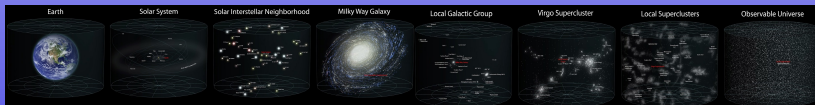


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

15 marca 2016

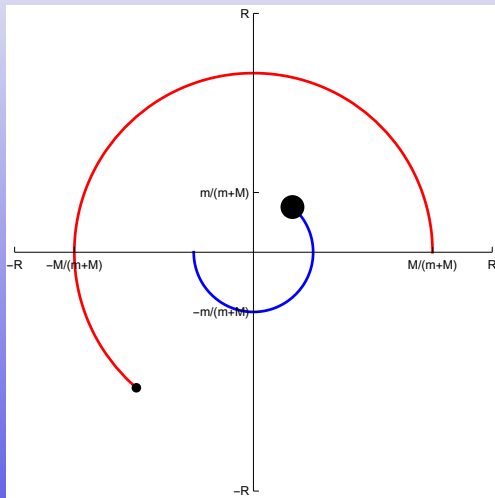


Ograniczony, płaski, kołowy problem trzech ciał

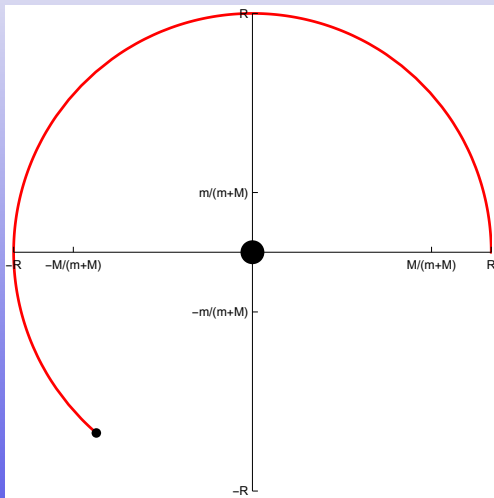
Założenia:

- 1 masy m oraz M krążą wokół środka masy po okręgach, czyli ze stałą prędkością kątową
- 2 trzecia masa μ jest pomijalnie mała $\mu \ll m, \mu \ll M$
- 3 ruch odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie orbitalnej mas m i M
- 4 tradycyjnie, przechodzimy do układu nieinercyjnego w którym masy m i M są nieruchome
- 5 przykłady:
 - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_{\oplus}, \mu \rightarrow M_{\zeta}$
 - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \rightarrow M_{\zeta}, \mu \rightarrow$ sonda kosmiczna, np: Apollo
 - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_J, \mu \rightarrow$ planetoidy trojańskie
 - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \simeq 500 \text{ kg}, \mu \simeq 0.1 \text{ kg} \rightarrow$ masy orbitalnego eksperymentu mierzącego stałą G

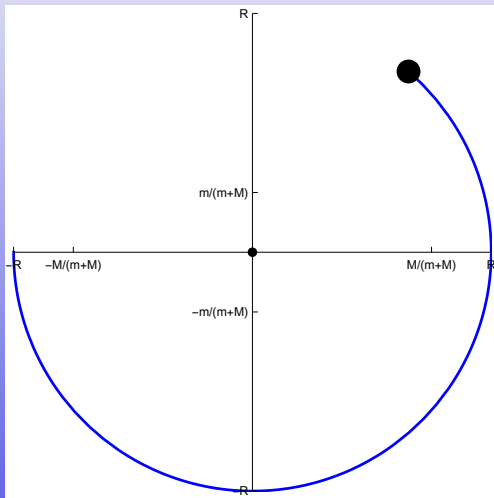
Szkic sytuacji



Szkic sytuacji



Szkic sytuacji



$$\mathbf{r}_m = \frac{M}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1a)$$

$$\mathbf{r}_M = -\frac{m}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1b)$$

$$\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3} \quad (1c)$$

Ruch masy próbnej μ w polu mas m, M

Wypisujemy równania Newtona w układzie inercyjnym, zakładając, że pozycje mas m i M są zadane z góry.

$$\mu \ddot{x} = -\frac{G\mu m(x - x_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(x - x_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2a)$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{G\mu m(y - y_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(y - y_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2b)$$

$$r_{\mu m} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|, \quad r_{\mu M} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \quad (2c)$$

Przejsie do obracajacego sie ukkladu

Dokonujemy zamiany funkcji niewiadomych:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

gdzie $x(t), y(t)$ – połozenie w ukkladzie inercjalnym,
 $X(t), Y(t)$ – połozenie w ukkladzie korotujacym.

Ruch w obracającym się układzie odniesienia

$$\ddot{X} = \omega^2 X + 2\omega \dot{Y} - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3a)$$

$$\ddot{Y} = \omega^2 Y - 2\omega \dot{X} - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3b)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \omega^2 \mathbf{R} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{R} = \{X(t), Y(t)\} \quad (3c)$$

- $\omega^2 \mathbf{R}$ - przyspieszenie odśrodkowe
- $-2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}$ - przyspieszenie Coriolisa
- \mathbf{g} - przyspieszenie grawitacyjne (natężenie pola grawitacyjnego)

Punkty Lagrange'a

Okazuje się, że powyższy układ równań posiada aż 5 rozwiązań stałych, t.j. opisujących masę próbną spoczywającą w układzie obracającym się.

Zakładając, że $\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, otrzymujemy układ 2 równań algebraicznych:

$$\omega^2 \mathbf{R} + \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

$$\omega^2 X - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4a)$$

$$\omega^2 Y - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GMY}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4b)$$

Kolinearne punkty L_1, L_2, L_3

Zakładając, że $Y = 0$ otrzymujemy równanie na punkty leżące na linii łączącej masy m i M :

$$\omega^2 X_i = \pm \frac{Gm}{\left(X_i - R \frac{M}{m+M}\right)^2} \pm \frac{GM}{\left(X_i + R \frac{m}{m+M}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Znaki \pm biorą się z wyrażeń typu:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}^3} = \frac{x}{|x|^3} = \frac{1}{x|x|} = \pm \frac{1}{x^2}.$$

- powyższe równanie jasno pokazuje równość sił odśrodkowej i grawitacyjnej
- w postaci nieuproszczonej jest ono bardzo trudne do rozwiązania, nawet z użyciem *Mathematici*
- konieczna redukcja liczby symboli literowych

Uproszczenie równania na współrzędne punktów L_1, L_2, L_3

- 1 podstawienie $\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3}$ pozwala skrócić G
- 2 zmiana jednostek długości $X_i = \zeta_i R$ pozwala na pozbycie się R
- 3 wprowadzenie stosunku mas $q = m/M$ dodatkowo upraszcza równanie

$$\zeta = \frac{(1+q)q}{\pm(1+\zeta+\zeta q)^2} + \frac{1+q}{\pm(\zeta-q+\zeta q)^2}$$

gdzie wyrażenie typu $\pm x^2$ należy rozumieć jako $\pm x^2 \equiv x|x| = x^2 \text{sign}(x)$.

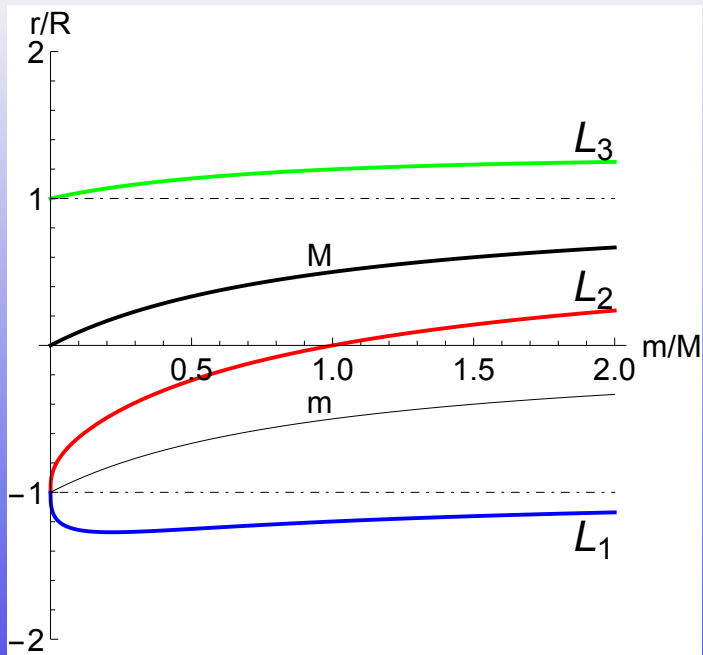
Otrzymaliśmy równanie algebraiczne, równoważne równaniu 5 stopnia z jednym parametrem. Takie zadanie może rozwiązać dla rzeczywistego q, ζ algorytm komputerowy (<http://mathworld.wolfram.com/TarskisTheorem.html>).

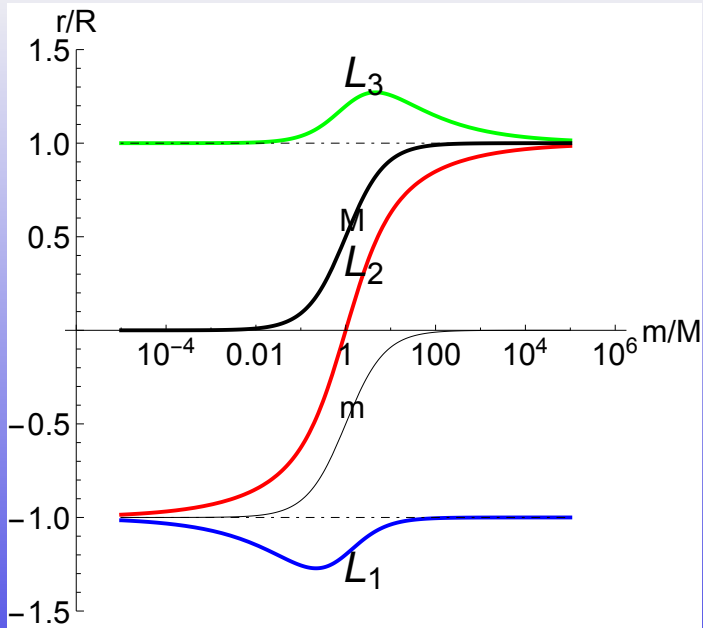
Punkty L_1, L_2, L_3 : rozwiązanie

$$\zeta^5(q+1)^4 - 2\zeta^4(q-1)(q+1)^3 + \zeta^3(q+1)^2(q^2 - 4q + 1) - \zeta^2(q^4 - 1) + \zeta(2q^4 + 4q^3 + 5q^2 + 4q + 2) - q^4 - q^3 + q + 1 = 0$$

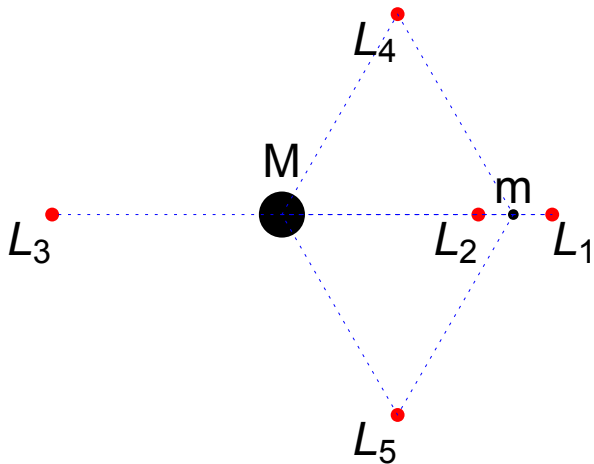
Rozwiązanie powyższego typu równania nie przedstawia trudności dla programu *Mathematica*. Wynik jest w postaci definiowalnej liczby algebraicznej **Root**.

- wynik musi być niezmienniczy na zamianę $m \leftrightarrow M$, czyli $q \rightarrow 1/q$
- pozycje i numeracja punktów L_1, L_2, L_3 odwracają się





$$m/M=81$$



Bardzo ciekawym faktem, jest istnienie dwóch punktów stacjonarnych, tworzących **trójkąt równoboczny** z masami m i M . Znajomość tego faktu pozwala od razu wypisać ich współrzędne:

$$X_{L_{4,5}} = \frac{1}{2} \frac{m - M}{m + M} R, \quad Y_{L_{4,5}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

- fakt ten jest nieintuicyjny
- jeszcze bardziej zaskakuje stabilność pozycji $L_{4,5}$ przy odpowiednim stosunku mas $q = m/M$
- powyższe własności mają istotne znaczenie astrofizyczne oraz astronautyczne

$$\ddot{X}\dot{X} = \omega^2 X\dot{X} + 2\omega\dot{Y}\dot{X} + g_X\dot{X} \quad (5a)$$

$$\ddot{Y}\dot{Y} = \omega^2 Y\dot{Y} - 2\omega\dot{X}\dot{Y} + g_Y\dot{Y} \quad (5b)$$

Dodając powyższe równania, skracając wyrazy z przyspieszeniem Coriolisa i całkując po t otrzymujemy:

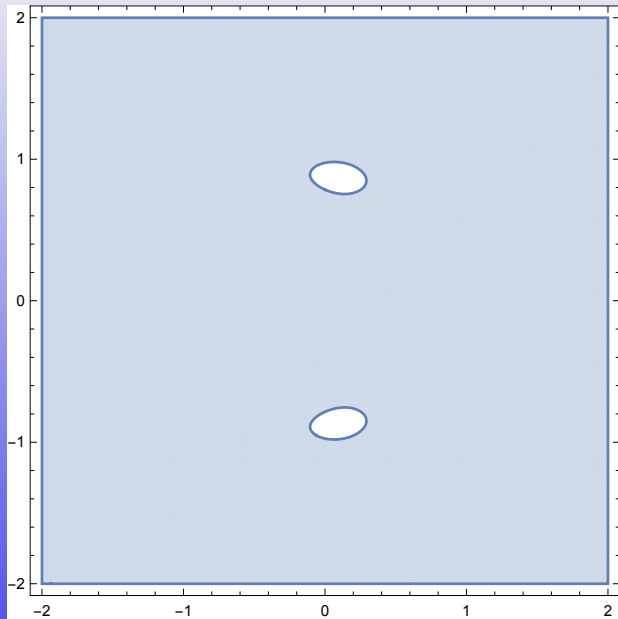
$$\frac{1}{2} \left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \right) - \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) - V_g(X, Y) = E$$

Ponieważ energia kinetyczna $\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$ musi być nieujemna, ruch jest dozwolony tylko w obszarze określonym nierównością:

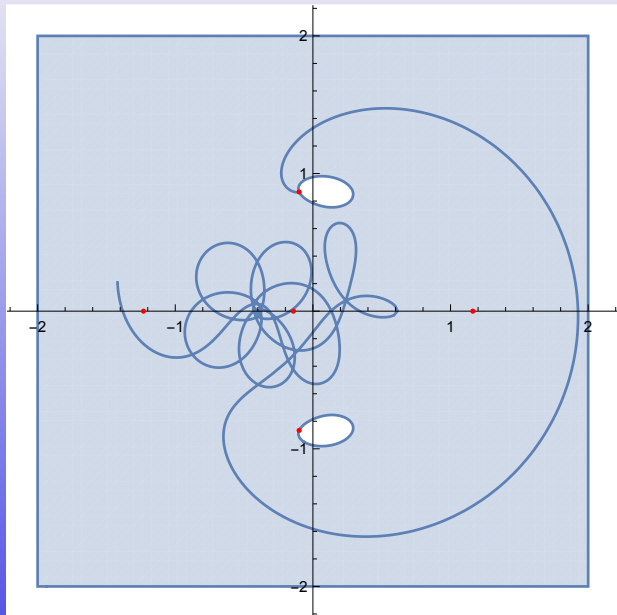
$$\frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) + V_g(X, Y) < E$$

Region Hill'a nigdy nie zostanie opuszczony, ale nie jest wiadomo jaki ruch jest faktycznie możliwy.

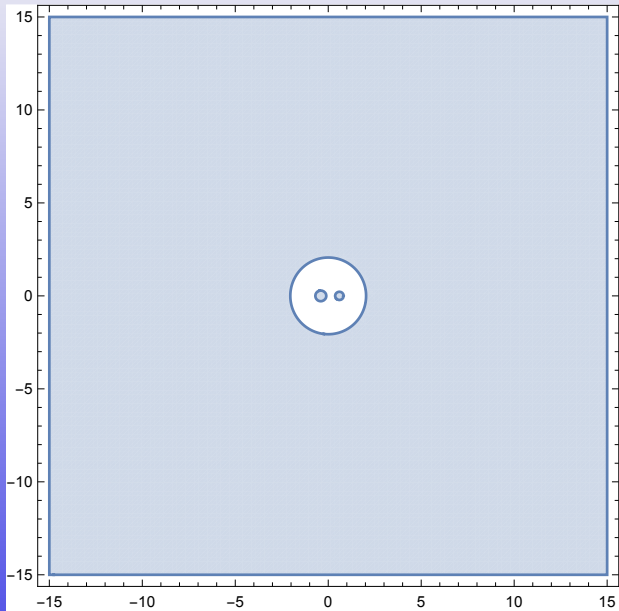
Region Hill'a: przykład 1



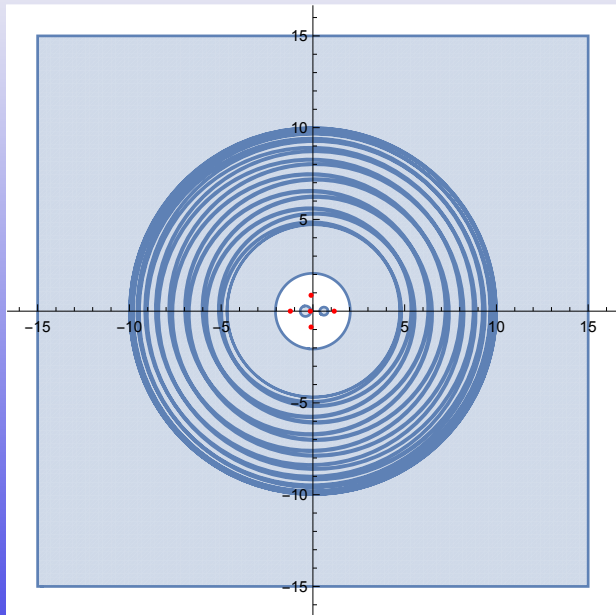
Region Hill'a: przykład 1



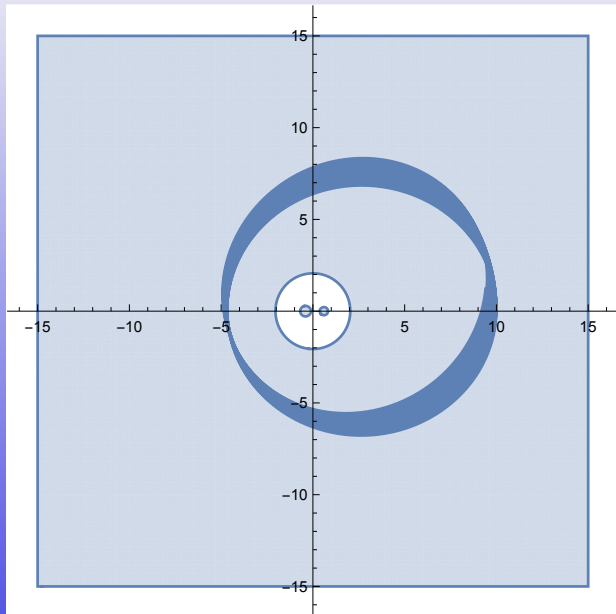
Zaburzona elipsa, strukturalnie stabilna



Zaburzona elipsa, strukturalnie stabilna

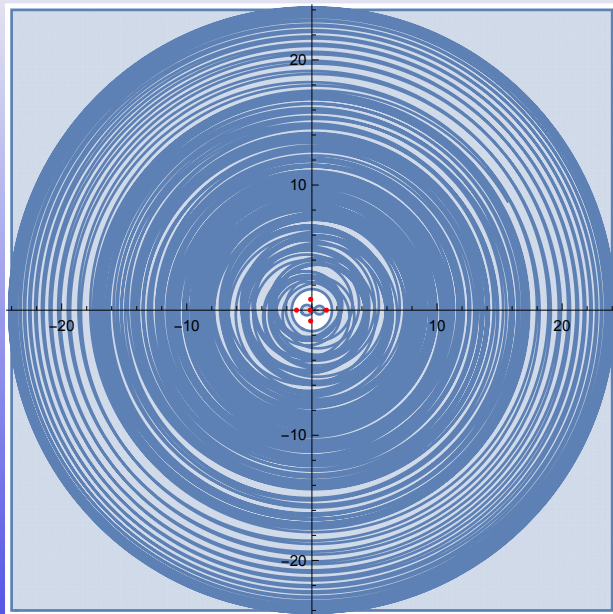


Zaburzona elipsa, strukturalnie stabilna

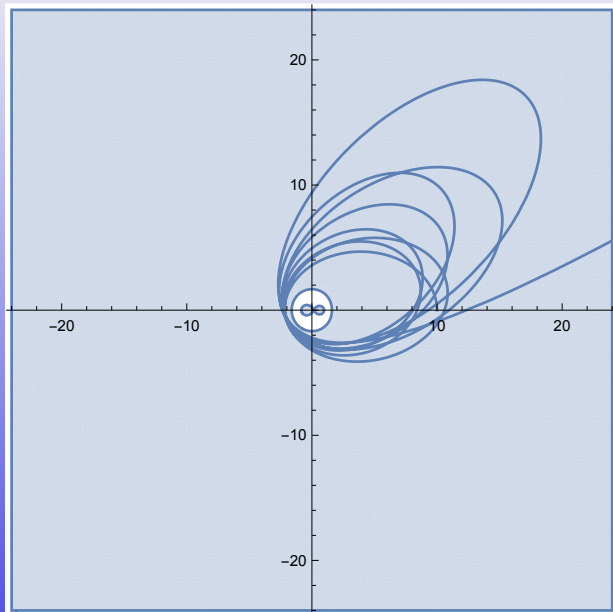


Zaburzona elipsa, wyrzucenie z układu

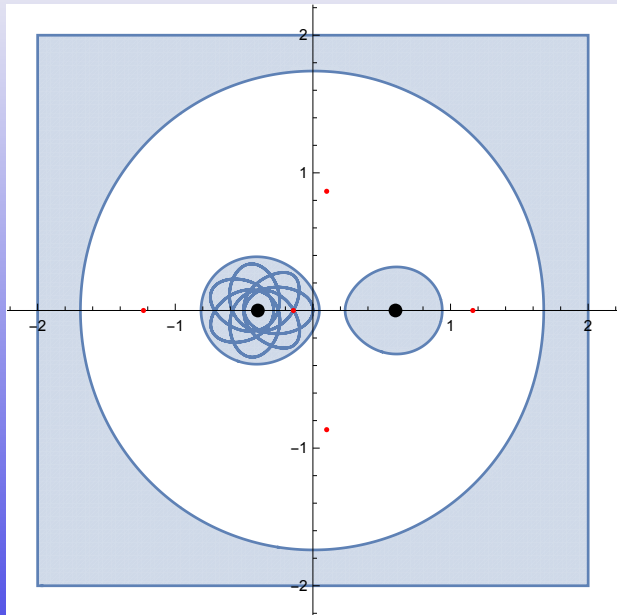
Zaburzona elipsa, wyrzucenie z układu



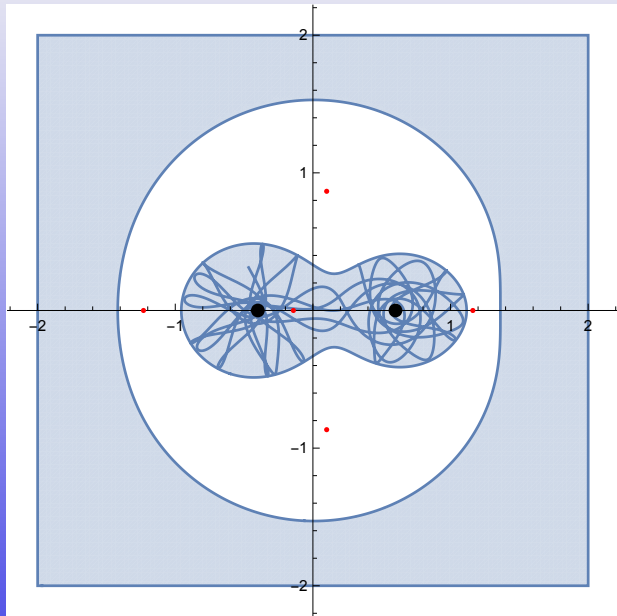
Zaburzona elipsa, wyrzucenie z układu



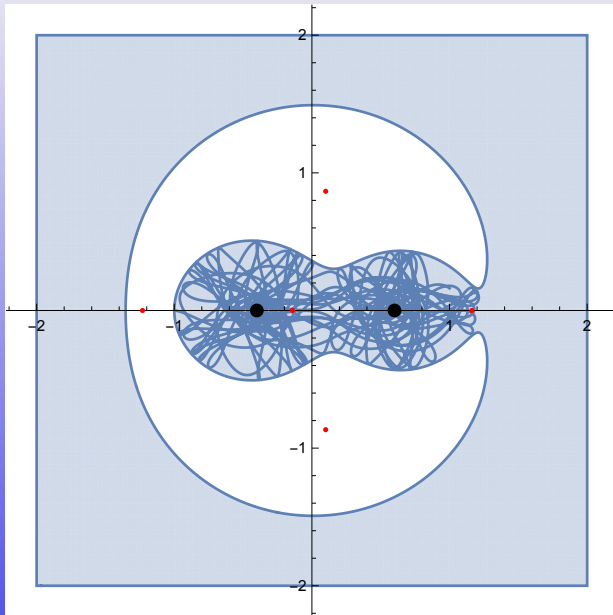
Ruch w pobliżu mas m i M



Ruch w pobliżu mas m i M

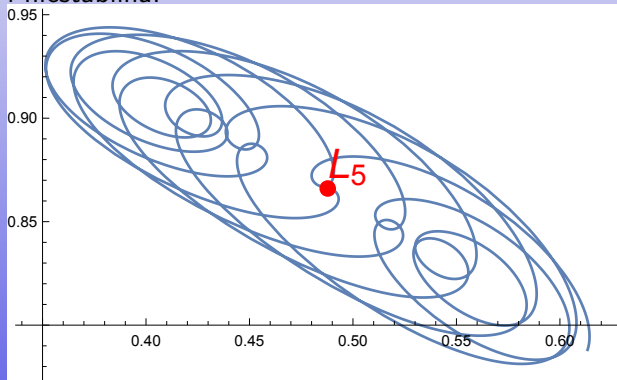


Ruch w pobliżu mas m i M



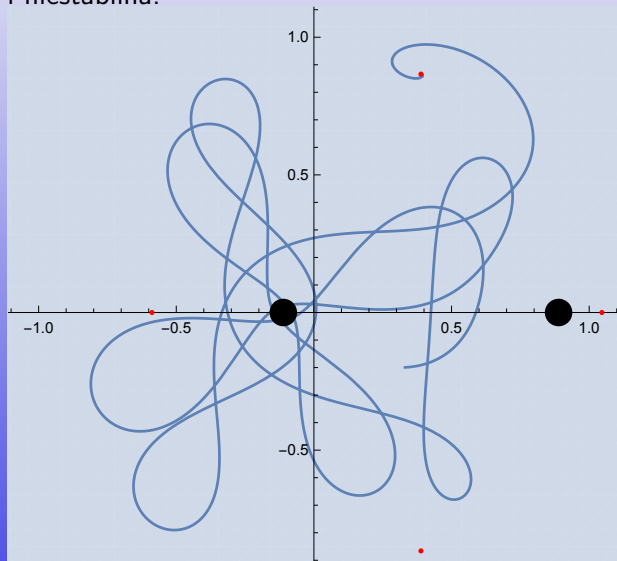
Stabilność punktów Lagrange'a: ewidencja numeryczna

Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



Stabilność punktów Lagrange'a: ewidencja numeryczna

Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



Stabilność punktów Lagrange'a: wyprowadzenie

W równaniach ruchu podstawiamy:

$$X(t) = \frac{1}{2}R \frac{M - m}{M + m} + \epsilon x(t) \quad (6a)$$

$$Y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}R + \epsilon y(t) \quad (6b)$$

a następnie rozwijamy w szereg potęgowy względem ϵ . Interesują nas człony przy ϵ , które utworzą układ równań różniczkowych liniowych:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \frac{3}{4}\omega^2 x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m - M}{M + m} x = 0 \quad (7a)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \frac{9}{4}\omega^2 y + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m - M}{M + m} y = 0 \quad (7b)$$

Stosujemy standardową procedurę dla równań liniowych:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

i otrzymujemy algebraiczny układ równań liniowych:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{3\omega^2}{4} & -2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} \\ 2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} & \lambda^2 - \frac{9\omega^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Wyznacznik macierzy powyżej daje równanie charakterystyczne:

$$\lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4} \frac{G^2 m M}{R^6} = 0.$$

Definicja niestabilności

Układ jest wykładniczo niestabilny w reżimie liniowym, gdy co najmniej jedna wartość własna posiada część rzeczywistą większą od zera:

$$\exists_{\lambda, \lambda \in \mathbb{C}} \lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4}\omega^2 \frac{mM}{(m+M)^2} = 0 \quad \& \quad \Re(\lambda) > 0$$

Rozwiązanie zagadnienia stabilności: 2 sposoby

- 1 tradycyjnie: liczymy deltę r . dwukwadratowego i sprawdzamy kiedy jest równa zero (do przeliczenia na tablicy lub w domu)
- 2 stosując algorytm **eliminacji kwantyfikatorów**:
 - zapisujemy szczegółowo warunki jakie mają spełniać wartości własne i parametry: czy są rzeczywiste/ zespolone, większe od zera, ile ma ich być, czy mają być różne, itp. itd. za pomocą operacji przynależenia do zbioru, równości i nierówności oraz kwantyfikatorów \exists i \forall
 - powyższe wymaga staranności i pomysłowości
 - uruchamiamy algorytm: w *Mathematice* jest to **Resolve** (można użyć **Reduce**)
 - uszczegóławiamy wynik ręcznie lub za pomocą **Refine**

Obszar niestabilności:

$$\frac{25M}{2} - \frac{3\sqrt{69}M}{2} < m < \frac{3\sqrt{69}M}{2} + \frac{25M}{2}, \quad \frac{3\sqrt{69}}{2} + \frac{25}{2} \simeq 24.9599$$

Czas narastania niestabilności, tzw. czas Lyapunowa τ lub *e-folding time* to odwrotność największej z dodatnich stałych λ . Zależy od tego, jak daleko jesteśmy od punktu krytycznego. W powyższym przypadku λ osiąga maksimum dla $m = M$:

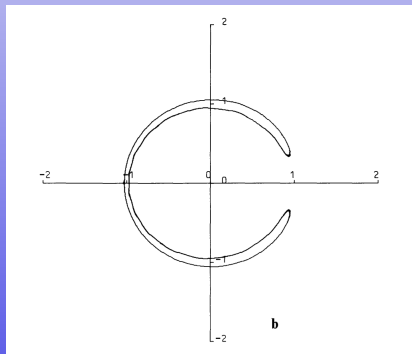
$$\lambda_{max} = \omega \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \simeq 0.12 T_{orb}$$

Rzeczywisty czas opuszczenia miejsca niestabilności zależy od tego, jak precyzyjnie ustalimy warunki początkowe. W praktyce szum numeryczny wystarcza aby zapoczątkować narastanie niestabilności.

Egzotyczne rozwiązania zagadnienia 3 ciał

Zagadnienie 3 ciał posiada bardzo bogaty zbiór nieoczekiwanych rozwiązań:

- orbita typu „podkowa”
- ruch trzech ciał w wierzchołkach trójkąta równobocznego
- „gonitwa po ósemce”

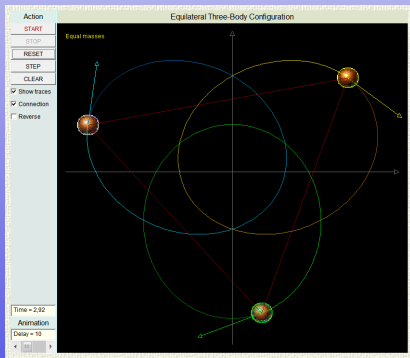


Zobacz: <http://butikov.faculty.ifmo.ru/Projects/Collection.html>

Egzotyczne rozwiązania zagadnienia 3 ciał

Zagadnienie 3 ciał posiada bardzo bogaty zbiór nieoczekiwanych rozwiązań:

- orbita typu „podkowa”
- ruch trzech ciał w wierzchołkach trójkąta równobocznego
- „gonitwa po ósemce”

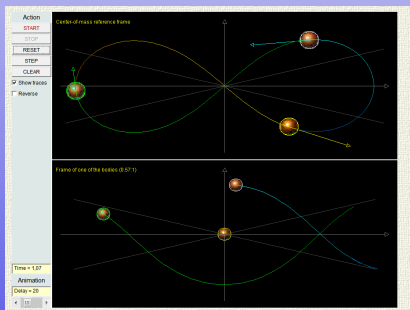


Zobacz: <http://butikov.faculty.ifmo.ru/Projects/Collection.html>

Egzotyczne rozwiązania zagadnienia 3 ciał

Zagadnienie 3 ciał posiada bardzo bogaty zbiór nieoczekiwanych rozwiązań:

- orbita typu „podkowa”
- ruch trzech ciał w wierzchołkach trójkąta równobocznego
- „gonitwa po ósemce”



Zobacz: <http://butikov.faculty.ifmo.ru/Projects/Collection.html>

W przypadku masy punktowej, przyspieszenie grawitacyjne i odśrodkowe równoważą się. W przypadku ciała rozciągniętego:

$$g = \frac{GM}{(d \pm r)^2} \simeq \frac{GM}{d^2} \mp \frac{2GM}{d^3} r$$

$$a = \omega^2(R \pm r) = \frac{GM}{d^2} \pm \frac{GM}{d^3} r$$

Odejmując stronami mamy:

$$a_t = \pm \frac{3GM}{d^3} r$$

Siła pływowa („rozrywająca”) zależy od:

- trzeciej potęgi odległości d od masy M
- rozmiarów r ciała poddanego sile pływowej

Rozmiar kątowy Słońca i Księżyca a pływy

Rozważmy ciało niebieskie o kształcie kulistym, które na niebie ma rozmiary kątowe α . Jaka będzie pochodząca od niego siła pływowa?

$$\frac{3GM}{d^3} = \frac{3G \frac{4}{3} \pi (\alpha d/2)^3 \rho}{d^3} = \frac{1}{2} \pi G \rho \alpha^3,$$

gdzie ρ to średnia gęstość.

Księżyc i Słońce mają te same rozmiary kątowe (zaćmienia!). Ich gęstości średnie to:

- $\bar{\rho}_{\odot} = 1408 \text{ kg/m}^3$
- $\bar{\rho}_{\text{C}} = 3344 \text{ kg/m}^3$

Wniosek: pływy pochodzące od Słońca są (tylko?) dwa razy słabsze niż od Księżyca.

Pytanie: z jakiej odległości podobne pływy wywołuje ludzkie ciało?