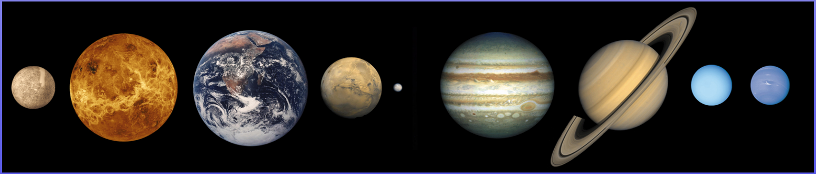
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

12 kwietnia 2016



Równowaga hydrostatyczna

Wzór barometryczny

Równanie równowagi hydrostatycznej *płynu* w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g w jednym wymiarze:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g \tag{1}$$

gdzie: $p(h)$ – zależność ciśnienia od wysokości h, $\rho(h)$ – gęstość, g – przyspieszenie grawitacyjne.

Ważne!

Aby problem stał się rozwiązywalny, potrzebujemy dodatkowego równania wiążącego dwie niewiadome funkcje $p(h)$ oraz $\rho(h)$. Nazywamy ją **równaniem stanu** (ang. ***E**quation **O**f **S**tate*), w skrócie **EOS**.

Równanie stanu

Równanie stanu, zapisywana zwykle jako abstrakcyjna algebraiczna funkcja np: $p = p(\rho)$ zależy w ogólności od temperatury i składu „chemicznego"/jonizacji. Astrofizycy posługują się kilkunastoma różnymi równaniami stanu. Najważniejsze to:

- gaz doskonały, $pV = NkT$

  Wymiarem [kT] jest **energia**, wymiarem ciśnienia [p] jest **gęstość energii**.
- gaz fermionowy, np: elektronowy
- gaz bozonowy, np: fotonowy
- politropowe równanie stanu $p = K\rho^{\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}$
- r. Van der Waalsa $(p + 3\rho^2)(1/\rho - 1/3) = \frac{8}{3}T$

W realistycznych obliczeniach EOS ma postać sporych rozmiarów tablicy liczb, która podlega interpolacji. Wartości są miksem wyników eksperymentalnych i zaawansowanych obliczeń teoretycznych.

Równanie stanu gazu doskonałego

$$pV = NkT$$

p – ciśnienie, V – objętość, N - liczba cząsteczek gazu,
$k = 1.380662 \cdot 10^{-23}$ J/K – stała Boltzmana, T – temperatura w skali bezwzględnej (w Kelwinach)
Interesuje nas sprowadzenie EOS do postaci $p = f(\rho)$. Korzystamy z równości:

$$\text{masa gazu} = \rho V \equiv N\ m$$

gdzie: m – masa jednej cząsteczki gazu, ρ – gęstość.

$$p = \frac{kT}{m}\ \rho$$

Dla $T = const$ otrzymujemy **izotermiczne równanie stanu**:

$$p = c_s^2\ \rho, \quad c_s \equiv \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$ c_s–prędkość dźwięku ($\simeq$ prędkość atomów)

Wzór barometryczny: rozwiązanie

Korzystamy z izotermicznego równania stanu:

$$\frac{dp}{dh} = \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dh} = c_s^2 \rho'(h)$$

i otrzymujemy proste równanie różniczkowe:

$$c_s^2 \frac{\rho'}{\rho} = -g$$

Ponieważ $\rho'/\rho \equiv (\ln \rho)'$ dostajemy:

$$\ln \rho = -g/c_s^2\ h + const, \rightarrow \rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{gh}{c_s^2}} \equiv \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Ostatni wzór to manifestacja rozkładu Boltzmana:

$N(E) = N_0 e^{-\frac{E}{kT}}$, gdzie $E = mgh$ to grawitacyjna energia potencjalna.

Atmosfera Ziemi

Rozkład gęstości/ciśnienia zapisuje się zwykle z użyciem *skali wysokości atmosfery* H:

$$\rho(h) = \rho_0 \, e^{-h/H}, \quad \text{gdzie: } H = R_\oplus \left(\frac{c_s}{v_I}\right)^2$$

$v_I = \sqrt{GM_\oplus/R_\oplus}$ to **pierwsza prędkość kosmiczna**.
Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika H, musimy znać:

1. skład „chemiczny” atmosfery
2. masę m cząsteczki każdego ze składników atmosfery
3. temperaturę

1. 78% azotu (N_2), 21 % tlenu (O_2), 1% argonu (Ar)
2. $m_{\mathrm{N}} \simeq 14 m_p \simeq 14 m_H$, skład izotopowy to głównie (99.6%) ^{14}N, interesuje nas $m_{\mathrm{N}_2} \simeq 28 m_p$, m_p - masa protonu
3. standardowa temperatura $T = 288.15K = 15^\circ$ C

Atmosfera Ziemi

Rozkład gęstości/ciśnienia zapisuje się zwykle z użyciem *skali wysokości atmosfery* H:

$$\rho(h) = \rho_0 \, e^{-h/H}, \quad \text{gdzie: } H = R_\oplus \left(\frac{c_s}{v_I}\right)^2$$

$v_I = \sqrt{GM_\oplus / R_\oplus}$ to **pierwsza prędkość kosmiczna**.
Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika H, musimy znać:

1. skład „chemiczny” atmosfery
2. masę m cząsteczki każdego ze składników atmosfery
3. temperaturę

1. 78% azotu (N_2), 21 % tlenu (O_2), 1% argonu (Ar)
2. $m_{\mathrm{N}} \simeq 14 m_p \simeq 14 m_H$, skład izotopowy to głównie (99.6%) ^{14}N, interesuje nas $m_{\mathrm{N}_2} \simeq 28 m_p$, m_p - masa protonu
3. standardowa temperatura $T = 288.15K = 15^\circ$ C

Atmosfera Ziemi

Rozkład gęstości/ciśnienia zapisuje się zwykle z użyciem *skali wysokości atmosfery* H:

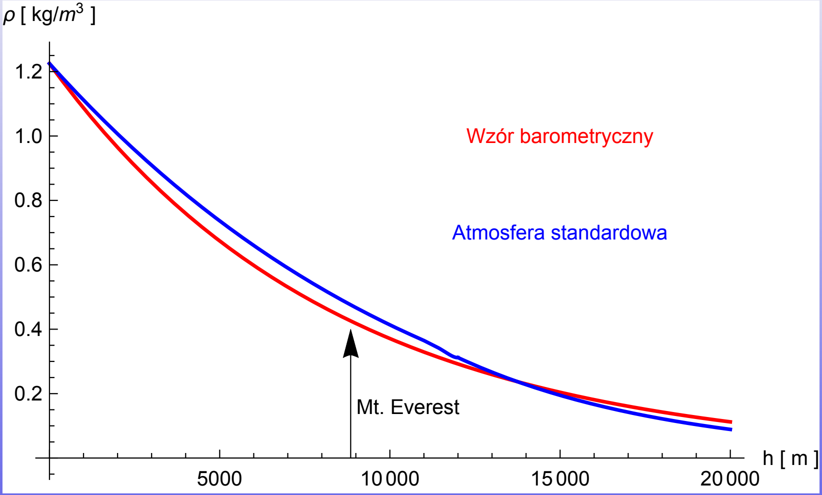
$$\rho(h) = \rho_0 \, e^{-h/H}, \quad \text{gdzie: } H = R_\oplus \left(\frac{c_s}{v_I}\right)^2$$

$v_I = \sqrt{GM_\oplus/R_\oplus}$ to **pierwsza prędkość kosmiczna**.
Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika H, musimy znać:

1. skład „chemiczny" atmosfery
2. masę m cząsteczki każdego ze składników atmosfery
3. temperaturę

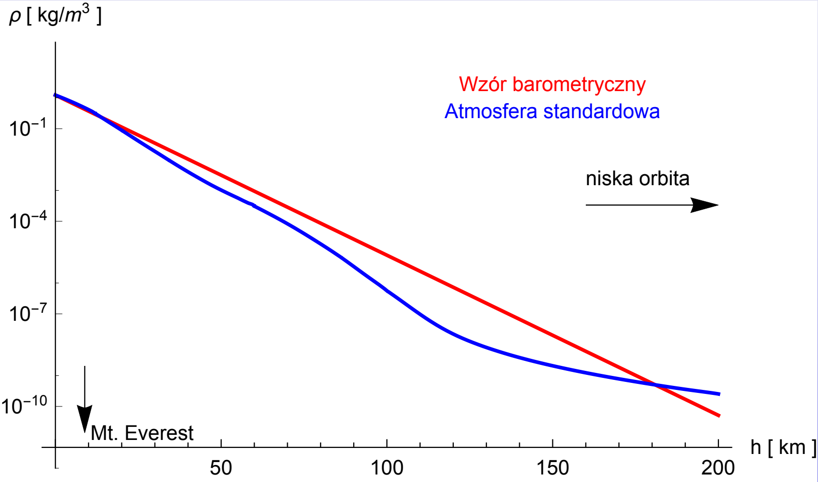
1. 78% azotu (N_2), 21 % tlenu (O_2), 1% argonu (Ar)
2. $m_N \simeq 14 m_p \simeq 14 m_H$, skład izotopowy to głównie (99.6%) ^{14}N, interesuje nas $m_{N_2} \simeq 28 m_p$, m_p - masa protonu
3. standardowa temperatura $T = 288.15K = 15^\circ$ C

Wzór barometryczny *vs* atmosfera standardowa



Skala wysokości $H \simeq 8400$ m, porównywalna z najwyższymi szczytami Ziemi.

Wzór barometryczny *vs* atmosfera standardowa



Skala wysokości $H \simeq 8400$ m, porównywalna z najwyższymi szczytami Ziemi.

Entalpia

Równanie równowagi hydrostatycznej jest na ogół nieliniowe:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -g$$

Czy istnieje taka funkcja termodynamiczna, dla której powyższe równanie można zapisać jako:

$$\frac{d?}{dx} = -g$$

Taka funkcja musi spełniać równanie:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad dh = \frac{dp}{\rho} \rightarrow h = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Dla izotermicznego EOS $p = c_s^2 \rho$:

$$h(\rho) = c_s^2 \ln\left(\rho/\rho_0\right)$$

W równowadze hydrostatycznej suma „entalpii” właściwej h oraz potencjału grawitacyjnego $-gx$ jest stała.

Równowaga hydrostatyczna cieczy nieściśliwej

W przypadku równowagi cieczy nieściśliwej z $\rho = const$ (np: wody) równanie staje się szczególnie proste:

$$\frac{dp}{dx} = \rho g h \quad \rightarrow \quad p = p_0 + \rho g h$$

gdzie tym razem h oznacza głębokość pod powierzchnią cieczy. Wynik jest równoważny naciskowi spowodowanemu ciężarem słupa cieczy o wysokości h.

W przypadku planet pozbawionych stałej powierzchni przejście od atmosfery do oceanu staje się ciągłe. Aby je opisać należy użyć bardziej realistycznego równania stanu np: Van der Waalsa.

Równowaga hydrostatyczna: przypadek ogólny

W przypadku gdy pole grawitacyjne nie jest sferycznie symetryczne, np: w układzie podwójnym gwiazd, wyprowadzenie jednowymiarowe nie jest zadowalające. Dla dowolnego elementu płynu o objętości V otoczonego powierzchnią S warunek równowagi ma postać

$$\int_S p \,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \vec{g} \;\mathrm{d}V$$

Aby obliczyć całkę po lewej stronie mnożymy ją przez dowolny stały wektor $\vec{n}$:

$$\vec{n} \cdot \int_S p \,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{n} p \,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \left(\vec{n} p\right) \,\mathrm{d}V = \int_V (\nabla \vec{n}) p + \vec{n} \cdot \nabla p \; udV = \vec{n} \cdot \int_V \nabla p \; udV$$

Opuszczając dowolny wektor $\vec{n}$ oraz całki otrzymujemy ostatecznie:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \tag{2}$$

Powyższe równanie należy uzupełnić o EOS (równanie stanu płynu) oraz związek gęstości ρ z polem grawitacyjnym $\vec{g}$.

Równowaga hydrostatyczna w przypadku ogólnym

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \equiv -\rho \vec{\nabla} \Phi_g \tag{3a}$$

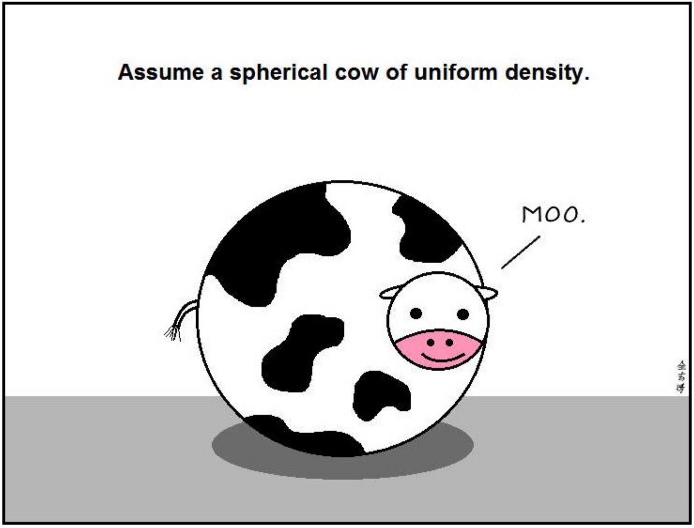
$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \qquad \text{lub} \qquad \Phi_g = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{3b}$$

$$p = p(\rho, \ldots) \tag{3c}$$

Sferyczna symetria

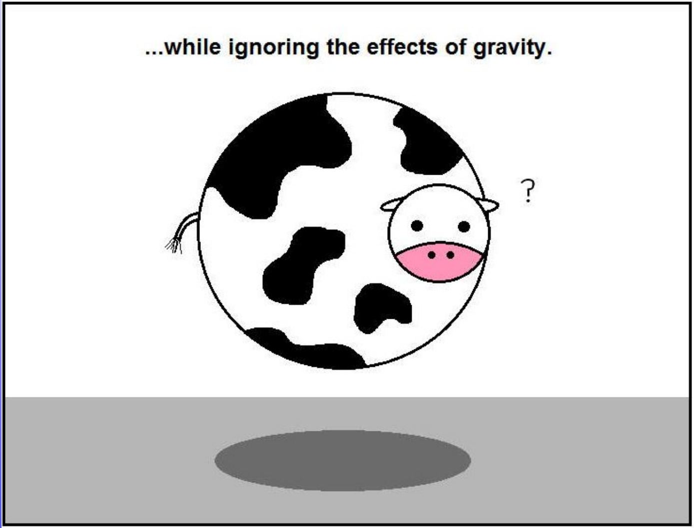
Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



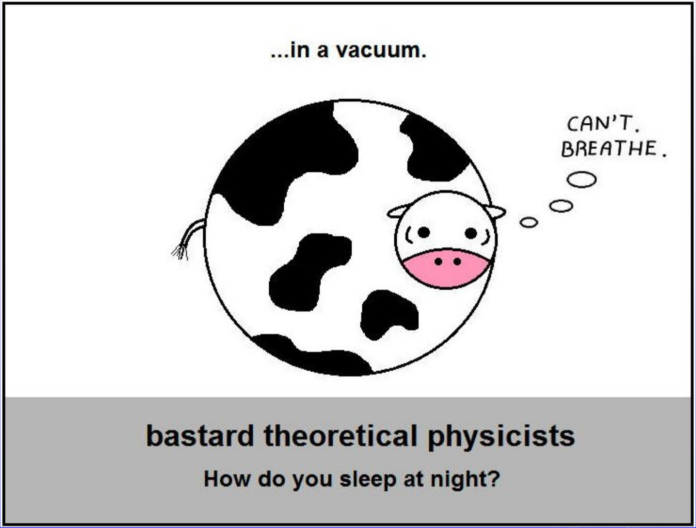
Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Sferyczna symetria

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Lista obiektów sferycznie symetrycznych w astrofizyce

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii *zwykle jest uzasadnione* lub przynajmniej przydatne:

1. planety, planety karłowate, duże księżyce
2. większość gwiazd
3. gwiazdy neutronowe, białe karły, czarne dziury
4. gromady kuliste gwiazd
5. gromady galaktyk, pustki (?)

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest **nieuzasadnione**:

1. galaktyki spiralne
2. dyski akrecyjne
3. obiekty bardzo szybko rotujące

Kulistość planetoid

- z obserwacji wiemy, że wszystkie dostatecznie duże ciała niebieskie przyjmują kształt kulisty
- dla ciał płynnych (gazowych, ciekłych) jest to oczywiste
- co w przypadku ciał skalistych, metalicznych, sypkich itp?

Rozważmy pionowy „walec” o wysokości h i gęstości ρ ustawiony na powierzchni kuli o promieniu R i gęstości ρ. Maksymalna wysokość walca, powyżej której ulegnie trwałej deformacji lub zniszczeniu to:

$$h_{max} = \frac{\sigma_{crit}}{\rho g} = \frac{\sigma_{crit}}{\frac{4}{3}\pi G \rho^2 R}$$

gdzie σ_{crit} to wytrzymałość materiału na ściskanie. Definiujemy warunek krytyczny ($\pi \simeq 3$) na sferyczność jako $h_{max} \ll R$:

$$d = 2R \gg \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_{crit}}{G}}$$

Dla lodu $5 < \sigma_{crit} < 25$ MPa co daje $d \gg 300 \ldots 600$ km.

Równowaga hydrostatyczna: przypadek sferycznie symetryczny

Równanie równowagi hydrostatycznej jest formalnie identyczne jak w stałym polu:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

ale teraz g jest funkcją r:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Masę zawartą w kuli o promieniu r można łatwo obliczyć:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \, \mathrm{d}r$$

Zróżniczkowanie powyższej całki daje tzw. *równanie ciągłości*:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Równowaga hydrostatyczna: układ równań

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \tag{4a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{4b}$$

$$p = p(\rho) \tag{4c}$$

Warunki początkowe:

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c$$

Warunek brzegowy (obcięcie matematycznego rozwiązania układu równań):

$$p(R) = \rho(R) = 0, \quad m(R) = M$$

gdzie R - promień ciała, M - masa ciała niebieskiego.

Równowaga hydrostatyczna: wersja Lagrange'owska

W astrofizyce bardzo często używa się jako zmiennej radialnej masy zawartej wewnątrz sfery o promieniu r.

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \tag{5a}$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2\ \rho} \tag{5b}$$

$$p = p(\rho) \tag{5c}$$

W układzie powyżej niewiadomymi są funkcje $r(m), p(m), \rho(m)$, natomiast masa m gra rolę zmiennej niezależnej.

Opis w zmiennej niezależnej r nazywamy często Eulerowskim, natomiast opis w zmiennej m Lagranżowskim.

Przykład 1: stała gęstość

Jeden z najprostszych możliwych przypadków zakłada że $\rho(r) = \rho_0 = const$:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}, \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \, \rho_0$$

Po uproszczeniu równanie sprowadza się do:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 \, r$$

z rozwiązaniem:

$$p(r) = p_0 - \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 \, r^2$$

Ciśnienie centralne można wyliczyć z warunku $p(R) = 0$, gdzie R to promień ciała.

Przykład 2: sfera izotermiczna

Robimy dwa założenia:

1. izotermiczne (liniowe) równanie stanu $p = c_s^2 \rho$
2. profil gęstości ma postać potęgową: $\rho(r) = A\, r^{\lambda}$, gdzie A, λ wyznaczymy z równań równowagi hydrostatycznej

Wynik:

$$\rho(r) = \frac{c_s^2}{2\pi G\, r^2}, \quad m(r) = \frac{2c_s^2}{G}\, r$$

Jest to przykład równania osobliwego w centrum ($\rho \to \infty$) o nieskończonej masie całkowitej. Używa się go m.in. w modelowaniu gromad kulistych lub sferycznego halo ciemnej materii.

Przykład 3: kwadratowe równanie stanu

Robimy dwa założenia:

1. kwadratowe równanie stanu $p = K\rho^2$
2. profil gęstości ma postać: $\rho(r) = f(r)/r$

Po zróżniczkowaniu równania równowagi i skorzystaniu z równania ciągłości, równanie upraszcza się do:

$$f'' + \frac{2\pi G}{K} f = 0$$

czyli równania oscylatora harmonicznego. Rozwiązanie ogólne to:

$$\rho(r) = \frac{a \sin \sqrt{\frac{2\pi G}{K}} r + b \cos \sqrt{\frac{2\pi G}{K}} r}{r}.$$

Część z kosinusem odrzucamy, bo $\rho \to \infty$ i otrzymujemy:

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\sin\left(\pi r/R\right)}{r},$$

gdzie promień gwiazdy $R = \sqrt{\frac{K\pi}{2\pi G}}$. R nie zależy od masy gwiazdy!

Przykład 4: równanie stanu Van der Waalsa

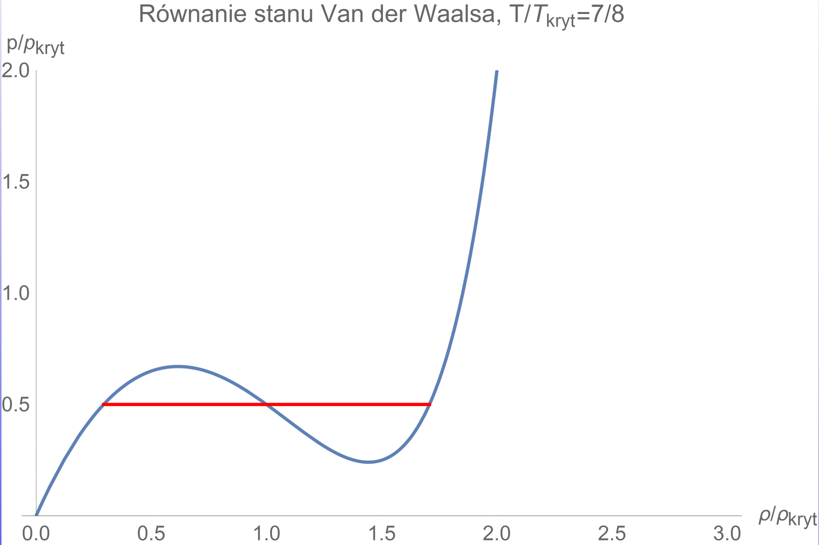
Wyrażając ciśnienie, gęstość i temperaturę w jednostkach krytycznych, równanie stanu przyjmuje postać:

$$p(\rho) = \frac{\frac{8}{3}T}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{3}} - 3\rho^2.$$

Dla $\rho \ll \rho_{\text{kryt}}$ i $T \gg T_{\text{kryt}}$ równanie przechodzi w r. gazu doskonałego:

$$p(\rho) = \frac{8}{3}T\rho.$$

Dla $\rho \to 3\rho_{\text{kryt}}$, $p(\rho) \to \infty$.
Dla $\frac{27}{32} < \frac{T}{T_{\text{kryt}}} < 1$ istnieje obszar gdzie $p'(\rho) < 0$ i należy zastosować **konstrukcję Maxwella**. Interpretujemy to jako skok gęstości i skraplanie się gazu. Ciśnienie musi pozostać ciągłe.


Równanie stanu Van der Waalsa, T/T_{kryt}=7/8
p/p_{kryt}
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$\rho/\rho_{\mathrm{kryt}}$