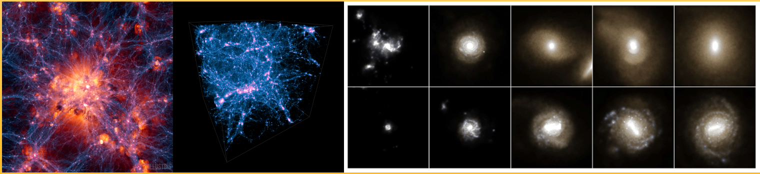
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

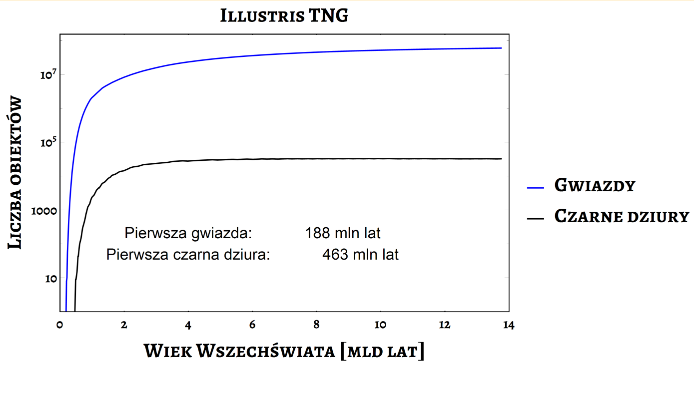
Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

10 kwietnia 2018



Pierwsza gwiazda i pierwsza czarna dziura

1. kosmos składa się ciągle z ATOMÓW wodoru (75% masy) i helu (25% masy)
2. grawitacyjna ewolucja cząstek ciemnej materii tworzy niejednorodności



Czarne dziury i gwiazdy pierwszymi i kluczowymi obiektami we Wszechświecie

Czarne dziury i gwiazdy

Gwiazdy

Pierwsze obiekty stacjonarne (prawie statyczne) we Wszechświecie!

1. kontrast gęstości $\Delta\rho/\rho$ przekracza wartość krytyczną ~ 0.1
2. obszar zapada się dynamicznie
3. obszar kurczy się kwazistatycznie, wyświecając energię grawitacyjną
4. w centrum dochodzi do zapłonu reakcji termojądrowych - powstaje gwiazda

Równowaga hydrostatyczna

Równanie równowagi hydrostatycznej *płynu* w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g w jednym wymiarze:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \tag{1}$$

gdzie: $P(r)$ – zależność ciśnienia od promienia r, $\rho(r)$ – gęstość, g – przyspieszenie grawitacyjne.

Ważne!

Trzy niewiadome funkcje P, ρ, g są powiązane – znając rozkład gęstości można obliczyć g.
Aby problem stał się rozwiązywalny, potrzebujemy dodatkowego równania wiążącego dwie niewiadome funkcje $P(r)$ oraz $\rho(r)$. Nazywamy ją **równaniem stanu** (ang. *Equation Of State*), w skrócie **EOS**.

Równanie stanu

Równanie stanu, zapisywana zwykle jako abstrakcyjna algebraiczna funkcja np: $p = p(\rho)$ zależy w ogólności od temperatury i składu „chemicznego”/jonizacji. Astrofizycy posługują się kilkunastoma różnymi równaniami stanu. Najważniejsze to:

- gaz doskonały, $pV = NkT$

  Wymiarem [kT] jest **energia**, wymiarem ciśnienia [p] jest **gęstość energii**.

- gaz fermionowy, np: elektronowy
- gaz bozonowy, np: fotonowy
- politropowe równanie stanu $p = K\rho^{\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}$
- r. Van der Waalsa $(p + 3\rho^2)(1/\rho - 1/3) = \frac{8}{3}T$

W realistycznych obliczeniach EOS ma postać sporych rozmiarów tablicy liczb, która podlega interpolacji. Wartości są miksem wyników eksperymentalnych i zaawansowanych obliczeń teoretycznych.

Równanie stanu gazu doskonałego

$$pV = NkT$$

p – ciśnienie, V – objętość, N - liczba cząsteczek gazu, $k = 1.380662 \cdot 10^{-23}$ J/K – stała Boltzmana, T – temperatura w skali bezwzględnej (w Kelwinach)
Interesuje nas sprowadzenie EOS do postaci $p = f(\rho)$. Korzystamy z równości:

$$\text{masa gazu} = \rho V \equiv N\, m$$

gdzie: m – masa jednej cząsteczki gazu, ρ – gęstość.

$$p = \frac{kT}{m}\, \rho$$

Dla $T = const$ otrzymujemy **izotermiczne równanie stanu:**

$p = c_s^2\, \rho, \quad c_s \equiv \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ $\quad c_s$–prędkość dźwięku ($\simeq$ prędkość atomó

Mieszanina H i He

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

1. skład „chemiczny” gazu
2. masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
3. stopień jonizacji/dysocjacji

1. 75% wodoru (H), 25 % helu (^{4}He)
2. $m_{\mathrm{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to głównie (?? %) ^{1}H, $m_{\mathrm{He}} \simeq 4 m_p$, skład izotopowy to głównie (?? %) ^{4}He.
3. dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{X_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{H}}} + \frac{X_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{He}}}\right) = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4}\right) = \frac{13}{16}\frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** x2.

Mieszanina H i He

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

1. skład „chemiczny” gazu
2. masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
3. stopień jonizacji/dysocjacji

1. 75% wodoru (H), 25 % helu (^{4}He)
2. $m_\mathrm{H} \simeq m_p$, skład izotopowy to głównie (?? %) ^{1}H, $m_\mathrm{He} \simeq 4 m_p$, skład izotopowy to głównie (?? %) ^{4}He.
3. dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{X_\mathrm{H}}{A_\mathrm{H}} + \frac{X_\mathrm{He}}{A_\mathrm{He}}\right) = \frac{\rho k T}{m_p}\left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4}\right) = \frac{13}{16}\frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** x2.

Mieszanina H i He

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

1. skład „chemiczny” gazu
2. masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
3. stopień jonizacji/dysocjacji

1. 75% wodoru (H), 25 % helu (^{4}He)
2. $m_{\mathrm{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to głównie (?? %) ^{1}H, $m_{\mathrm{He}} \simeq 4 m_p$, skład izotopowy to głównie (?? %) ^{4}He.
3. dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p} \left(\frac{X_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{H}}} + \frac{X_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{He}}} \right) = \frac{\rho k T}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** x2.

Gaz fotonowy

$$P = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4$$

Mieszanina fotonów i gazu doskonałego: Standardowy model Eddingtona

Zakładamy, że stosunek ciśnienia gazu fotonowego P_{rad} do ciśnienia gazu doskonałego P_{gaz} jest stały:

$$\frac{P_{\mathrm{rad}}}{P_{\mathrm{gaz}}} = \frac{\beta}{1-\beta} = const$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \\ P_{\mathrm{gaz}} = \frac{k}{m}\, \rho T \\ \frac{P_{\mathrm{rad}}}{P} = \beta \\ P_{\mathrm{rad}} + P_{\mathrm{gaz}} = P \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $P, P_{\mathrm{rad}}, P_{\mathrm{gaz}}, T$. Po wyeliminowaniu temperatury otrzymujemy równanie stanu w postaci barotropowej, t.j. zawierającej wyłącznie ciśnienie P, gęstość ρ i stałe fizyczne lub „materiałowe":

$$P = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{a}} \left(\frac{k\rho}{(1-\beta)m} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3} = K\rho^{1+\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, n = 3$$

Entalpia

Równanie równowagi hydrostatycznej jest na ogół nieliniowe:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -g$$

Czy istnieje taka funkcja termodynamiczna, dla której powyższe równanie można zapisać jako:

$$\frac{d?}{dx} = -g$$

Taka funkcja musi spełniać równanie:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad dh = \frac{dp}{\rho} \rightarrow h = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Dla izotermicznego EOS $p = c_s^2 \rho$:

$$h(\rho) = c_s^2 \ln\left(\rho/\rho_0\right)$$

W równowadze hydrostatycznej suma „entalpii” właściwej h oraz potencjału grawitacyjnego $-gx$ jest stała.

Równowaga hydrostatyczna: przypadek ogólny

W przypadku gdy pole grawitacyjne nie jest sferycznie symetryczne, np: w układzie podwójnym gwiazd, wyprowadzenie jednowymiarowe nie jest zadowalające. Dla dowolnego elementu płynu o objętości V otoczonego powierzchnią S warunek równowagi ma postać

$$\int_S p\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \vec{g}\ \mathrm{d}V$$

Aby obliczyć całkę po lewej stronie mnożymy ją przez dowolny stały wektor $\vec{n}$:

$$\vec{n} \cdot \int_S p\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{n} p\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\left(\vec{n}p\right)\, \mathrm{d}V = \int_V (\nabla \vec{n}) p + \vec{n} \cdot \nabla p\ udV = \vec{n} \cdot \int_V \nabla p\ udV$$

Opuszczając dowolny wektor $\vec{n}$ oraz całki otrzymujemy ostatecznie:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \tag{2}$$

Powyższe równanie należy uzupełnić o EOS (równanie stanu płynu) oraz związek gęstości ρ z polem grawitacyjnym $\vec{g}$.

Równowaga hydrostatyczna w przypadku ogólnym

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \equiv -\rho \vec{\nabla} \Phi_g \tag{3a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \qquad \text{lub} \qquad \Phi_g = -G \int \frac{\rho(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathrm{r}' \tag{3b}$$

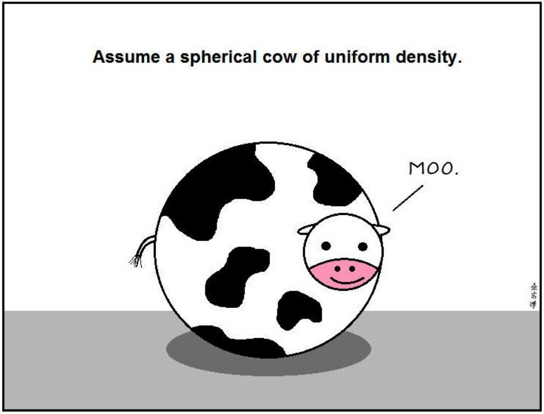
$$p = p(\rho, \ldots) \tag{3c}$$

Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!

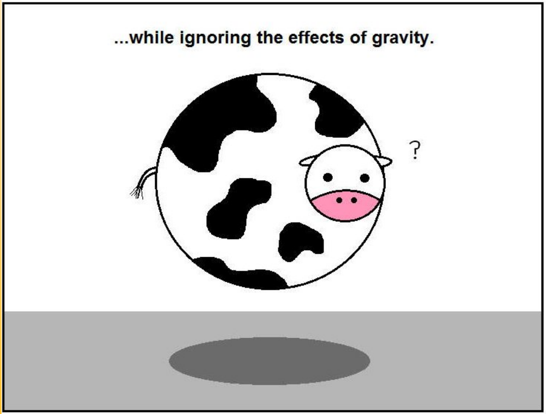
Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!

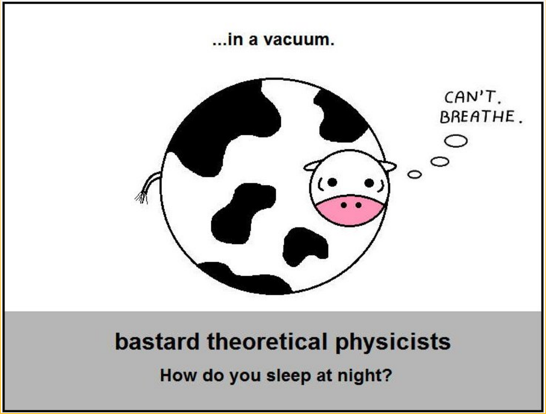


Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Lista obiektów sferycznie symetrycznych w astrofizyce

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii *zwykle jest uzasadnione* lub przynajmniej przydatne:

1. planety, planety karłowate, duże księżyce
2. większość gwiazd
3. gwiazdy neutronowe, białe karły, czarne dziury
4. gromady kuliste gwiazd
5. gromady galaktyk, pustki (?)

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest **nieuzasadnione**:

1. galaktyki spiralne
2. dyski akrecyjne
3. obiekty bardzo szybko rotujące

Równowaga hydrostatyczna: przypadek sferycznie symetryczny

Równanie równowagi hydrostatycznej jest formalnie identyczne jak w stałym polu:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

ale teraz g jest funkcją r:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Masę zawartą w kuli o promieniu r można łatwo obliczyć:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \, \mathrm{d}r$$

Zróżniczkowanie powyższej całki daje tzw. *równanie ciągłości*:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Równowaga hydrostatyczna: układ równań

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \tag{4a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{4b}$$

$$p = p(\rho) \tag{4c}$$

Warunki początkowe:

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c$$

Warunek brzegowy (obcięcie matematycznego rozwiązania układu równań):

$$p(R) = \rho(R) = 0, \quad m(R) = M$$

gdzie R - promień ciała, M - masa ciała niebieskiego.

Równowaga hydrostatyczna: wersja Lagrange'owska

W astrofizyce bardzo często używa się jako zmiennej radialnej masy zawartej wewnątrz sfery o promieniu r.

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \tag{5a}$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{5b}$$

$$p = p(\rho) \tag{5c}$$

W układzie powyżej niewiadomymi są funkcje $r(m), p(m), \rho(m)$, natomiast masa m gra rolę zmiennej niezależnej.

Opis w zmiennej niezależnej r nazywamy często Eulerowskim, natomiast opis w zmiennej m Lagrangżowskim.

Politropowe równanie stanu

$$p = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

γ – wykładnik politropy, n – indeks politropy

- $n \to \infty$, $\gamma = 1$ – izotermiczne równanie stanu
- $n = 5$, $\gamma = \frac{6}{5}$ – wartość graniczna pomiędzy skończonymi a nieskończonymi rozwiązaniami (sfera Plummera)
- $n = 3$, $\gamma = \frac{4}{3}$ – model „Słońca”, relatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 3/2$, $\gamma = \frac{5}{3}$ – nierelatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 1$, $\gamma = 2$ – gwiazda konwektywna
- $n \to 0$, $\gamma \to \infty$ – przypadek stałej gęstości

Politropowe równanie stanu: wzory

	γ – wykładnik politropy	n – indeks politropy
ciśnienie	$p = K\rho^{\gamma}$	$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$
„entalpia” właściwa $h = \frac{(H/V)}{\rho}$	$h = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1}$	$h = K(n+1)\rho^{1/n}$
„prędkość dźwięku” $c_s^2 = \partial p/\partial\rho$	$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$	$c_s^2 = K(1+\frac{1}{n})\rho^{1/n}$
	$c_s^2 = (\gamma-1)\,h$	$h = n\,c_s^2$
	$h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$	$h = (n+1)\frac{p}{\rho}$

Równanie równowagi dla entalpii

Wcześniej pokazaliśmy, że użycie *„entalpii" właściwej* $\nabla h = \nabla p/\rho$ upraszcza równania.

$$\frac{\nabla p}{\rho} \equiv \nabla h = -\nabla \Phi_g \tag{6a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{6b}$$

Pierwsze równanie można scałkować:

$$h + \Phi_g = const \tag{7a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{7b}$$

Działając obustronnie operatorem Laplace'a Δ na pierwsze z równań i korzystając z drugiego mamy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0$$

Równanie Lane-Emdena

Po wyprowadzeniu wzoru na entalpię gazu politropowego, otrzymujemy:

$$\Delta h + 4\pi G\,\rho = 0, \qquad h(\rho) = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{1/n}$$

do ostatecznie daje jedno równanie różniczkowe:

$$\Delta h + 4\pi G \left(\frac{\gamma-1}{K\gamma}\right)^n h^n = 0$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych na postać:

$$\Delta h = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dh}{dr}\right) = \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dh}{dr}$$

Standardową postać otrzymamy dokonując równoczesnej zamiany zmiennej radialnej r i funkcji niewiadomej h:

$$h(x) = h_c w(x), \quad r = \lambda x$$

Po przeprowadzeniu rachunków otrzymujemy słynne równanie Lane-Emdena:

$$w'' + \frac{2}{x}w' + w^n = 0.$$

Funkcje Lane-Emdena

Równanie:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1, w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$

$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$

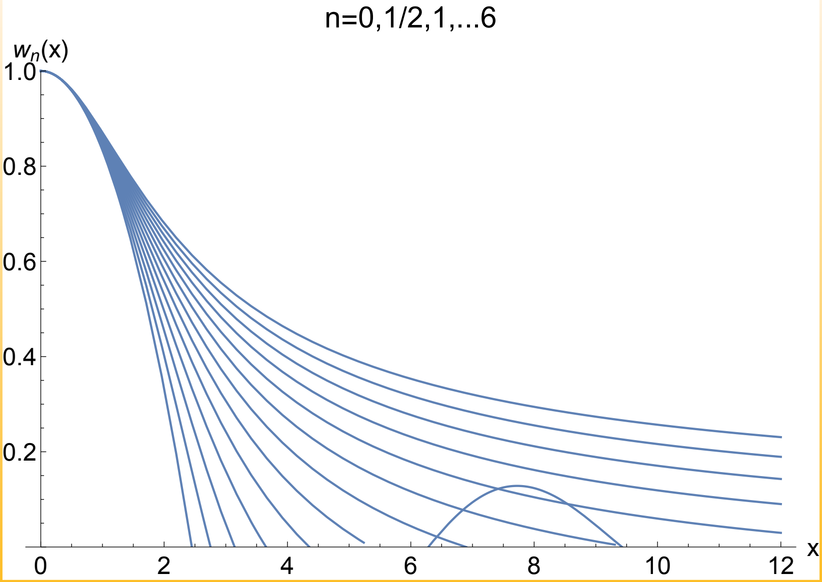
- dla $n = 1$

$$w_1 = \frac{\sin x}{x}$$

- dla $n = 5$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Funkcje Lane-Emdena: wykresy



Skalowanie do rozmiarów fizycznych

Rozwiązanie opisują wzory:

$$h(r) = h_C \; w_n(r/\lambda), \quad \rho(r) = \rho_C \; w_n(r/\lambda)^n$$

gdzie skalowanie opisuje kombinacja o wymiarze długości:

$$\lambda = c_s \sqrt{\frac{n}{4\pi G \rho_C}} = \sqrt{\frac{h_C}{4\pi G \rho_C}}$$

Wielkość $1/\sqrt{G\rho}$ ma wymiar czasu, natomiast c_s to prędkość „dźwięku”, obie liczone dla wartości w centrum „gwiazdy”. Strukturalnie wzór na λ wygląda identycznie jak wzór na *długość Jeansa*.

Masa i promień

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.
Oznaczmy:
x_0 – miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena,
$w_n'(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda\, x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3\ \left(-x_0^2 w_n'(x_0)\right)$$

Przykłady struktury dla zadanego R i M

Jeżeli znamy masę M i promień R obiektu, oraz potrafimy obliczyć indeks n równania stanu materii z której jest zbudowany, to znamy strukturę wewnętrzną:

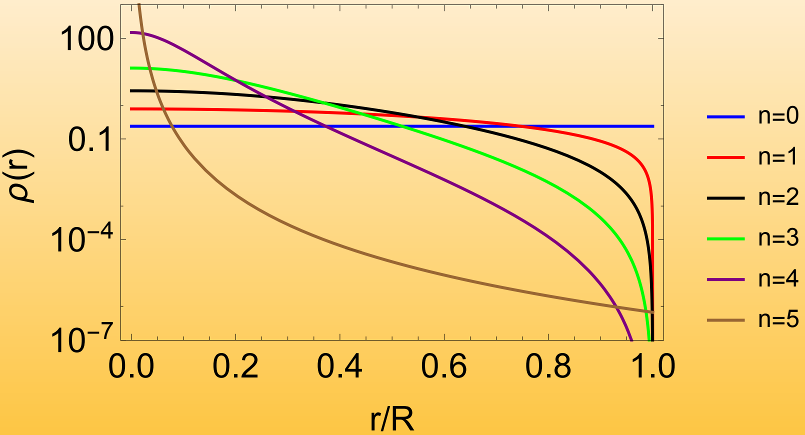
$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, w_n\left(\frac{r}{R}\,x_0\right)^n \left(-\frac{x_0}{3x_1}\right)$$

Wielkość:

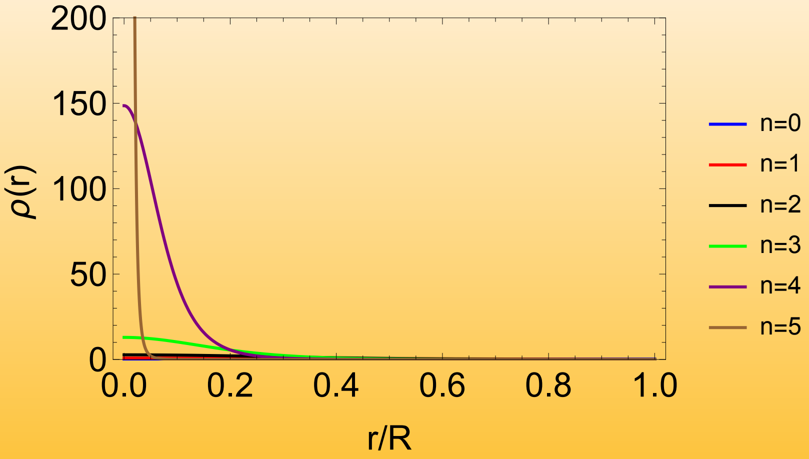
$$-\frac{x_0}{3x_1} = \frac{\rho_C}{\bar{\rho}}$$

gdzie: ρ_C – gęstość centralna (w środku), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – gęstość średnia, nazywamy *kontrastem gęstości*.

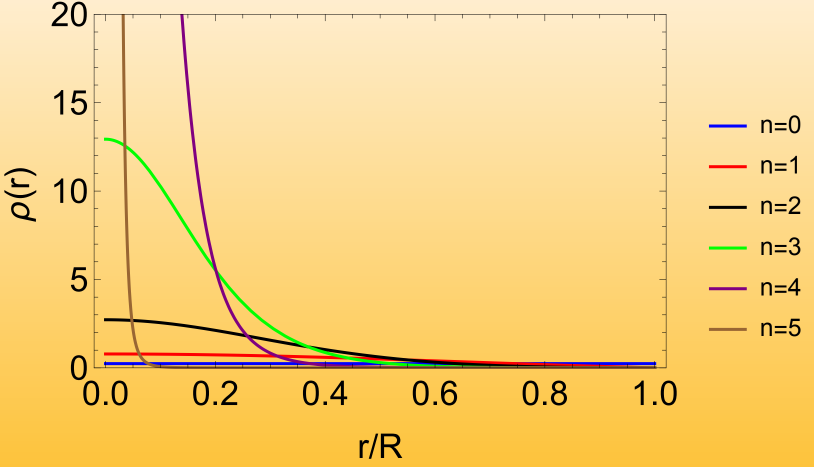
Przykłady struktury dla zadanego R i M



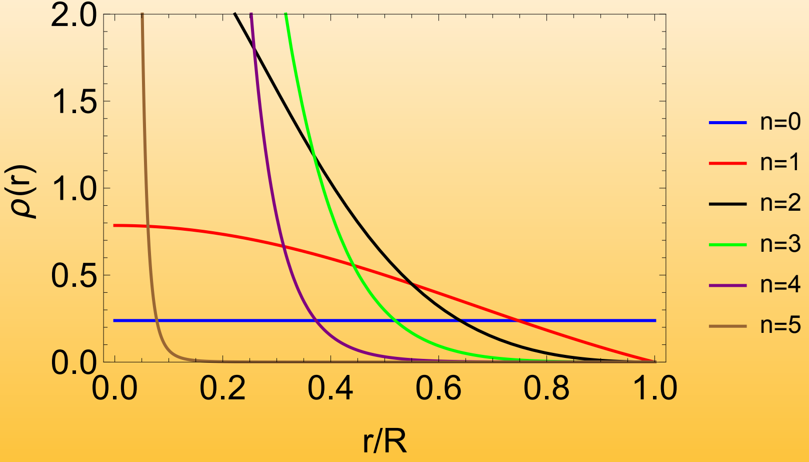
Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Chcesz wiedzieć więcej?

Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08