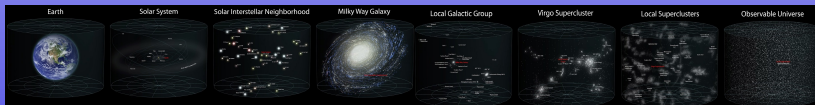


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

3 marca 2015



- 1 Jerzy Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*, PWN, 1996
- 2 Mini seria „ASTROFIZYKA”:
 - Tom I, Michał Jaroszyński, *Galaktyki i budowa Wszechświata*,
 - Tom II, Marcin Kubiak, *Gwiazdy i materia międzygwiazdowa*
 - Tom III, Paweł Artymowicz, *Astrofizyka układów planetarnych*

- Michał Różyczka, Jak powstają gwiazdy?, Alfa, 1990
- Stephen Hawking, Krótka historia czasu, Alfa, 1990
- Rudolf Kippenhahn, Na tropie tajemnic Słońca, Prószyński, 1997
- Steven Weinberg, Pierwsze trzy minuty, Prószyński, 1998
- Frank Drake, Dava Sobel, Czy jest tam kto?, Prószyński, 1995
- Richard Panek, Ciemna strona Wszechświata, Prószyński, 2011
- Arthur Koestler, Lunatycy, 2002, Zysk i S-ka
- Arthur I. Miller, Imperium gwiazd

Lista pozycji uzupełniających, o znaczeniu historycznym lub znacznie przestarzałych, ale ciągle wartych przeczytania:

- Mikołaj Kopernik, O obrotach ciał niebieskich
- Galileusz, Dialog o dwu najważniejszych układach świata: ptolemeuszowym i kopernikowym
- Andrzej Marks, Podróże międzygwiazdne?, Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, Warszawa 1983,
- Prof. B. Woroncow-Wieliaminow, Wszechświat, Książka i Wiedza, 1950
- Tjeerd H. van Andel, Nowe spojrzenie na starą planetę, PWN, 2013
- Isaac Asimov, Wybuchające gwiazdy. Sekrety supernowych.

Warunki zaliczenia

- 1 egzamin ustny
- 2 lista pojęć do wyjaśnienia i pytań
- 3 przeczytanie i omówienie wybranej książki popularnonaukowej lub naukowej z dziedziny astronomii i astrofizyki
- 4 zadania specjalne

Prawa Keplera (wersja oryginalna):

- 1 odległość r planety od Słońca opisuje wzór $r = p/(1 + e \cos \phi)$
- 2 pole zakreślane przez promień wodzący w jednostce czasu jest stałe
- 3 stosunek trzeciej potęgi „średniej” odległości od Słońca $a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$ do kwadratu okresu jest stały dla każdej z planet.

Prawa Keplera (wersja nowoczesna)

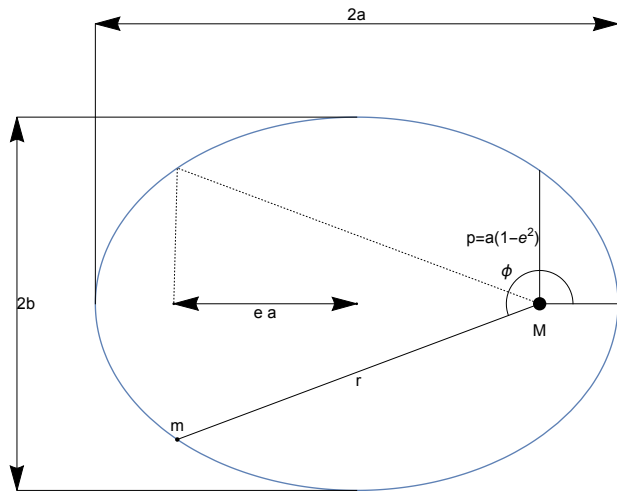
- 1 masa próbna porusza się po krzywej stożkowej: elipsa, parabola lub hiperbola, a masa centralna M znajduje się w jednym z ognisk
- 2 moment pędu cząstki próbnej jest zachowany

$$mr^2\dot{\phi} = const = J$$

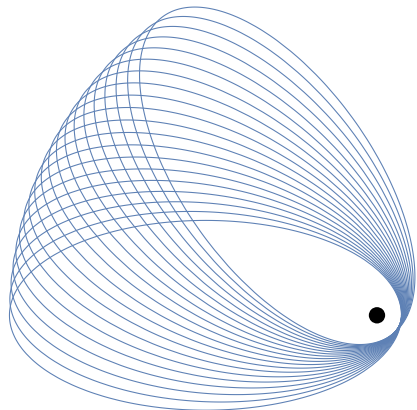
3

$$\frac{a^3}{T^2} = const = \frac{GM}{4\pi^2}, \text{ gdzie } a \text{ to wielka półoś elipsy, } [GM] = \frac{m^3}{s^2}$$

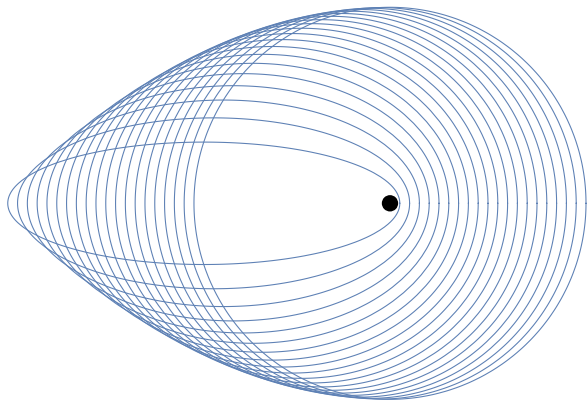
Orbita eliptyczna



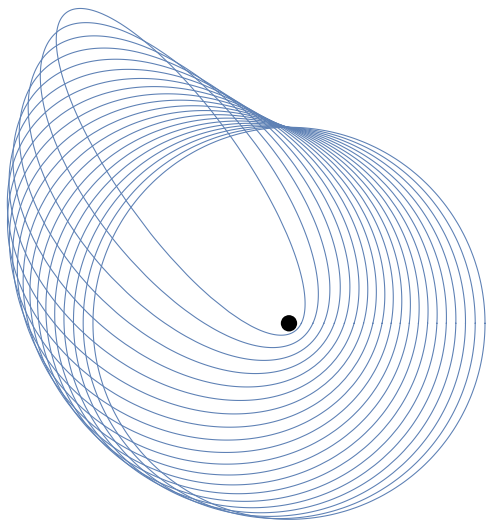
Orbita eliptyczna: zaburzenia



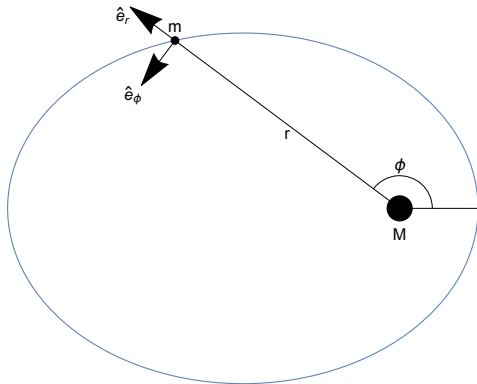
Orbita eliptyczna: zaburzenia



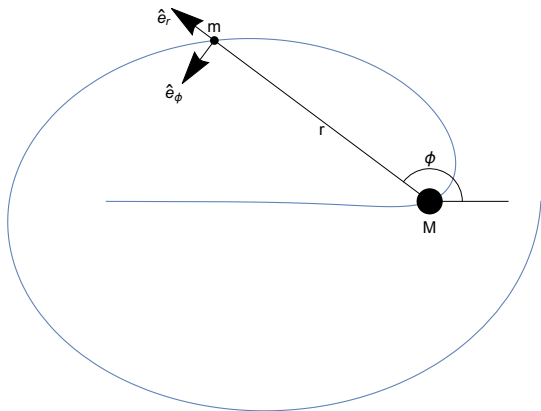
Orbita eliptyczna: zaburzenia



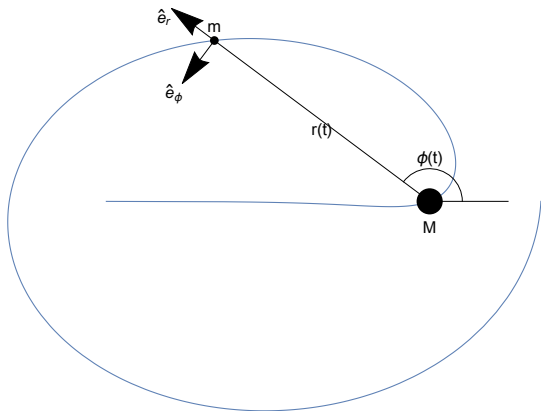
Wprowadzenie ruchu po elipsie



Wprowadzenie ruchu po elipsie



Wprowadzenie ruchu po elipsie



Rachunek na tablicy

Uwagi do numerycznego całkowania równania toru

Równanie toru opisuje kawałkami funkcja:

$$\frac{du(\phi)}{d\phi} = \pm \sqrt{\frac{2mE}{J^2} + \frac{2Gm^2M}{J^2} - u^2}, \quad u = 1/r$$

W perycentrum i apocentrum $dr/d\phi = 0$ i trzeba zmieniać znak w równaniu powyżej. Znacznie wygodniejsze jest zróżniczkowanie do postaci r . oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0.$$

Pokazana procedura prawie bez zmian przenosi się na ruch w ogólnym polu centralnym, w tym nierotujących czarnych dziur.

Związek parametrów elipsy z wielkościami zachowanymi

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

$$a = -\frac{GmM}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2m^3M^2}}$$

Dla dowolnej chwili t :

$$E = -\frac{GmM}{r(t)} + \frac{1}{2}mv(t)^2, \quad J = mv(t)r(t).$$

Dla ciała związanego (na orbicie eliptycznej) $E < 0$. Maksymalny możliwy moment pędu osiągany jest dla orbity kołowej. Dla $J = 0$ ciało m spada po linii prostej wprost na centrum.

Orientacja elipsy

- 1 położenie elipsy w przestrzeni, jak każdego ciała sztywnego, wymaga podania 3 współrzędnych
- 2 w astronomii tradycyjnie są to:
 - inklinacja i
 - długość węzła wstępującego Ω
 - długość perycentrum ω
- 3 z fizycznego punktu widzenia położenie elipsy wyznaczają wielkości zachowane:
 - wektor momentu pędu \mathbf{J} (prostopadły do płaszczyzny orbity)
 - wektor Rungego-Lenza \mathbf{A} , skierowany od ogniska do perycentrum
- 4 położenie w czasie wyznacza moment przejścia przez perycentrum

Wzory na transformację elipsy zadanej przez elementy orbitalne a, e, Ω, ω, i do układu heliocentrycznego xyz :

$$x = r \left(\cos \Omega \cos (\omega + \phi) - \sin \Omega \sin (\omega + \phi) \cos i \right) \quad (1a)$$

$$y = r \left(\sin \Omega \cos (\omega + \phi) + \cos \Omega \sin (\omega + \phi) \cos i \right) \quad (1b)$$

$$z = r \sin (\omega + \phi) \sin i \quad (1c)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

Rachunek numeryczny wprost z praw Newtona

Ruch polu grawitacyjnym masy M opisuje równanie w postaci wektorowej:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}$$

Po rozpisaniu na składowe (składową z na razie pomijamy):

$$\ddot{x}(t) = -G \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} x(t) \quad (2a)$$

$$\ddot{y}(t) = -G \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} y(t) \quad (2b)$$

Warunki początkowe dla orbity kołowej o częstości $\omega^2 = \frac{GM}{R_0^3}$:

$$x(0) = R_0, \quad y(0) = 0, \quad (2c)$$

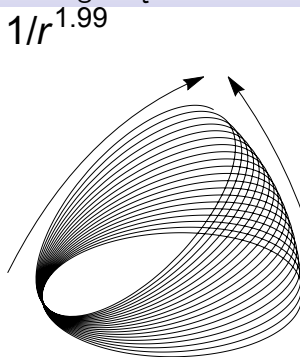
$$\dot{x}(0) \equiv v_{0x} = 0, \quad \dot{y}(0) \equiv v_{0y} = \omega R_0 = \sqrt{GM/R_0} \quad (2d)$$

- Przykład 1 : poprawki do $1/r^2$
- Przykład 2 : ciśnienie promieniowania
- Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego
- Przykład 4 : ruch dookoła układu spłaszczonego

Podobne interesujące przykłady można mnożyć.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:

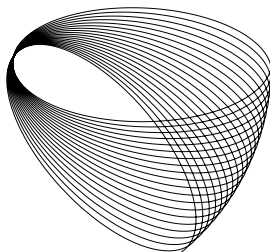


Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka,

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:

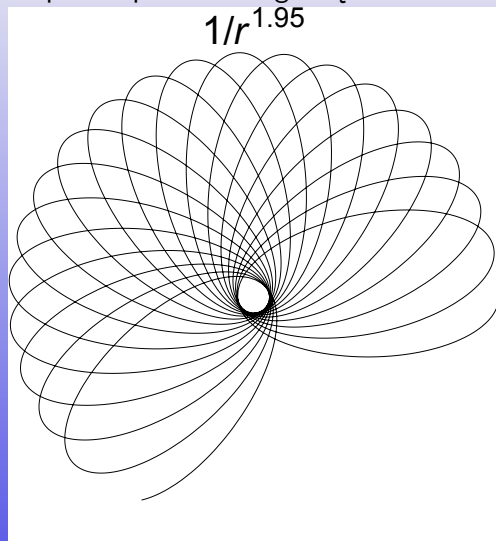
$$1/r^{2.01}$$



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka,

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

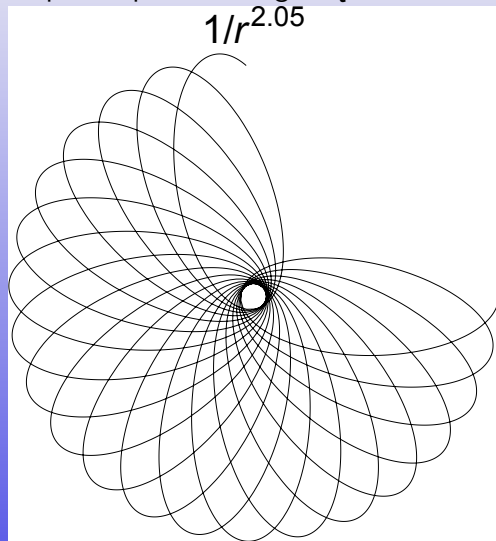
W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka,

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

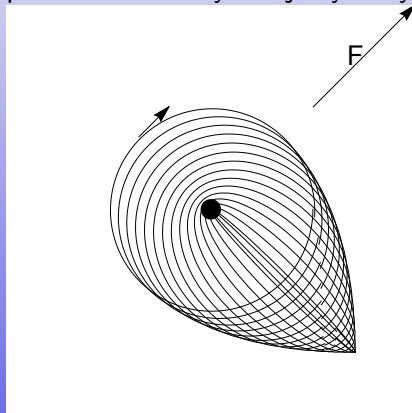
W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka,

Zaburzenia orbity: Przykład 2: ciśnienie promieniowania

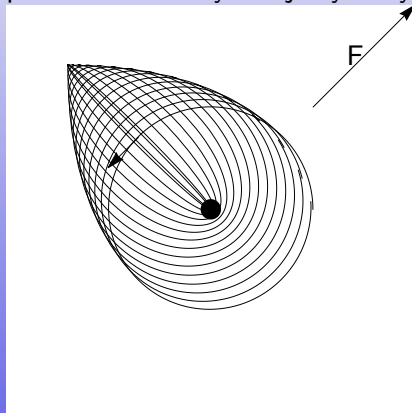
Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.



Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.

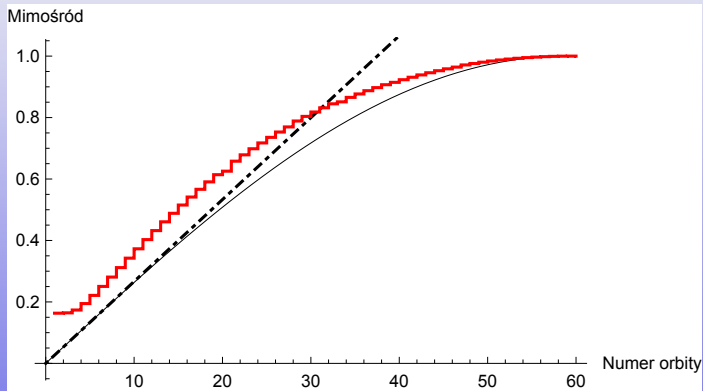
Zaburzenia orbity: Przykład 2: ciśnienie promieniowania

Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.



Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.

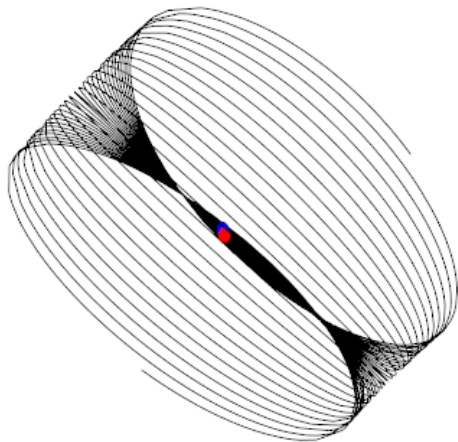
Zaburzenia orbity: numeryka vs teoria zaburzeń



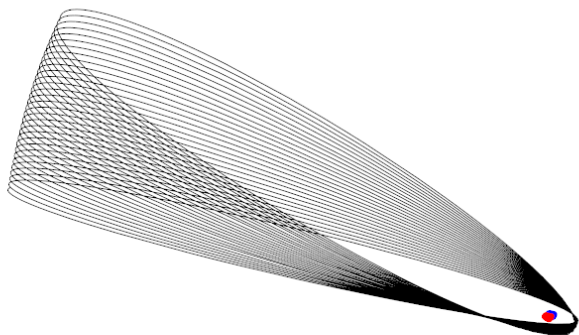
Wg. równania (2.48) z podręcznika Artymowicza:

$$\dot{e} = \frac{3F/m}{2\omega R_0} \sqrt{1 - e^2}, \quad e(t) = \sin\left(\frac{3F/m}{2\omega R_0} t\right)$$

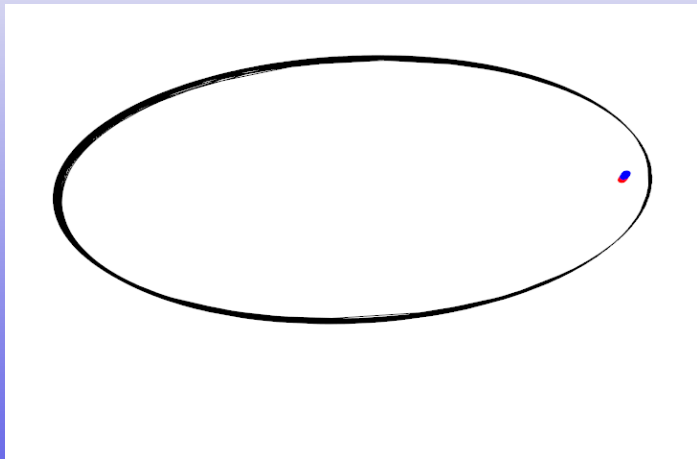
Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego



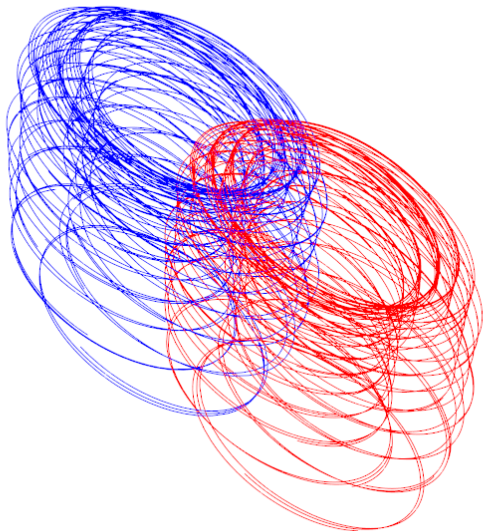
Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego



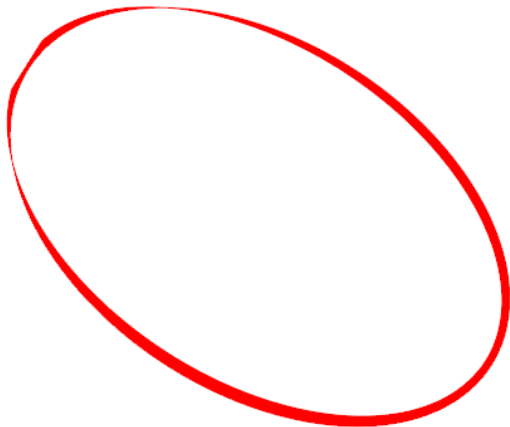
Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego



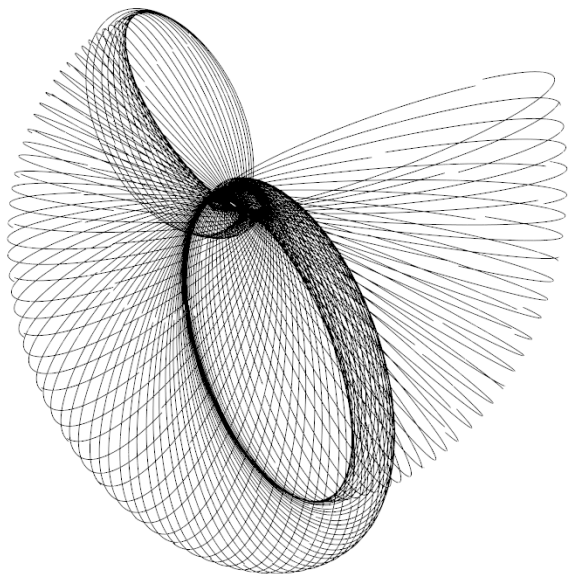
Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego



Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego



Przykład 3 : ruch dookoła układu podwójnego



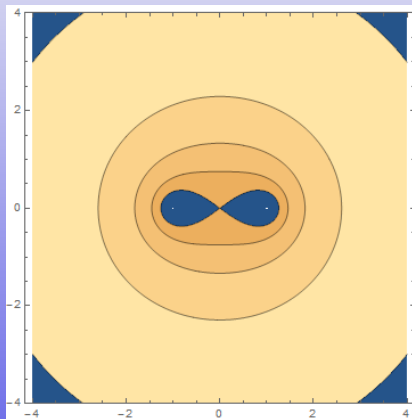
Przykład 4 : ruch dookoła okręgu

Energia potencjalna masy m w polu grawitacyjnym okręgu o promieniu R i masie M . Okrąg leży na płaszczyźnie $x - y$:

$$U = -\frac{GmM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2}} =$$
$$= -\frac{2GmM}{\pi} \frac{K\left(-\frac{4rR}{(r-R)^2+z^2}\right)}{\sqrt{(r-R)^2+z^2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

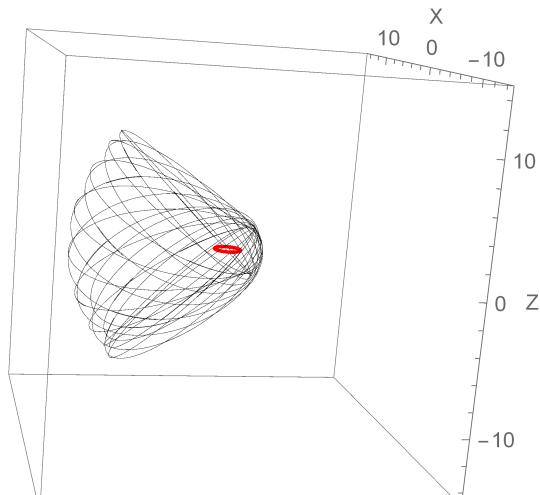
gdzie K to zupełna całka eliptyczna, (**EllipticK**). Okrąg posłuży jako przykład ciała pozbawionego symetrii sferycznej, ale ciągle symetrycznego osiowo.

Potencjał okręgu



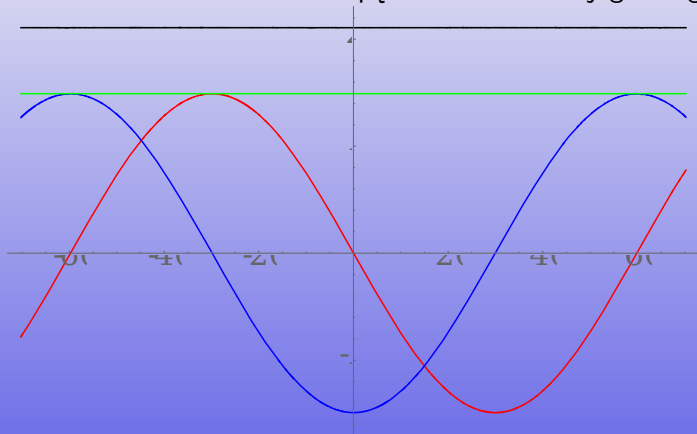
Ruch w polu okręgu

Ruch wydaje się niemal chaotyczny:



Ruch w polu okręgu

Składowe wektora momentu pędu $\mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ i jego długość:

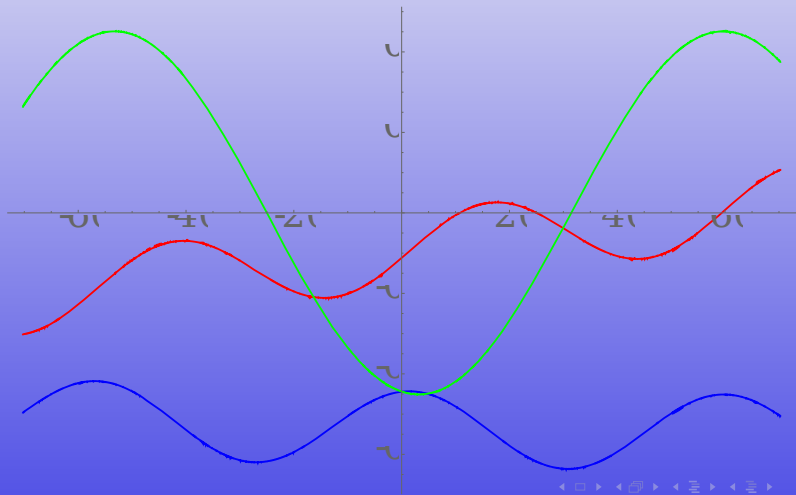


Zgodnie z teorią, $J_z = \text{const}$, natomiast pozostałe dwie składowe zataczają okrąg.

Ruch w polu grawitacyjnym okręgu

Składowe wektora Rungego-Lenza:

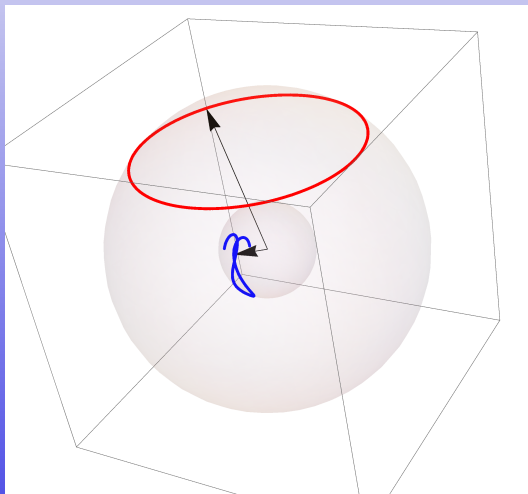
$$\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{J} - \frac{Gm^2M}{r}\mathbf{r}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{Gm^2M}$$



Ruch w polu grawitacyjnym okręgu

Składowe wektora Rungego-Lenza:

$$\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{J} - \frac{Gm^2M}{r}\mathbf{r}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{Gm^2M}$$



Czy rozkład materii na zewnątrz wpływa na ruch wewnątrz?

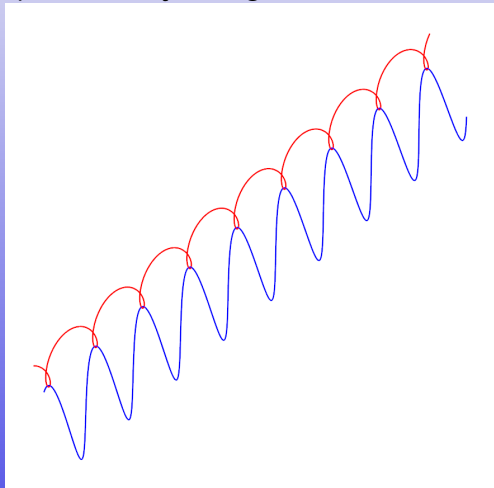
- 1 rozkład gęstości sferycznie symetryczny — NIE
- 2 rozkład gęstości osiowo symetryczny — TAK!
- 3 okrąg/dysk na zewnątrz orbity — TAK!
- 4 ciało orbitujące na zewnątrz orbity — TAK!
- 5 czy siła pochodząca od zewnętrznego dysku może być odpychająca? — TAK!

$$\phi(r) = -G \int_0^R \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{ŹLE!, tylko w symetrii sferycznej}$$

$$\phi(r) = -G \int_0^\infty \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{DOBRZE!}$$

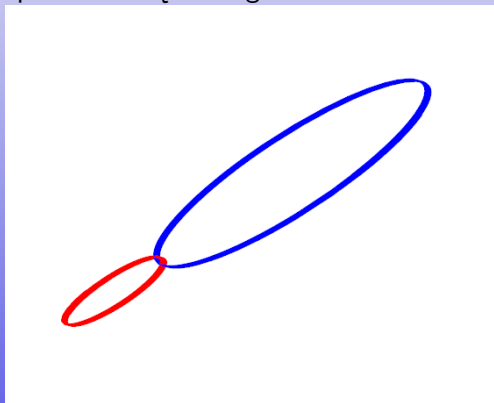
2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



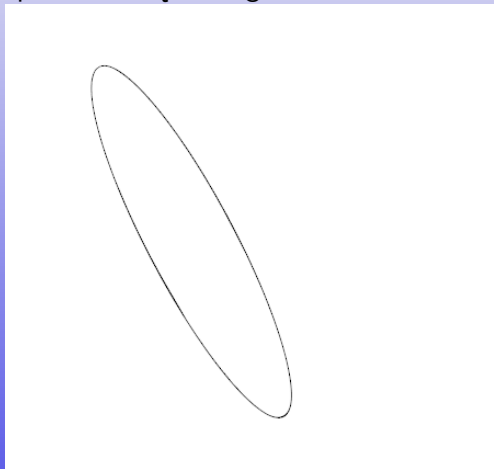
2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



2 ciała: sprowadzenie do ruchu w potencjale

Przepis na zamianę/symetryzację wzorów:

- 1 masa ciała centralnego to suma mas składników

$$M \rightarrow m_1 + m_2$$

- 2 masa ciała próbnego to masa zredukowana

$$m \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- 3 wielka półoś elipsy $a = a_1 + a_2 \rightarrow$ tor ciała 1 **względem** ciała 2

- 4 okres T , mimośród e , płaszczyzna orbitalna \rightarrow bez zmian

- 5 rozmiar elips względem środka masy: $a_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2} a$

- 6 chwilowe położenie ciał względem środka masy opisuje przeskalowana symetria środkowa

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2$$

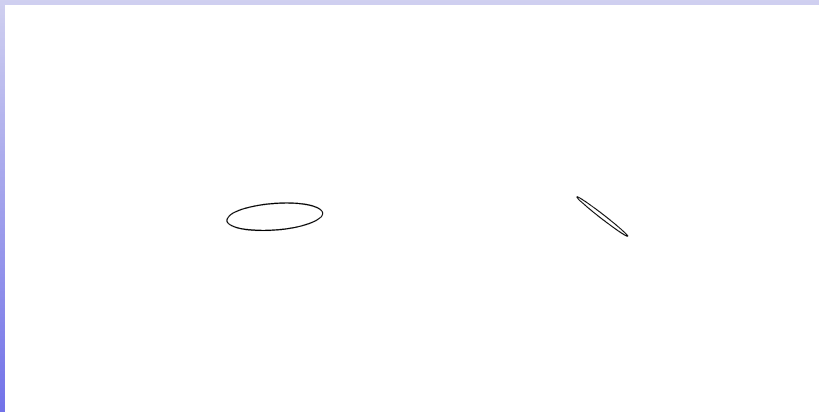
- 7 III prawo Keplera:

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

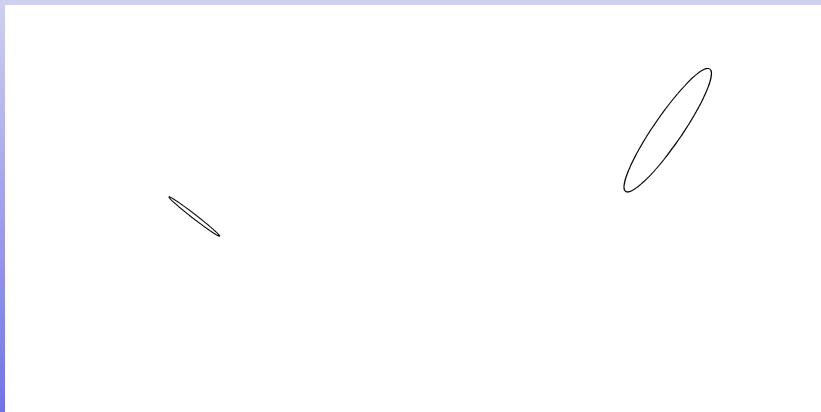
Rzut elipsy na sferę niebieską



Rzut elipsy na sferę niebieską



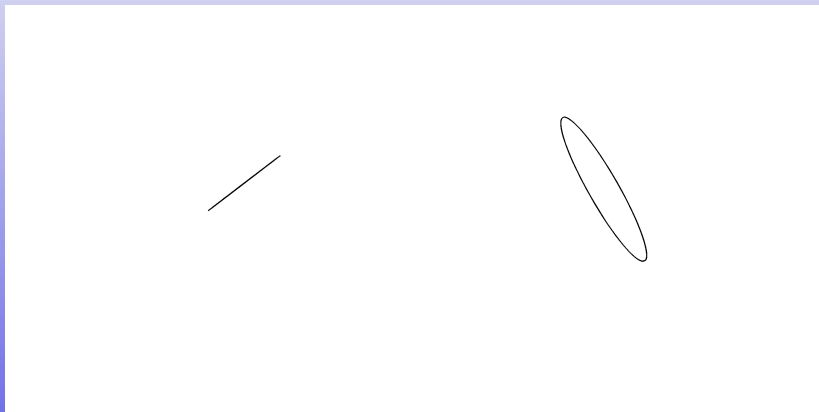
Rzut elipsy na sferę niebieską



Rzut elipsy na sferę niebieską



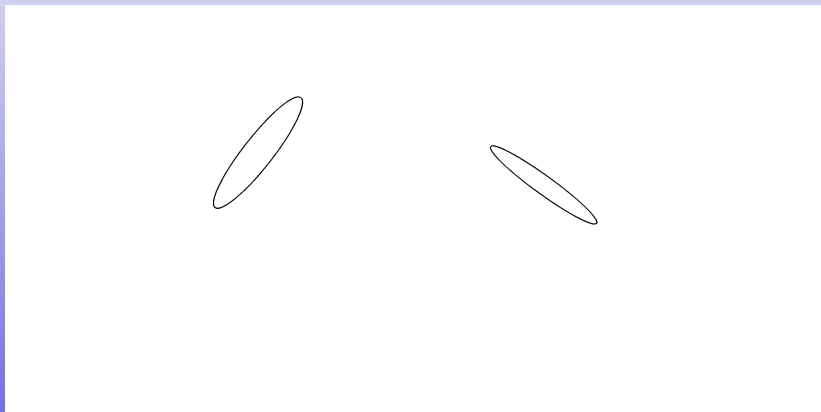
Rzut elipsy na sferę niebieską



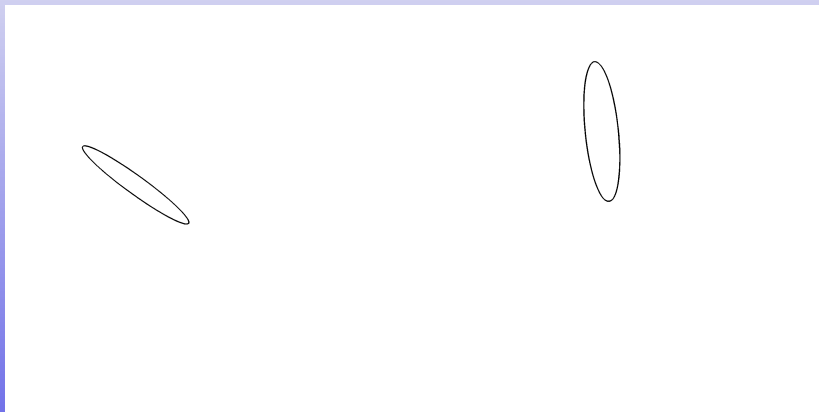
Rzut elipsy na sferę niebieską



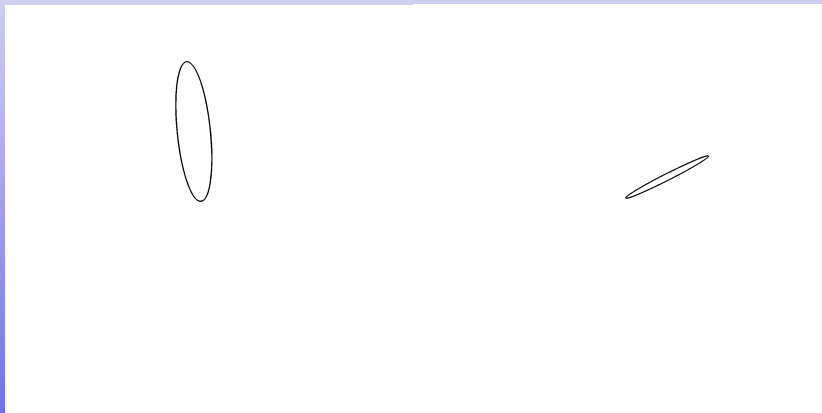
Rzut elipsy na sferę niebieską



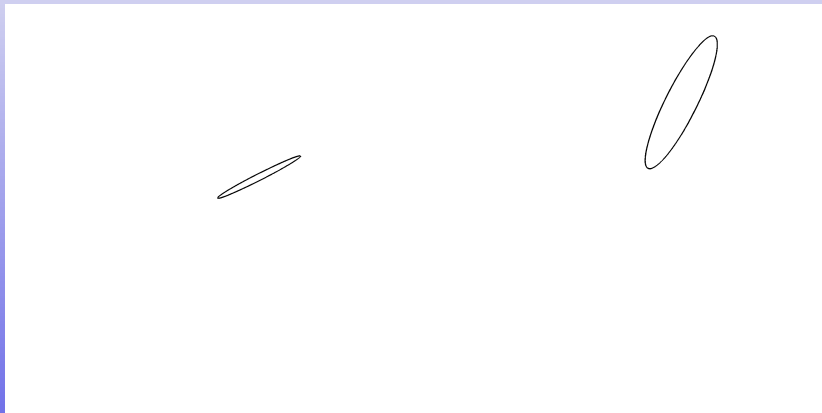
Rzut elipsy na sferę niebieską



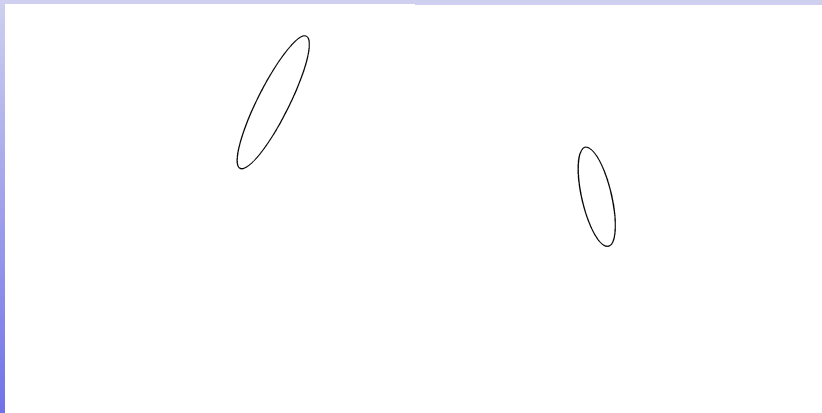
Rzut elipsy na sferę niebieską



Rzut elipsy na sferę niebieską



Rzut elipsy na sferę niebieską



Rzut elipsy na sferę niebieską

