolejno przedstawiane kroki rozumowania to:

- 1 analityczne rozwiązanie równania dyfuzji o współczynniku  $D$  w przypadku „fotonów” początkowo skoncentrowanych w  $\vec{r} = 0$  (rozptywający się pik gaussowski)
- 2 numeryczne zasymulowanie procesu błędzenia fotonów ze średnią drogą swobodną  $L_\gamma$  zaczynając od  $\vec{r} = 0$
- 3 wywnioskowanie analitycznej postaci rozkładu prawdopodobieństwa w zależności od ilości skoków dla dużej liczby fotonów (rozkład normalny/Gausa)
- 4 przeliczenie liczby kroków  $k$  na czas  $ct = kL_\gamma$
- 5 porównanie wyników

Oczekiwany wynik to:

$$D = \frac{1}{3} c L_\gamma$$

# Dyfuzja fotonów: równanie dyfuzji

Równanie opisujące zachowanie energii ma postać:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \vec{F} = 0, \quad \vec{F} = -D \nabla \varepsilon$$

gdzie  $\vec{F}$  to strumień energii. Łącząc powyższe dostajemy równanie dyfuzji:

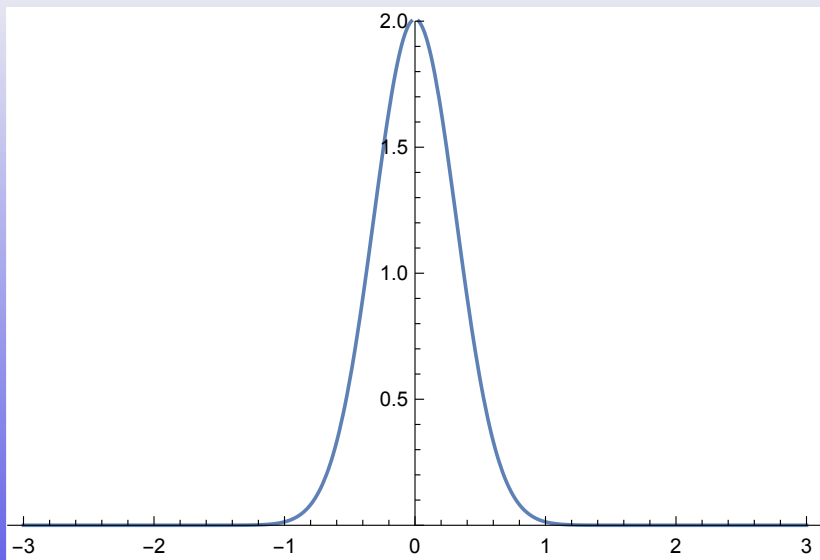
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = D \Delta \varepsilon$$

gdzie  $D$  to współczynnik dyfuzji, a  $\Delta \varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$  to operator Laplace'a w 3D.

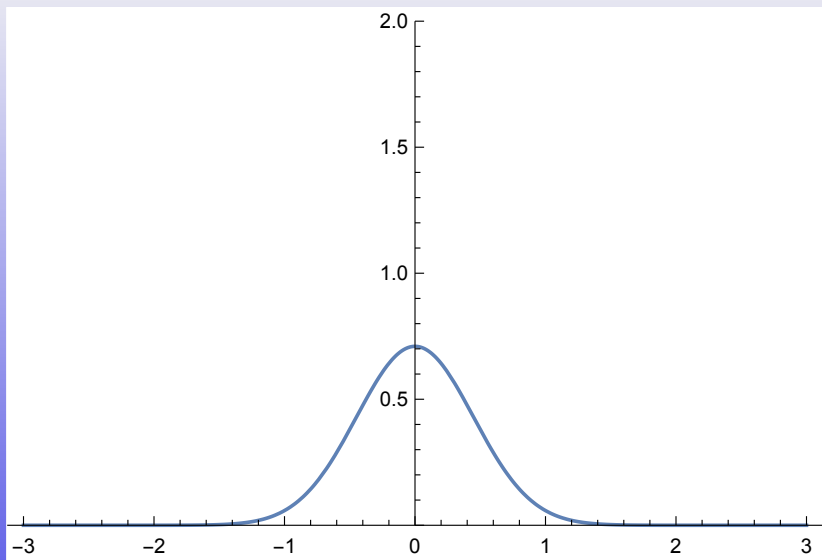
Funkcja Greena równania dyfuzji w  $N$  wymiarach:

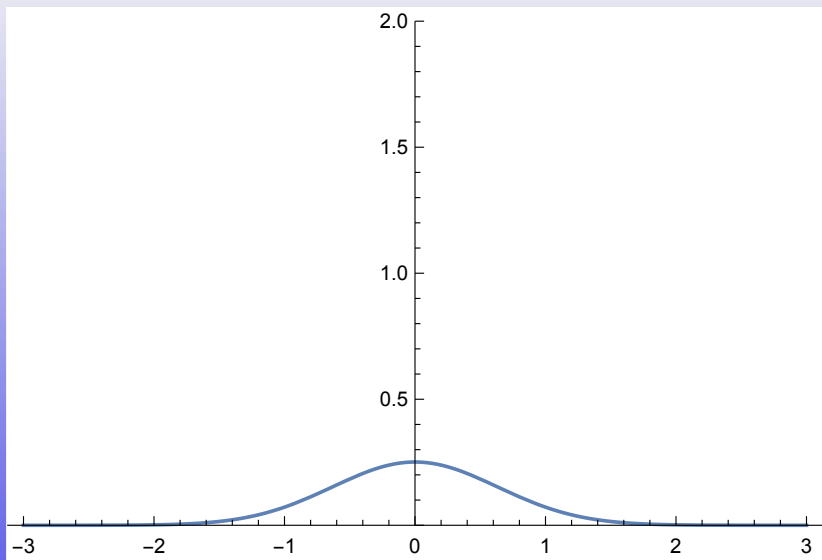
$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}^N}$$

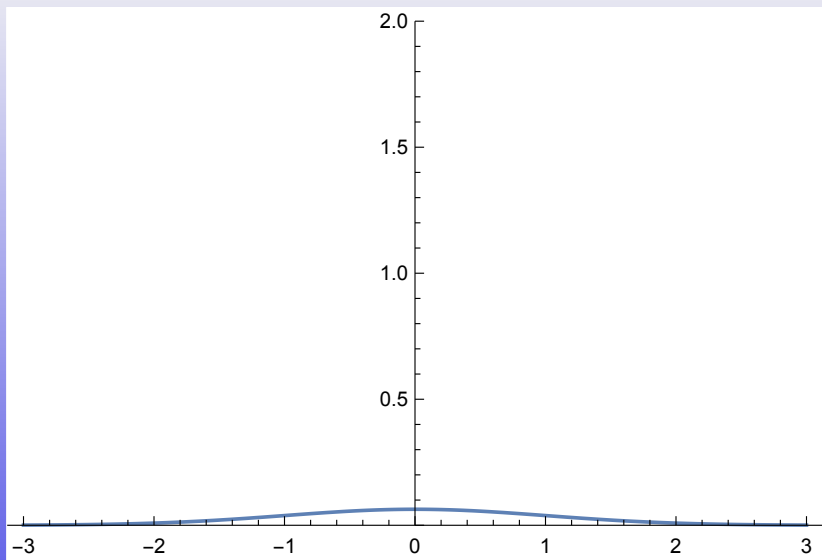
opisuje „rozpływanie” się skoncentrowanej początkowo w  $\vec{r} = \vec{0}$  energii.











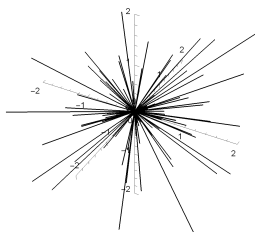
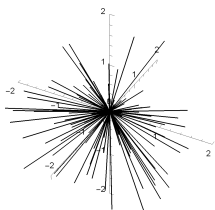
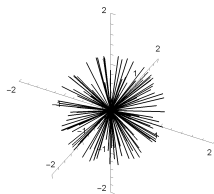
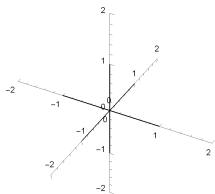
# Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe

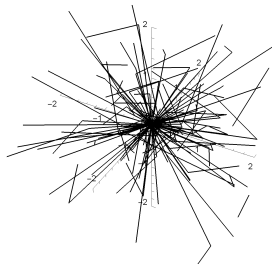
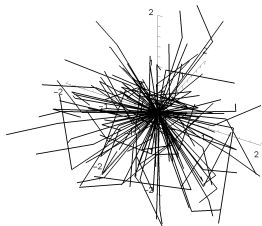
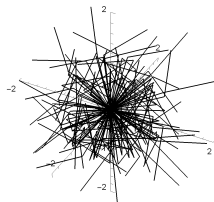
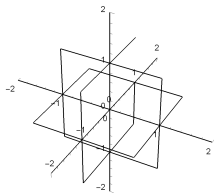
Zamiast dyfuzji, możemy rozważyć proces *błędzenia przypadkowego* fotonów, wykonujących skoki o średniej długości swobodnej  $L_\gamma$  w przypadkowych kierunkach.

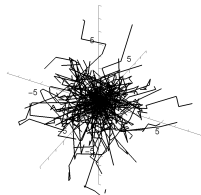
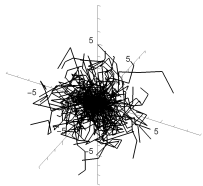
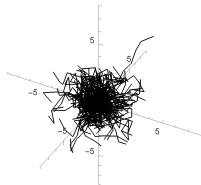
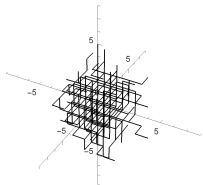
Aby powiązać dyskretny proces z ciągłym, zauważamy, że skok fotonu na odległość  $L_\gamma$  wymaga czasu  $\Delta t$ , gdzie:

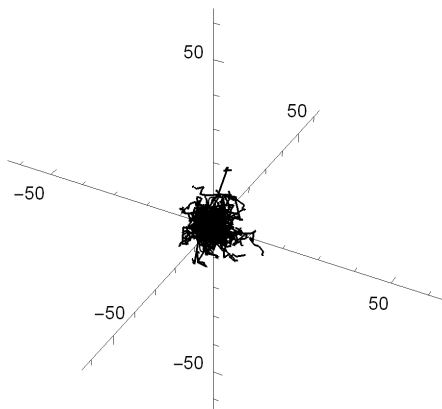
$$c\Delta t = L_\gamma,$$

gdzie  $c$  to prędkość światła w próżni. Czyli po  $k$ -tym przeskoku w błędzeniu przypadkowym upływa czas  $t = k\frac{L_\gamma}{c}$ .

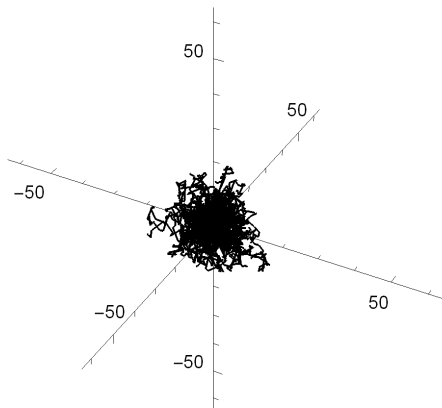


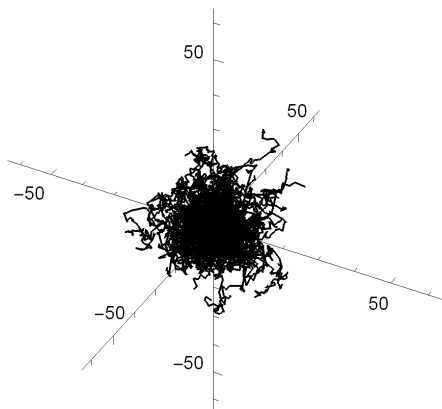


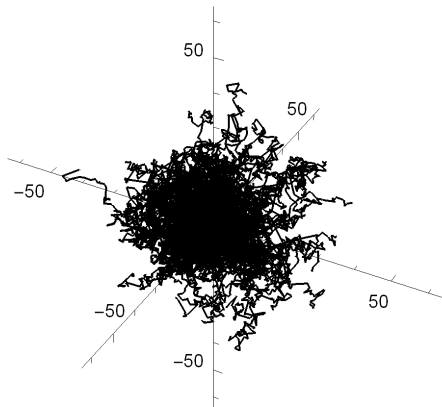


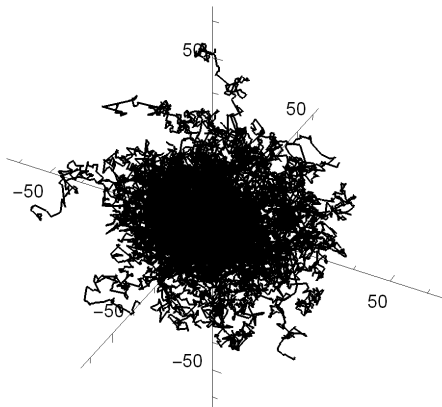


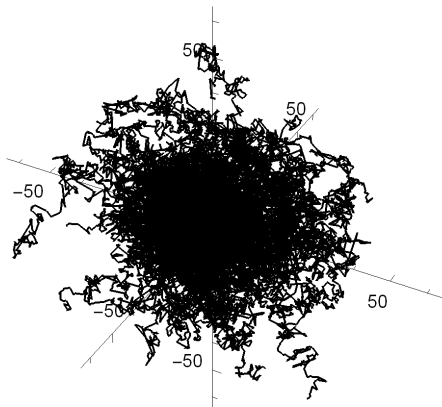












# Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe

W teorii błędzenia przypadkowego dowodzi się, że prawdopodobieństwo przyjmuje w granicy postać rozkładu Gaussa. Przez porównanie, współczynnik dyfuzji  $D$  w 3 wymiarach to:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{6\Delta t} = \frac{1}{6} L_\gamma \frac{L_\gamma}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{6\Delta t} = \frac{1}{6} q c L_\gamma$$

gdzie  $L_\gamma/\Delta = c$  oraz:

$$\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle^2 + \sigma^2, \quad q > 0.$$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa długości skoku to:

- średnia  $\langle r \rangle = L_\gamma$
- wariancja  $\sigma$

Jeżeli wariancja jest proporcjonalna do średniej długości swobodnej  $L_\gamma$ , to jej wpływ można zaabsorbować do współczynnika liczbowego  $q$ .

# Współczynnik dyfuzji w błędzeniu przypadkowym

Przykłady o różnych rozkładach długości skoku (średnia zawsze wynosi  $L_\gamma$ ):

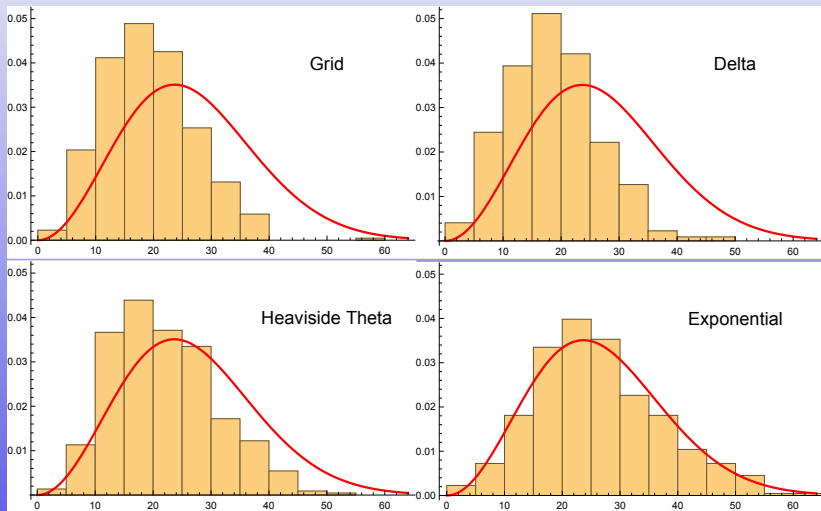
- skoki o jednakowej długości:  $P(r) = \delta(r - L_\gamma)$ ,  $\sigma = 0$ ,  $q = 1$
- skoki o długości od zera do  $2L_\gamma$  i równomiernym rozkładzie:  
 $P(r) = \Theta(2L_\gamma - r)/(2L_\gamma)$ ,  $\sigma = L_\gamma/\sqrt{3}$ ,  $q = 4/3$
- rozkład wykładniczy („Poissona”)  $P(r) = e^{-r/L_\gamma}/L_\gamma$ ,  $\sigma = L_\gamma$ ,  
 $q = 2$

Tylko dla rozkładu wykładniczego (eksponencjalnego) średnia i wariancja są sobie równe i wynoszą  $\langle r \rangle = \sigma = L_\gamma$  co daje  $q = 2$  i **podwojony** współczynnik dyfuzji:

$$D = \frac{1}{3} L_\gamma c$$

Inne, poprawne wyprowadzenie powyższego wzoru polega na przybliżaniu równania transportu promieniowania.

# Dyfuzja fotonów: błędzenie przypadkowe vs dyfuzja





# Przekrój czynny a średnia droga swobodna

Porównanie równania dyfuzji z błędzeniem przypadkowym pozwala nam jednoznacznie powiązać makroskopowy proces dyfuzji energii promienistej, opisany współczynnikiem dyfuzji  $D$ , z mikroskopowym procesem oddziaływania fotonów z materią, opisany średnią drogą swobodną  $L_\gamma$ .

## Strumień energii

$$F_\gamma = -D \frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4}{3}acL_\gamma T^3 \frac{dT}{dr}, \quad D = \frac{1}{3}L_\gamma c$$

Standardowo prawdopodobieństwo oddziaływania „fotonu” z tarczą opisujemy za pomocą *przekroju czynnego*:

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma n}$$

gdzie:  $n$  - gęstość „atomów” tarczy,  $\sigma$  - całkowity przekrój czynny na oddziaływanie (zderzenie, absorpcja).

Obliczanie przekrojów czynnych to standardowe zadanie fizyki cząstek elementarnych, jądrowej i atomowej.

W Słońcu istotne są następujące procesy z udziałem fotonów:

- 1 rozpraszanie na swobodnych elektronach, (przekrój czynny Thomsona):

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} \simeq 6.65 \times 10^{-29} m^2$$

- 2 procesy atomowe: przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi lub/i stanami swobodnymi

$$\sigma = \sigma(E_\gamma)$$

# Średnia nieprzeźroczystość Rosselanda

Średnią długość swobodną można wyrazić także za pomocą *nieprzeźroczystości*  $\kappa$  i gęstości  $\rho$ :

$$L_{\gamma} = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

W praktyce używa się średniej harmonicznej ważonej **pochną temperaturową rozkładu Plancka**:

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^{\infty} \frac{\partial B(x)}{\partial T} \frac{dx}{\sum_i \kappa_i(x)}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

gdzie:

$$\frac{\partial B(x)}{\partial T} = \frac{15}{\pi^4} \frac{4}{\sinh^2(x/2)}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe procesy, atomy i ich stany zjonizowane.

Znajomość wszystkich procesów atomowych pozwala na obliczenie nieprzeźroczystości materii o znanym składzie chemicznym i stopniu jonizacji.

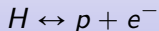
W astrofizyce atomy dzielimy typowo na:

- wodór  $X$
- hel  $Y$
- „metale”  $Z$ , czyli wszystko co w tabelicy Mendelejewa znajduje się dalej niż helem

Dla centrum Słońca (obecnie!):  $X = 0.34$ ,  $Y = 0.64$ ,  $Z = 0.02$ .

Zawartość „metali” jest niewielka, ale ma kluczowy wpływ na nieprzeźroczystość.

Rozważmy rozpad atomu wodoru na proton i elektron:



W równowadze, potencjały chemiczne muszą spełniać:

$$\mu_H = \mu_p + \mu_{e^{-}}$$

Dla klasycznego gazu doskonałego:

$$\mu = mc^2 + kT \ln \left( \frac{n}{g} \lambda^3 \right)$$

gdzie  $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$  to *termiczna długość fali de Broglie'a*.  
Wstawiając wzór na  $\mu$  do równania równowagi otrzymujemy  
równanie Saha:

$$\frac{n_p n_{e^{-}}}{n_H} = \frac{g_p g_{e^{-}}}{g_H} \frac{1}{\lambda_e^3} e^{-\frac{Q}{kT}}$$

gdzie energia wiązania/jonizacji  $Q = (m_H - m_p - m_{e^{-}})c^2$ .

# Równanie jonizacji: przykład rozwiązania

Z zasady zachowania ładunku (przy braku obecności innych jąder atomowych!) możemy podstawić  $n_e = n_p$ . Sumaryczna gęstość  $n_p + n_H = \rho/m_H$ , co daje prosty algebraiczny układ równań do rozwiązania:

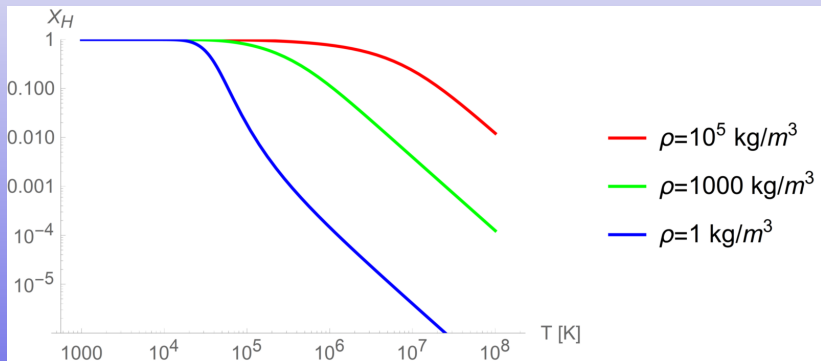
$$\begin{cases} \frac{n_p^2}{n_H} = \frac{2h^3}{\sqrt{2\pi m_e kT}^3} e^{\frac{E_0}{kT}} \\ n_p + n_H = \rho/m_H \end{cases}$$

gdzie  $E_0 = -13.6 \text{ eV} = eE_0 \text{ J}$  ( $e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  - ładunek elektronu) to energia jonizacji/wiązania atomu wodoru.

Wprowadzając zawartość protonów  $X_p \equiv n_p/n$  oraz atomów wodoru  $X_H = n_H/n$  problem można sprowadzić do równania kwadratowego:

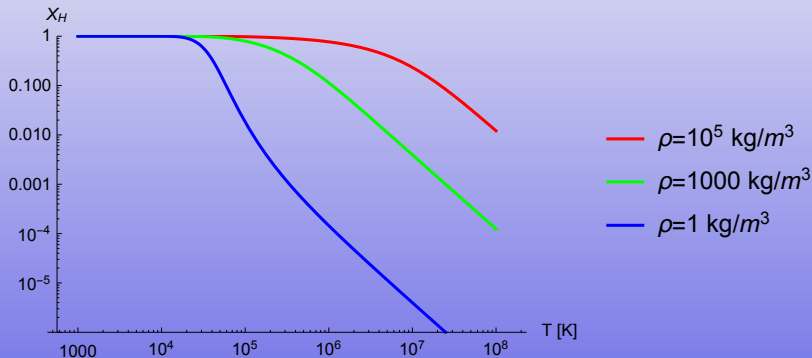
$$\frac{X_p^2}{1 - X_p} = f(\rho, T), \quad f \propto \frac{T^{3/2} e^{-E_0/(kT)}}{\rho}$$

# Równanie jonizacji: przykład rozwiązania



Atomy wodoru „stykają się” już dla  $\rho > 1600 \text{ kg/m}^3$ .

# Równanie jonizacji: przykład rozwiązania



Atomy wodoru „stykają się” już dla  $\rho > 1600 \text{ kg/m}^3$ .