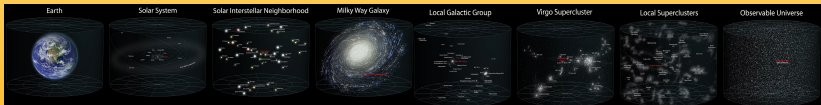


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

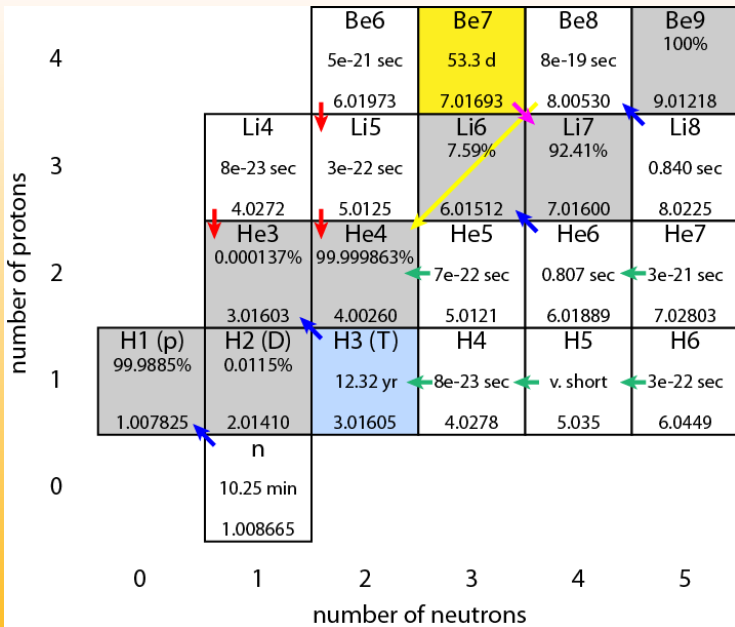
26 marca 2019



Powtórka z chemii jądrowej

Liczba protonów	Nazwa	Symbol	Name	Izotopy
Z=1	Wodór	H	Hydrogen	^2H , ^3H
Z=2	Hel	He	Helium	^3He , ^4He ,
Z=3	Lit	Li	Lithium	
Z=4	Beryl	Be	Beryllium	
Z=5	Bor	B	Boron	
Z=6	Węgiel	C	Carbon	
Z=7	Azot	N	Nitrogen	
Z=8	Tlen	O	Oxygen	
...	

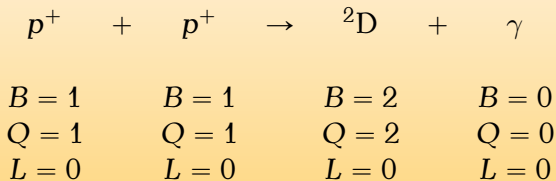
- Z – liczba protonów = ładunek elektryczny jądra
- N – liczba neutronów
- A = N+Z – liczba masowa
- symbol: AZ



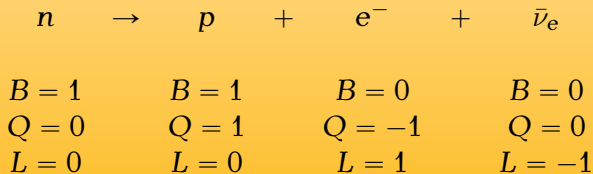
Kluczowe dla zrozumienia procesu nukleosyntezy są następujące fakty:

- jądro wodoru to proton
- nie istnieją stabilne jądra atomowe, które nie posiadają neutronów
- oddziaływania silne nie zamieniają protonów w neutrony
- proces zamiany protonu w neutron (i *vice versa*) zachodzi przez oddziaływania słabe i jest związany z emisją neutrina ν_e
- zachowanie ładunku elektrycznego Q jest oczywiste
- zachowana musi być liczba barionowa B i leptonowa L_e
- zachowana jest energia, pęd i moment pędu (wliczając spin)
- „reguła kciuka”: reakcja zachodzi najszybciej przez oddziaływania silne, chyba że jest zabroniona przez prawa zachowania – drugie w kolejności są oddziaływania elektromagnetyczne, na końcu słabe

Rozważmy podstawowe (pierwsze) reakcję kosmologicznej nukleosyntezy, w której produkowany jest deuter (${}^2\text{H}$, czasem oznaczany jako d lub D):

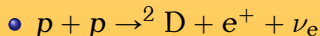


Kolejna kluczowa reakcja to rozpad neutronu:



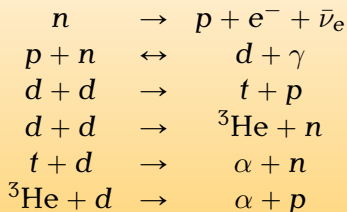
Formalnie mogą występować wszystkie możliwe reakcje dozwolone przez prawa zachowania. W praktyce tempo większości z nich jest pomijalnie małe, co uzasadnia użycie tempa reakcji równego zero, czyli całkowite pominięcie danej reakcji w dalszych rozważaniach.

Przykład: przyjmujemy, że w Wielim Wybuchu **nie zachodzą** możliwe w innych warunkach (np: w Słońcu) reakcje, np:

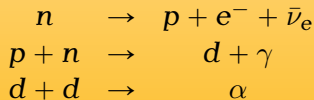


Sieć reakcji tego typu określamy jako **hardwired network**.

Kosmologiczna nukleosynteza (wersja minimum)



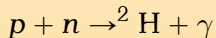
lub w skrócie, zastępując cztery ostatnie reakcje jedną „efektywną”:



W procesie nukleosyntezy, oprócz jąder, biorą udział inne cząstki:

- neutrina powodują utrzymanie protonów i neutronów w *kinetycznej równowadze beta*; w trakcie nukleosyntezy tempo ekspansji staje się większe od tempa reakcji i neutrina ulegają *odseparowaniu* z temperaturą $T_\nu = \sqrt[3]{4/11} T_\gamma$
- fotony γ powodują fotodezintegrację deuteronów
- pozytony anihilują z elektronami: $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ zwiększając temperaturę; dla $kT > m_e$ są stale obecne

Rozważmy reakcję:



Ilości fotonów γ nie śledzimy *explicite*. Zostają gęstości neutronów n_n protonów n_p i deuteronów n_d . Ich zmiana w czasie wynosi:

$$\dot{n}_n = -\lambda_{pn}n_p n_n + \dots$$

$$\dot{n}_p = -\lambda_{pn}n_p n_n + \dots$$

$$\dot{n}_d = +\lambda_{pn}n_p n_n + \dots$$

gdzie $\lambda_{pn}(T, \rho)$ to tempo zachodzenia reakcji pn , a kropkami zaznaczono inne reakcje.

$$\dot{n}_n = -\lambda_{pn}n_p n_n + \dots$$

$$\dot{n}_p = -\lambda_{pn}n_p n_n + \dots$$

$$\dot{n}_d = +\lambda_{pn}n_p n_n + \dots$$

- tempo ubywania protonów i neutronów musi być równe tempu produkcji deuteronów
- liczba barionowa jest zachowana, czyli $n_n + n_p + 2n_d = \text{const}$: odpowiednie wyrazy po prawej stronie kasują się
- podobne wyrazy musimy napisać dla każdej z reakcji tworzącej lub niszczącej n , p , d itd.
- układ jest nieliniowy nawet dla $T, \rho = \text{const}$
- układ jest sztywny (stiff), co wymusza rozwiązywanie numeryczne metodami uwikłanymi (implicit)
- da się to robić np: w *Mathematica*: Method→"BDF", MaxDifferenceOrder→2

Liczba cząstek w rozszerzającym się sześcianie o boku $a(t)$ jest zachowana, np:

$$n_p a^3 = \text{const}$$

Po zróżniczkowaniu i podzieleniu przez a^3 :

$$\dot{n}_p + 3Hn_p = 0,$$

gdzie stała Hubble'a z definicji to $H = \dot{a}/a$.

Układ równań różniczkowych kosmologicznej nukleosyntezy

$$\dot{n}_n + 3Hn_n = -\lambda_n n_n - \lambda_{pn} n_p n_n + \lambda_{d\gamma} n_d$$

$$\dot{n}_p + 3Hn_p = +\lambda_n n_n - \lambda_{pn} n_p n_n + \lambda_{d\gamma} n_d$$

$$\dot{n}_d + 3Hn_d = +\lambda_{pn} n_p n_n - \lambda_{d\gamma} n_d - 2\lambda_{dd} n_d^2$$

$$\dot{n}_\alpha + 3Hn_\alpha = \lambda_{dd} n_d^2$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

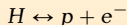
$$\sum_{i=1}^4 A_i n_i = n_n + n_p + 2n_d + 4n_\alpha = \text{const},$$

lub równoważnie:

$$\dot{n}_n + \dot{n}_p + 2\dot{n}_d + 4\dot{n}_\alpha = 0.$$

Rekombinacja i (re)jonizacja Wszechświata

Rozważmy rozpad atomu wodoru na proton i elektron:



W równowadze, potencjały chemiczne muszą spełniać:

$$\mu_H = \mu_p + \mu_{e^{-}}$$

Dla klasycznej granicy relatywistycznego kwantowego gazu doskonałego (Bosego/Fermiego-Diraca):

$$\frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} \rightarrow e^{-(mc^2+E')/kT} e^{\mu/kT}$$

potencjał chemiczny wynosi:

$$\mu = mc^2 + kT \ln \left(\frac{n}{g} \lambda^3 \right)$$

gdzie $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ to *termiczna długość fali de Broglie'a*.

Wstawiając wzór na μ do równania równowagi otrzymujemy równanie Saha:

$$\frac{n_p n_{e^{-}}}{n_H} = \frac{g_p g_{e^{-}}}{g_H} \frac{1}{\lambda_e^3} e^{-\frac{Q}{kT}}$$

gdzie energia wiązania/jonizacji $Q = (m_H - m_p - m_{e^{-}}) c^2$.

Równanie jonizacji: przykład rozwiązania

Z zasady zachowania ładunku (przy braku obecności innych jąder atomowych!) możemy podstawić $n_e = n_p$. Sumaryczna gęstość $n_p + n_H = \rho/m_H$, co daje prosty algebraiczny układ równań do rozwiązania:

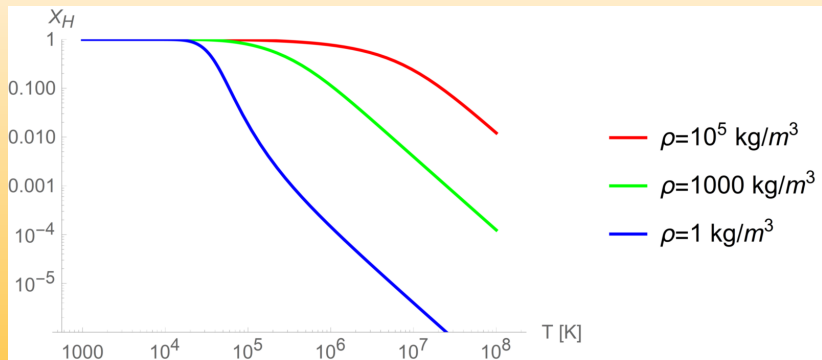
$$\begin{cases} \frac{n_p^2}{n_H} = \frac{2h^3}{\sqrt{2\pi m_e kT}^3} e^{\frac{E_0}{kT}} \\ n_p + n_H = \rho/m_H \end{cases}$$

gdzie $E_0 = -13.6 \text{ eV} = eE_0 \text{ J}$ ($e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ - ładunek elektronu) to energia jonizacji/wiązania atomu wodoru.

Wprowadzając zawartość protonów $X_p \equiv n_p/n$ oraz atomów wodoru $X_H = n_H/n$ problem można sprowadzić do równania kwadratowego:

$$\frac{X_p^2}{1 - X_p} = f(\rho, T), \quad f \propto \frac{T^{3/2} e^{-E_0/(kT)}}{\rho}$$

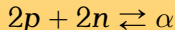
Równanie jonizacji: przykład rozwiązania



Atomy wodoru „styka się” już dla $\rho > 1600 \text{ kg/m}^3$.

Istotne jest podkreślenie, iż równanie Saha może być stosowane w różnych sytuacjach astrofizycznych, i nie tylko:

- fotodezintegracja deuteronu
- nuklearna równowaga statystyczna (NSE, Nuclear Statistical Equilibrium), np: reakcja typu „dysocjacji” cząstek α (jąder atomu helu ${}^4\text{He}$) na protony i neutrony:



- dysocjacja dwuatomowych molekuł, np: wodoru cząsteczkowego:



Po rekombinacji, kiedy protony i elektrony połączyły się w neutralne atomy wodoru $p + e^- \rightarrow H$, nastąpiła epoka, w której nie było żadnych źródeł promieniowania.

Jedynym procesem, który nadal zachodził, była N-ciałowa ewolucja „cząstek” ciemnej materii w wyniku której tworzą się zagęszczenia i rozrzedzenia masy

Rozmiary Wszechświata

O ile we wczesnym Wszechświecie, ewolucję kosmosu opisuje się w terminach czasu lub temperatury (ewentualnie kT), po powstaniu CMB powszechnie używa się *przesunięcia ku czerwieni* z . Czynniki skali a i temperatura CMB wiąże się z z następująco

$$a(z) = \frac{a(0)}{1+z}, \quad T(z) = T(0)(1+z).$$

Przykłady: Wielki Wybuch $z = \infty$; koniec dominacji promieniowania $z = 3600$; rekombinacja/powstanie CMB $z = 1000$; całkowita rejonizacja $z = 6$, obecnie $z = 0$.

Standardowy model kosmologiczny Λ -CDM

Standardowy model kosmologiczny ze stałą kosmologiczną Λ oraz zimną ciemną materią (ang. **Cold Dark Matter, CDM**)

Zgodnie ze współczesnymi ustaleniami, żyjemy w płaskim ($k = 0$) Wszechświecie pyłowym (ciemna materia) ze stałą kosmologiczną (ciemna energia).

Model ten posiada eleganckie rozwiązanie analityczne

$$a(t) = a_0 \sinh \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct \right)^{2/3}, \quad \rho(t) = \frac{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}{\sinh \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct \right)^2},$$

$$H(t) = \frac{c\sqrt{\Lambda/3}}{\operatorname{tgh} \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct \right)}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad T = \frac{2}{3H_0} \operatorname{artanh}(\sqrt{\Omega_\Lambda})/\sqrt{\Omega_\Lambda}$$

Model ten dla $t \rightarrow 0$ redukuje się do płaskiego modelu „newtonowskiego” $a(t) \rightarrow t^{2/3}$, natomiast dla $t \rightarrow \infty$ staje się „przestrzenią de Sittera” $a(t) \rightarrow e^{H_\infty t}$, $H_\infty = c\sqrt{\Lambda/3}$.

Gęstość krytyczna Wszechświata stanowi wygodną jednostkę miary ilości materii. Stosunek gęstości materii (lub jej ilości po przeliczeniu na gęstość) do gęstości krytycznej nazywamy „omegą”

$$\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_C}, \quad \rho_C = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Dla promieniowania (γ, ν) o gęstości energii ε mamy

$$\Omega_\gamma = \frac{\varepsilon/c^2}{\rho_C} = \frac{32\pi G\sigma T^4}{3c^3 H_0^2},$$

a dla stałej kosmologicznej

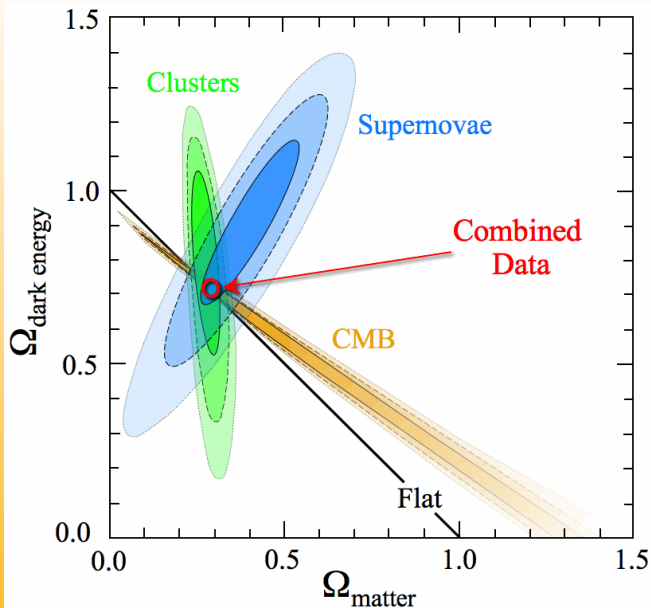
$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2/(8\pi G)}{\rho_C} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

UWAGA: Ω_i jest na ogół wielkością zależną od czasu, definiujemy ją w chwili obecnej!

Współczesny model kosmologiczny, Λ -CDM (płaska geometria, stała kosmologiczna Λ i zimna ciemna materia, ang. **Cold Dark Matter**) opiera się przede wszystkim na trzech obserwacjach:

- 1 zależność odległości (jasnościowej) od przesunięcia ku czerwieni z , opartej głównie o pomiary typowych (Branch-normal) supernowych typu Ia
- 2 obserwacje mikrofalowego promieniowania tła (CMB, **Cosmic Microwave Background**), szczególnie *widma mocy* rozkładu jego fluktuacji na częstotliwości (harmoniki sferyczne)
- 3 porównanie obserwowanego rozkładu materii z symulacjami tworzenia się struktur, od skal największych (pustki, „włókna”, supergromady) do galaktyk

Precyzyjnego testu na gęstość materii barionowej dostarcza produkcja pierwiastków, głównie helu, czyli *kosmologiczna nukleosynteza*.



Parametry modelu Λ -CDM

- stała Hubble'a

$$H_0 = 67.8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 2.2 \times 10^{-18} \frac{1}{\text{s}}, \quad \frac{1}{H_0} = 14.4 \text{ mld lat}$$

- wiek Wszechświata

$$T = 13.8 \text{ mld lat}$$

- skład w chwili obecnej ($\rho_C = 8.6 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \sim 5$ atomów wodoru/ m^3)

- stała kosmologiczna (ciemna energia, energia próżni)

$$\Omega_\Lambda = 0.7, \quad \Lambda = 1.11 \times 10^{-52} \frac{1}{\text{m}^2}, \quad \rho_\Lambda = 6 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- zimna ciemna materia Ω_m i materia barionowa Ω_B

$$\Omega_m = 0.25, \quad \Omega_B = 0.05$$

- promieniowanie („lekkie” neutrino, fotony)

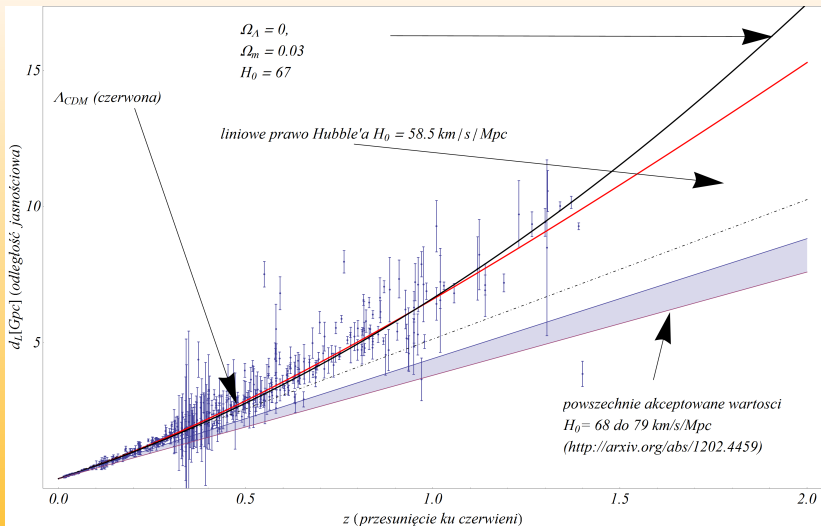
W kosmologii nie jest możliwe podanie odległości bez powiązania jej z konkretną metodą pomiaru.

- odległość jasnościowa d_L
- odległość rozmiarów kątowych d_A

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{1+z}{\sqrt{1-\Omega_m-\Omega_\Lambda}} \operatorname{sinn} \int_0^z \frac{\sqrt{1-\Omega_m-\Omega_\Lambda} dz'}{\sqrt{(1+z')^2(1+\Omega_m z') - z'(z'+2)\Omega_\Lambda}}$$

W przestrzeni euklidesowej (model newtonowski) lub dla $z \ll 1$ z efektu Dopplera $\lambda/\lambda_0 = 1 + v/c$:

$$d_L = \frac{c z}{H_0} \equiv d_i$$



Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08