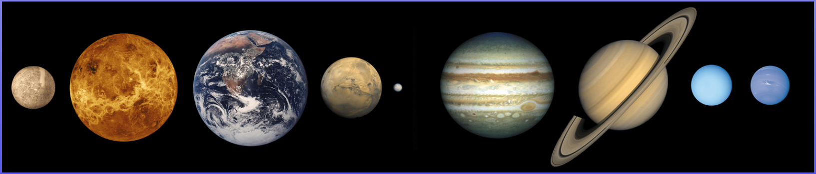
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

31 marca 2015



Kulistość planetoid

- z obserwacji wiemy, że wszystkie dostatecznie duże ciała niebieskie przyjmują kształt kulisty
- dla ciał płynnych (gazowych, ciekłych) jest to oczywiste
- co w przypadku ciał skalistych, metalicznych, sypkich itp?

Rozważmy pionowy „walec” o wysokości h i gęstości ρ ustawiony na powierzchni kuli o promieniu R i gęstości ρ. Maksymalna wysokość walca, powyżej której ulegnie trwałej deformacji lub zniszczeniu to:

$$h_{max} = \frac{\sigma_{crit}}{\rho g} = \frac{\sigma_{crit}}{\frac{4}{3}\pi G \rho^2 R}$$

gdzie σ_{crit} to wytrzymałość materiału na ściskanie. Definiujemy warunek krytyczny na sferyczność jako $h_{max} \ll R$:

$$d = 2R \gg \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_{crit}}{G}}$$

Dla lodu $5 < \sigma_{crit} < 25$ MPa co daje $d \gg 300 \ldots 600$ km.

Równowaga hydrostatyczna: przypadek sferycznie symetryczny

Równanie równowagi hydrostatycznej jest formalnie identyczne jak w stałym polu:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

ale teraz g jest funkcją r:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}.$$

Masę zawartą w kuli o promieniu r można łatwo obliczyć:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \; \mathrm{d}r$$

Zróżniczkowanie powyższej całki daje tzw. *równanie ciągłości*:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \; \rho$$

Równowaga hydrostatyczna: układ równań

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \tag{1a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{1b}$$

$$p = p(\rho) \tag{1c}$$

Warunki początkowe:

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c$$

Warunek brzegowy (obcięcie matematycznego rozwiązania układu równań):

$$p(R) = \rho(R) = 0, \quad m(R) = M$$

gdzie R - promień ciała, M - masa ciała niebieskiego.

Równowaga hydrostatyczna: wersja Lagrange'owska

W astrofizyce bardzo często używa się jako zmiennej radialnej masy zawartej wewnątrz sfery o promieniu r.

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \tag{2a}$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{2b}$$

$$p = p(\rho) \tag{2c}$$

W układzie powyżej niewiadomymi są funkcje $r(m), p(m), \rho(m)$, natomiast masa m gra rolę zmiennej niezależnej.

Opis w zmiennej niezależnej r nazywamy Eulerowskim, natomiast opis w zmiennej m Lagranżowskim.

Przykład 1: stała gęstość

Jeden z najprostszych możliwych przypadków zakłada że $\rho(r) = \rho_0 = const$:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}, \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$$

Po uproszczeniu równanie sprowadza się do:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 \, r$$

z rozwiązaniem:

$$p(r) = p_0 - \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 \, r^2$$

Ciśnienie centralne można wyliczyć z warunku $p(R) = 0$, gdzie R to promień ciała.

Przykład 2: sfera izotermiczna

Robimy dwa założenia:

1. izotermiczne (liniowe) równanie stanu $p = c_s^2 \rho$
2. profil gęstości ma postać potęgową: $\rho(r) = A\, r^{\lambda}$, gdzie A, λ wyznaczymy z równań równowagi hydrostatycznej

Wynik:

$$\rho(r) = \frac{c_s^2}{2\pi G\, r^2}, \quad m(r) = \frac{2c_s^2}{G}\, r$$

Jest to przykład równania osobliwego w centrum ($\rho \to \infty$) o nieskończonej masie całkowitej. Używa się go m.in. w modelowaniu gromad kulistych lub sferycznego halo ciemnej materii.

Przykład 3: kwadratowe równanie stanu

Robimy dwa założenia:

1. kwadratowe równanie stanu $p = K\rho^2$
2. profil gęstości ma postać: $\rho(r) = f(r)/r$

Po zróżniczkowaniu równania równowagi i skorzystaniu z równania ciągłości, równanie upraszcza się do:

$$f'' + \frac{2\pi G}{K} f = 0$$

czyli równania oscylatora harmonicznego. Rozwiązanie ogólne to:

$$\rho(r) = \frac{a \sin\sqrt{\frac{2\pi G}{K}} r + b \cos\sqrt{\frac{2\pi G}{K}} r}{r}.$$

Część z kosinusem odrzucamy, bo $\rho \to \infty$ i otrzymujemy:

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\sin\left(\pi r/R\right)}{r},$$

gdzie promień gwiazdy $R = \sqrt{\frac{K\pi}{2\pi G}}$. R nie zależy od masy gwiazdy!

Politropowe równanie stanu

$$p = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

γ – wykładnik politropy, n – indeks politropy

- $n \to \infty$, $\gamma = 1$ – izotermiczne równanie stanu
- $n = 5$, $\gamma = \frac{6}{5}$ – wartość graniczna pomiędzy skończonymi a nieskończonymi rozwiązaniami (sfera Plummera)
- $n = 3$, $\gamma = \frac{4}{3}$ – model „Słońca", relatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 3/2$, $\gamma = \frac{5}{3}$ – nierelatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 1$, $\gamma = 2$ – gwiazda konwektywna
- $n \to 0$, $\gamma \to \infty$ – przypadek stałej gęstości

Politropowe równanie stanu: wzory

	γ – wykładnik politropy	n – indeks politropy
ciśnienie	$p = K\rho^{\gamma}$	$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$
entalpia właściwa $h = (H/V)/\rho$	$h = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1}$	$h = K(n+1)\rho^{1/n}$
prędkość dźwięku $c_s^2 = \partial p/\partial\rho$	$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$	$c_s^2 = K(1+\frac{1}{n})\rho^{1/n}$
	$c_s^2 = (\gamma-1)\,h$	$h = n\,c_s^2$
	$h = (n+1)\frac{p}{\rho}$	$h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$

Równanie równowagi dla entalpii

Wcześniej pokazaliśmy, że użycie *entalpii właściwej* $\nabla h = \nabla p/\rho$ upraszcza równania.

$$\frac{\nabla p}{\rho} \equiv \nabla h = -\nabla \Phi_g \tag{3a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{3b}$$

Pierwsze równanie można scałkować:

$$h + \Phi_g = const \tag{4a}$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \tag{4b}$$

Działając obustronnie operatorem Laplace'a Δ na pierwsze z równań i korzystając z drugiego mamy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0$$

Równanie Lane-Emdena

Po wyprowadzeniu wzoru na entalpię gazu politropowego, otrzymujemy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0, \qquad h(\rho) = \frac{K\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1} = \frac{K\gamma}{\gamma - 1}\rho^{1/n}$$

do ostatecznie daje jedno równanie różniczkowe:

$$\Delta h + 4\pi G \left(\frac{\gamma - 1}{K\gamma}\right)^n h^n = 0$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych na postać:

$$\Delta h = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dh}{dr}\right) = \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dh}{dr}$$

Standardową postać otrzymamy dokonując równoczesnej zamiany zmiennej radialnej r i funkcji niewiadomej h:

$$h(x) = h_c w(x), \quad r = \lambda x$$

Po przeprowadzeniu rachunków otrzymujemy słynne równanie Lane-Emdena:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0.$$

Funkcje Lane-Emdena

Równanie:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1, w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$

$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$

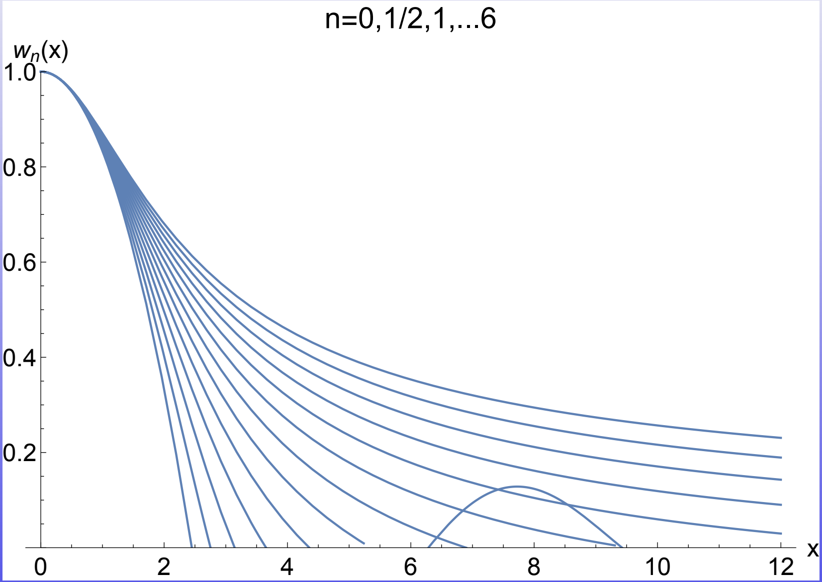
- dla $n = 1$

$$w_1 = \frac{\sin x}{x}$$

- dla $n = 5$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Funkcje Lane-Emdena: wykresy



Skalowanie do rozmiarów fizycznych

Rozwiązanie opisują wzory:

$$h(r) = h_C \; w_n(r/\lambda), \quad \rho(r) = \rho_C \; w_n(r/\lambda)^n$$

gdzie skalowanie opisuje kombinacja o wymiarze długości:

$$\lambda = c_s \sqrt{\frac{n}{4\pi G \rho_C}} = \sqrt{\frac{h_C}{4\pi G \rho_C}}$$

Wielkość $1/\sqrt{G\rho}$ ma wymiar czasu, natomiast c_s to prędkość „dźwięku", obie liczone dla wartości w centrum „gwiazdy". Strukturalnie wzór na λ wygląda identycznie jak wzór na *długość Jeansa*.

Masa i promień

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.
Oznaczmy: x_0 - miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, $w_n'(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda\, x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3\ \left(-x_0^2 w_n'(x_0)\right)$$

Przykłady struktury dla zadanego R i M

Jeżeli znamy masę M i promień R obiektu, oraz potrafimy obliczyć indeks n równania stanu materii z której jest zbudowany, to znamy strukturę wewnętrzną:

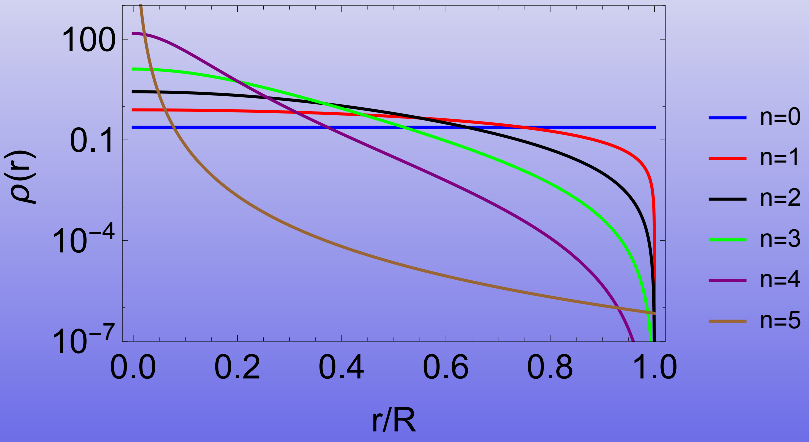
$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \, w_n \left(\frac{r}{R} x_0\right)^n \left(-\frac{x_0}{3x_1}\right)$$

Wielkość:

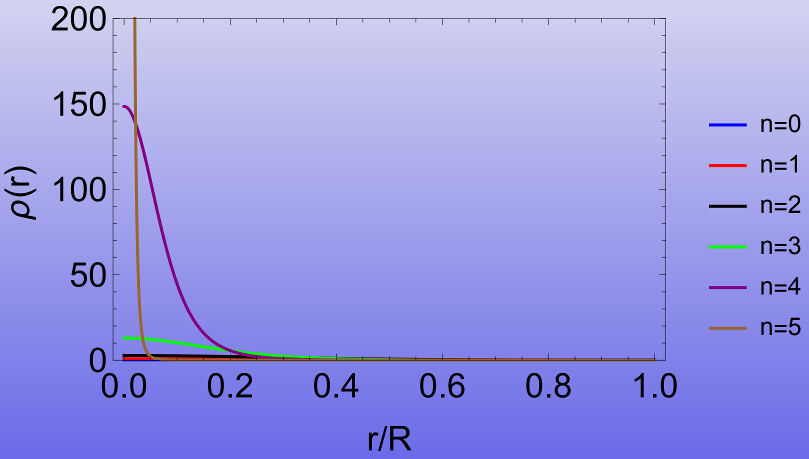
$$-\frac{x_0}{3x_1} = \frac{\rho_C}{\bar{\rho}}$$

gdzie: ρ_C – gęstość centralna (w środku), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – gęstość średnia, nazywamy *kontrastem gęstości*.

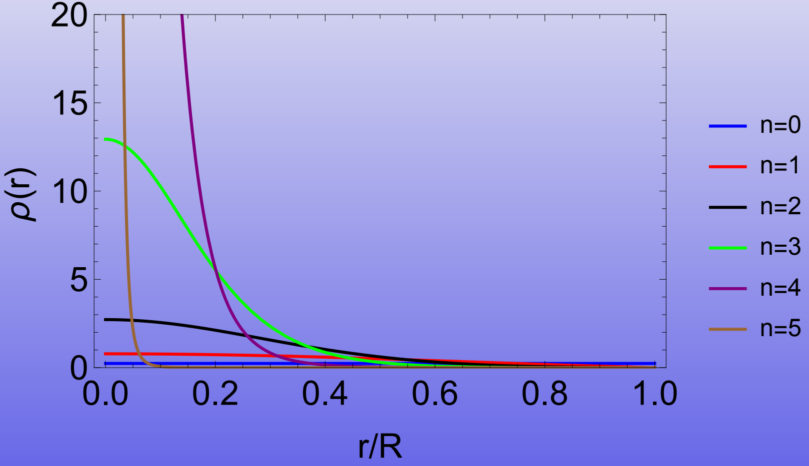
Przykłady struktury dla zadanego R i M



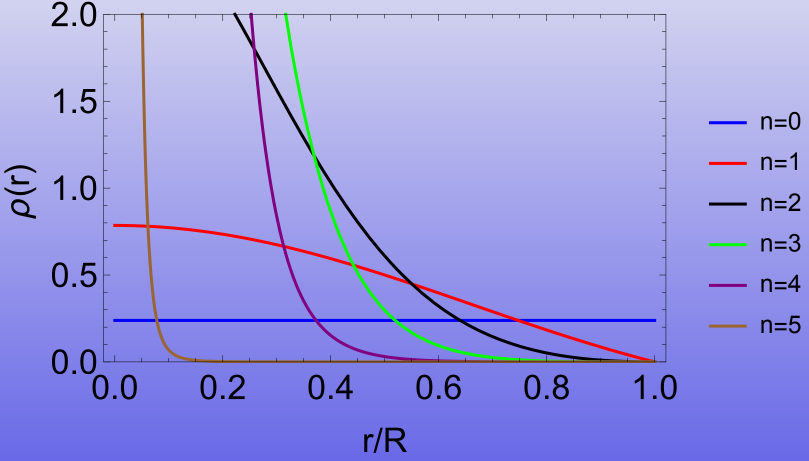
Przykłady struktury dla zadanego R i M



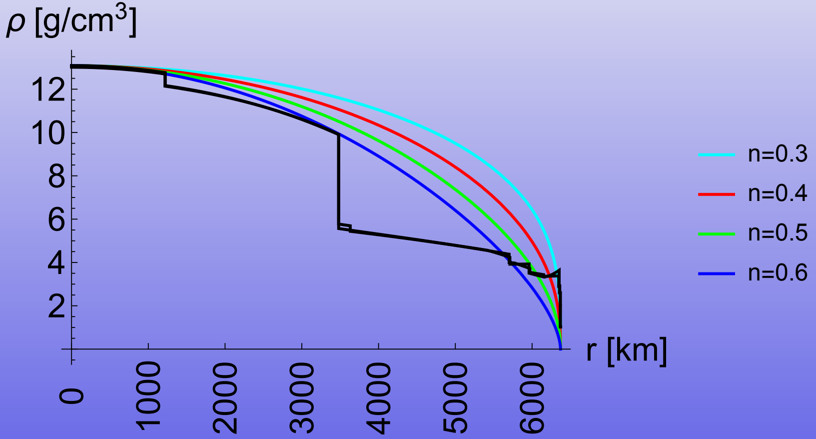
Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Politropowy model Ziemi *vs* PREM



Pomiar masy Ziemi

Dygresja: jak zmierzyć masę Ziemi lub innych obiektów astrofizycznych?

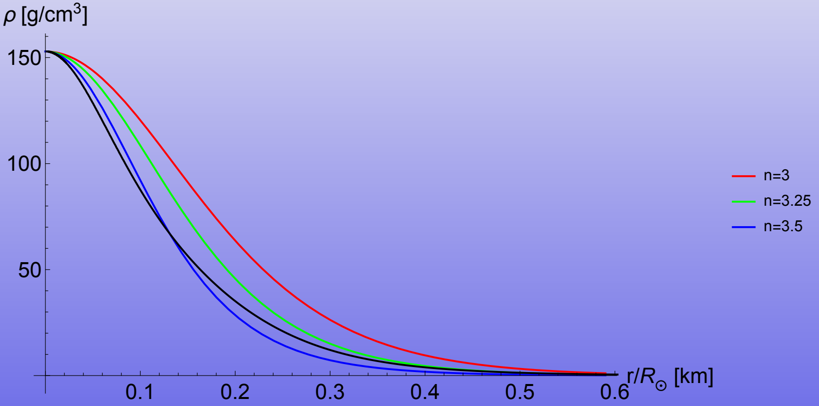
Wartość **iloczynu** GM, występująca np: w prawie Keplera, jest wyznaczana z dużą dokładnością:

$$GM_{\oplus} = 3.986004415 \pm 0.000000008 \times 10^{14}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

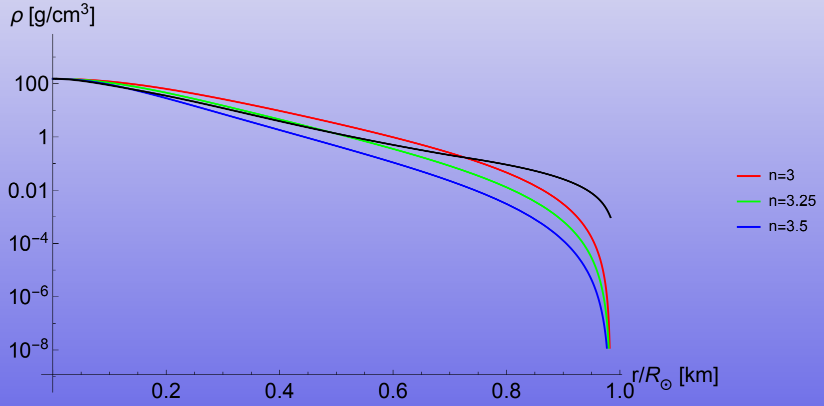
Nie jest natomiast możliwe wyznaczenie w pomiarach astronomicznych osobnych wartości dla G i $M_{\oplus}$.

Wyznaczenie masy Ziemi wymaga laboratoryjnego pomiaru G!

Politropowy model Słońca *vs* SSM



Politropowy model Słońca *vs* SSM



Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} M = 4\pi\lambda^3\rho_C \ \left(-x_0^2 w_n'(x_0)\right) \\ R = \lambda x_0 \\ \lambda^2 = \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} \\ h_C = K(n+1)\rho_C^{1/n} \end{cases} \tag{5}$$

Ostatnie równanie eliminuje h_C, z drugiego bierzemy λ. Zostają dwa równania łączące M, R i ρ_C. Po wyeliminowaniu gęstości centralnej ρ_C pozostaje skomplikowany wzór łączący promień R i masę M ciała:

$$R = \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{x_0}{w_n'(x_0)}\right)^{\frac{n-1}{n-3}} \left(\frac{4\pi G}{K(n+1)x_0^2}\right)^{n/(n-3)} \quad M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

Politropy: zależność masa-promień

Pomijając czynniki zależne tylko od równania stanu, t.j. K i n, mamy:

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

- dla $n < 1$ promień ciała R rośnie przy dokładaniu masy M
- dla $n = 1$ promień ciała R jest stały, niezależnie od masy M
- dla $1 < n < 3$ promień ciała **maleje** przy dokładaniu masy M
- dla $n = 3$ masa ciała $M = const$, i zależy wyłącznie od równania stanu (stałych fizycznych); w przypadku relatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego nazywamy ją *masą Chandrasekhara* $M_{Ch} \simeq m_{Planck}^3/m_{proton}^2 \simeq 1.5 M_{\odot}$
- dla $3 < n < 5$ promień znowu rośnie z masą
- dla $n \geqslant 5$ promień jest nieskończony

One-zone model

Dane jest równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

Przybliżamy gradient ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{p(R) - p(0)}{R - 0} = -\frac{p_C}{R}$$

i analogicznie prawą stronę:

$$-\frac{Gm\rho}{r^2} \sim -\frac{GM\rho_C}{R^2}$$

Dostajemy:

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

One-zone model *vs* polytropic model

W modelu politropowym:

$$\frac{GM}{R} = \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3\ \bar{\rho}}{R} = \frac{4\pi G\rho_C}{3}\left(-3\frac{w_n'(x_0)}{x_0}\right)\ \lambda^2 x_0^2 =$$

$$= -x_0 w_n'(x_0)\ 4\pi G\rho_C \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} = -x_0 w_n'(x_0)\ h_C =$$

$$= -x_0 w_n'(x_0)(n+1)\ \frac{p_C}{\rho_C}$$

One-zone	Politropa
$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$	$\frac{p_C}{\rho_C} = C_n \frac{GM}{R}$

$$C_n = -\frac{1}{x_0 w_n'(x_0)(n+1)}$$