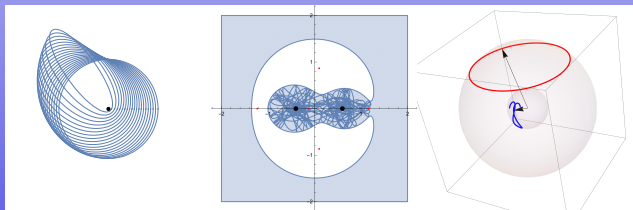


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

12 czerwca 2018



Teoria rotujących figur równowagi

Teoria rotujących ciał: rotacja sztywna

Zagadnienie struktury i ewolucji stacjonarnych (niezależnych od czasu, ale z niezerową prędkością), w szczególności „rotujących” samograwitujących ciał będziemy rozpatrywać zaczynając od dwóch skrajnych przypadków:

- 1 obiekty o stałej gęstości (klasyczna teoria figur równowagi)
- 2 obiekty nieważkie, o średniej gęstości dążącej do zera, poruszające się w polu masy punktowej (model Roche'a)

Można pokazać, że w przypadku rotacji ze stałą prędkością kątową, ciała o rozkładzie gęstości danym funkcjami Lane-Emdena (politropy) zachowują się jakościowo podobnie do powyższych modeli gdy:

- $n < 0.8$ ($\gamma = 1 + \frac{1}{n} > 2.25$) – jak ciało o stałej gęstości
- jak model Roche'a w przeciwnym przypadku

Wartość $n \simeq 1$ i mniej odpowiada materii z której zbudowane są np: planety lub gwiazdy neutronowe.

Kształt powierzchni obracającego się ciała o stałą gęstości jest w zasadzie nieznanym. Okazuje się, że zakładając rotację „sztywną” (jednorodną)

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \text{const}$$

z przyspieszeniem odśrodkowym \vec{a} o potencjale odśrodkowym (centryfugalnym) Φ_c

$$\vec{a} = \Omega^2 r \vec{e}_r, \quad \Phi_c = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)$$

jednym z rozwiązań jest elipsoida, dla której znany jest wzór na potencjał grawitacyjny (wewnątrz)

$$\Phi_g = \pi G \rho \sum_{i=1}^3 (a_i^2 - r_i^2) A_i$$

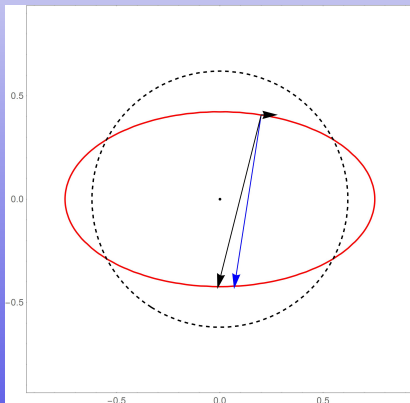
gdzie $\mathbf{a} = \{a, b, c\}$ to półosie elipsoidy, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ oraz

$$A_i = abc \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u) \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}}.$$

Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

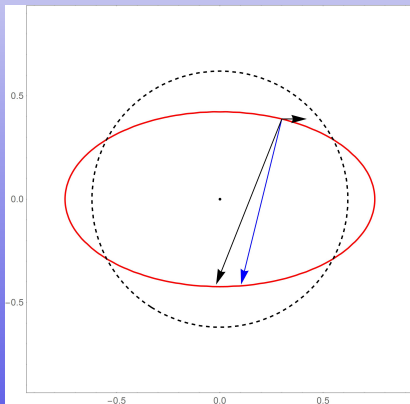
$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

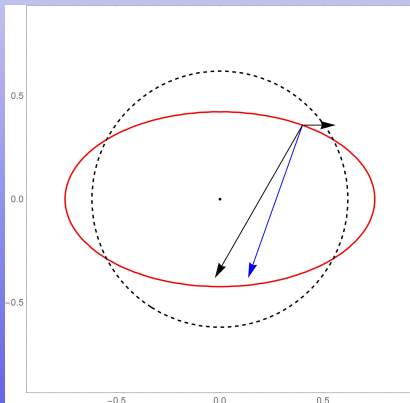
$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

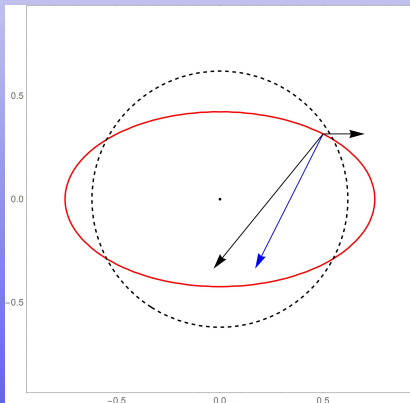
$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

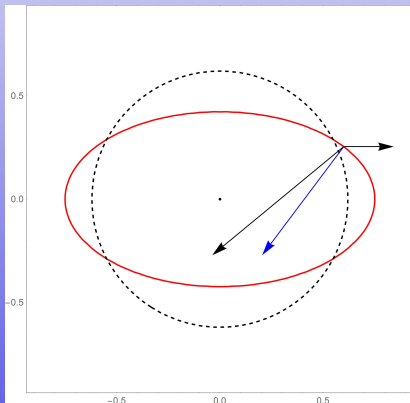
$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

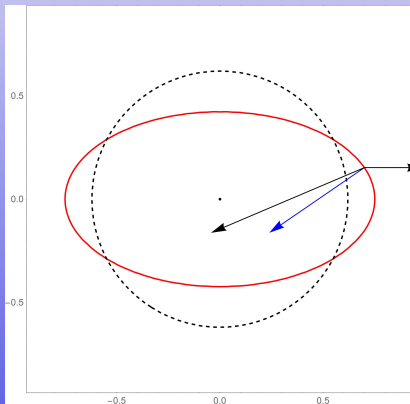
$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

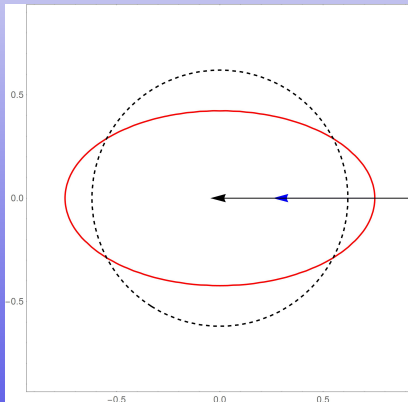
$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Okazuje się, że równanie równowagi można przepisać w postaci równania elipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdzie:

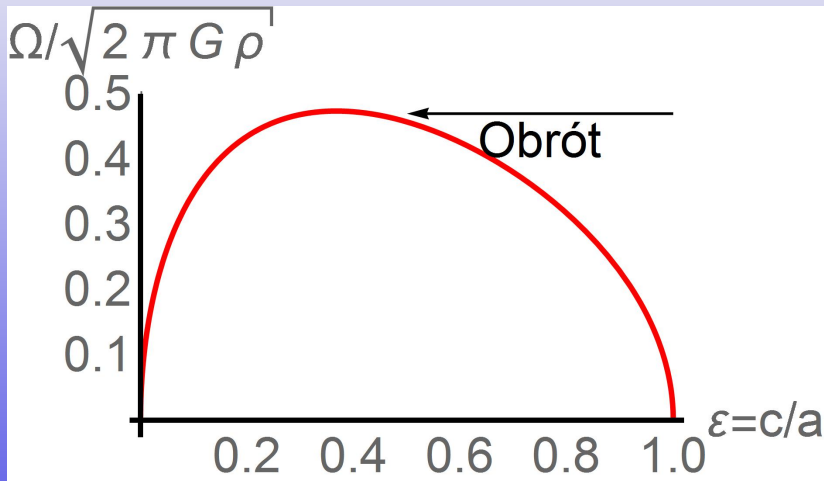
$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_x - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_y - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{4}{3}\pi abc = M$$

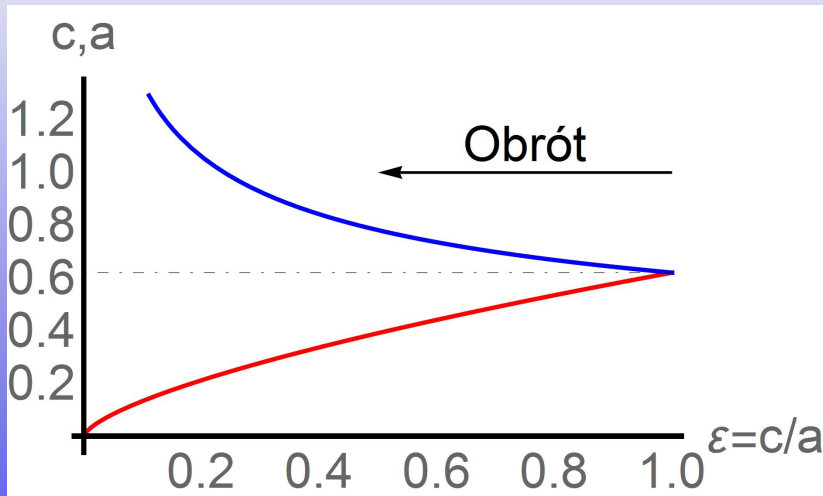
Rozwiązanie powyższego układu dla $a = b$ w zależności od bezwymiarowego parametru

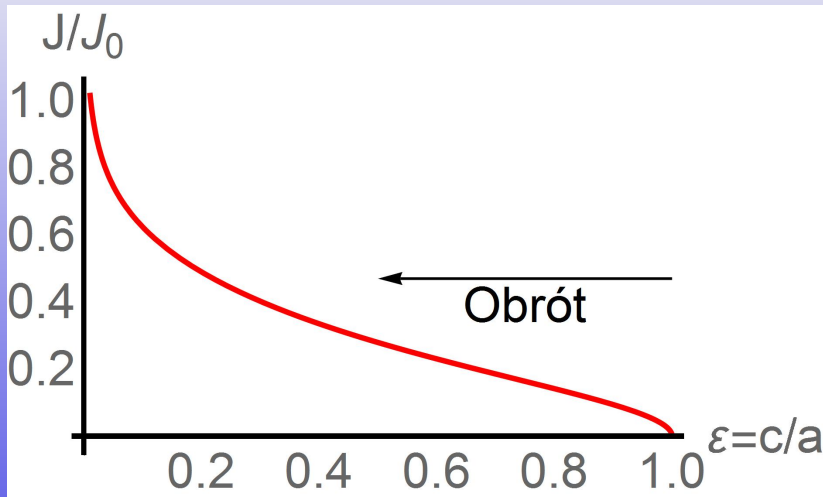
$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$$

nazywamy *elipsoidą Maclaurina*. Oznaczając spłaszczenie przez $\varepsilon = c/a$ otrzymujemy:

$$\chi = \frac{\varepsilon (2\varepsilon^2 + 1) \arccos \varepsilon - 3\varepsilon^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$







Elipsoidy Maclaurina tworzą ciąg obracających się elipsoid **obrotowych** o stałe rosnącym **momencie pędu** J .

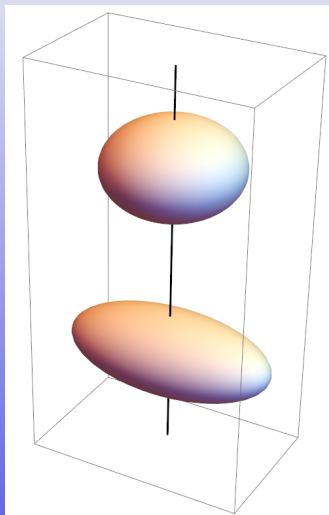
- dla $J = 0$ figurą równowagi jest kula
- dla $J < J_c$ prędkość kątowna elipsoidy rośnie, i ulega ona spłaszczeniu
- dla $J = J_c$ elipsoida Maclaurina osiąga maksymalną możliwą prędkość kątowną (dla Ziemi, $\rho \simeq 5 \text{ g/cc}$, $T_{obr} \simeq 15 \text{ minut}$)

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \simeq 0.22, \quad \varepsilon \simeq 0.36767$$

- dalsze zwiększanie momentu pędu powoduje jeszcze większe spłaszczenie, ale od tego miejsca prędkość kątowna Ω **maleje**
- dla $J \rightarrow \infty$ elipsoida Maclaurina degeneruje się do nieskończenie cienkiego „placka” który praktycznie pozostaje w spoczynku

Zanim jeszcze elipsoida Maclaurina osiągnie maksymalną prędkość kątową dochodzi do *bifurkacji* (spontanicznego złamania symetrii) w kierunku trójosiowej *elipsoidy Jacobiego*.

Powyżej punktu bifurkacji istnieją 2 rozwiązania o tym samym momencie pędu. Ciekawa wizualizacja bifurkacji: Jos Leys/Etienne Ghys, The shape of Planet Earth



Używa się kilku miar stopnia rotacji układów samograwitujących:

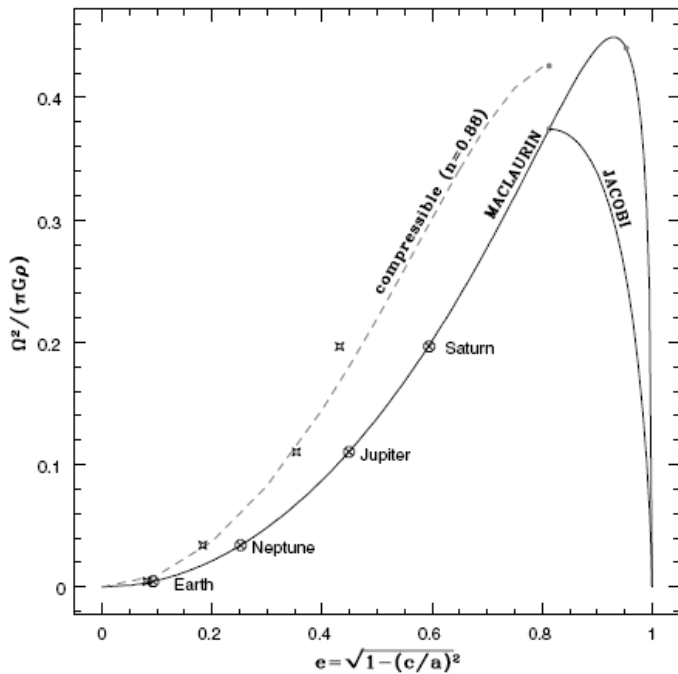
- bezwymiarowa prędkość kątowna

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$$

- moment pędu J
- stosunek rotacyjnej energii kinetycznej E_k do grawitacyjnej energii wiązania E_g

$$\beta = \frac{E_k}{|E_g|}$$

Z twierdzenia wirialnego $0 \leq \beta < 0.5$. Punkt bifurkacji do elipsoidy Jacobiego pojawia się dla $\chi = 0.187$, $\beta = 0.1375$, niestabilność dynamiczna elipsoidy Jacobiego $\beta \simeq 0.16$, Maclaurina $\beta \simeq 0.27$.



Warto przy okazji wspomnieć o równoległe rozwijanej analogicznej teorii rotującej cieczy z napięciem powierzchniowym.

- motywacją model kropowy jądra atomowego
- odpychanie elektrostatyczne zamiast przyciągania
- napięcie powierzchniowe daje energię wiązania

Przyrównując energię napięcia powierzchniowego do grawitacyjnej dla jednorodnej kuli mamy

$$4\pi R^2\sigma = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad \rightarrow \quad M = \frac{5\sigma}{G\rho}$$

Dla wody napięcie powierzchniowe $\sigma \simeq 0.072 \text{ N/m}$ co daje przewagę sił samograwitacji już dla $M > 1000$ ton ($R > 10$ metrów). Dla materii jądrowej $\sigma \sim 1.25 \text{ MeV/fm}^2$, czyli $M > 10^{10}$ kg (masa małej asteroidy).

Elipsoida Dedekinda (Riemanna, Dirichleta)

Pole prędkości \mathbf{v} (v_x, v_y, v_z): $v_x = -q \zeta y, v_y = (1 - q) \zeta x, v_z = 0,$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \zeta \mathbf{e}_z$$

Z równania elipsoidy wynika wektor normalny

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = \nabla G = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$$

Warunek, że ciecz „nie wypływa” z elipsoidy, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0,$ daje

$$q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad 1 - q = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy” – linii prądu:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -q \zeta y$$

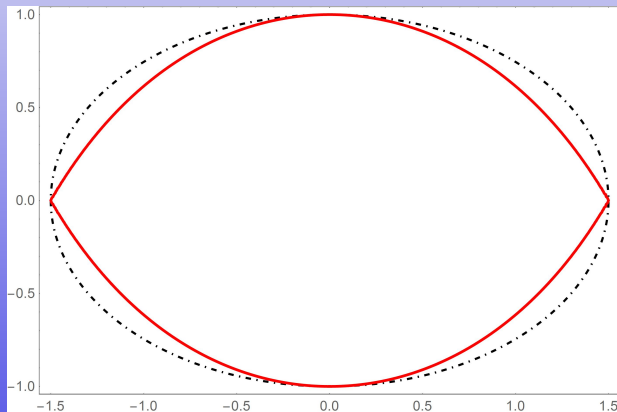
$$v_y = \frac{dy}{dt} = (1 - q) \zeta x$$

Podstawienie $x = A e^{i\Omega t}, \quad y = B e^{i\Omega t}$ daje związek pomiędzy wirowością ζ elipsoidy Dedekinda a prędkością kątową Ω elipsoidy Jacobiego

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q \zeta \\ (1 - q) \zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad \zeta = \frac{a^2 + b^2}{a b} \Omega$$

Zakładając, że cała masa rotującego obiektu jest skupiona w centrum, otrzymujemy równanie powierzchni:

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = \text{const} = \frac{GM}{R_p}$$



SCIEŻKA MACLAURINA

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzą na:
 - - ścieżkę Roche'a
 - - ścieżkę Maclaurina

SCIEŻKA ROCHE'A

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro lub obiekty dysku wchodzą na:
 - - ścieżkę Roche'a
 - - ścieżkę Maclaurina

Rotacja różniczkowa

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1b)$$

- interesują nas rozwiązania, dla których prędkość \vec{v} jest funkcją wyłącznie współrzędnych (nie zależy od czasu)

Pochodna substancjonalna (operator $\vec{v} \cdot \nabla$)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t, x(t), y(t), z(t))}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} \end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

równanie Eulera w przypadku stacjonarnym można przepisać jako:

$$\nabla(h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Jeżeli wyraz po prawej jest równy zeru lub jest gradientem pewnej funkcji, otrzymujemy **równanie Bernouliego**

$$h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2 = \text{const.}$$

Jednym z przypadków, kiedy można wprowadzić równanie Bernoulliego jest tzw. „czysta rotacja”:

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z)r \vec{e}_\phi.$$

W ogólności stacjonarne pole prędkości \vec{v} musi spełniać równanie

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})) = 0.$$

Podstawienie czystej rotacji do powyższego równania daje:

$$2r\Omega(r, z) \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} = 0.$$

Przykład pola prędkości, które **nie jest** rotacją, a spełnia powyższe równanie, znajdujemy w elipsoidach Dedekinda.

Grawitacja powierzchniowa (ang. effective gravity) \mathbf{G} to suma natężenia pola grawitacyjnego \vec{g} i przyspieszenia odśrodkowego

$$\vec{G} = \vec{g} + r\Omega(r, z)^2 \vec{e}_r. \quad (2)$$

Dla samograwitującego ciała w stanie stacjonarnym o czystej rotacji poniższe zdania są równoważne:

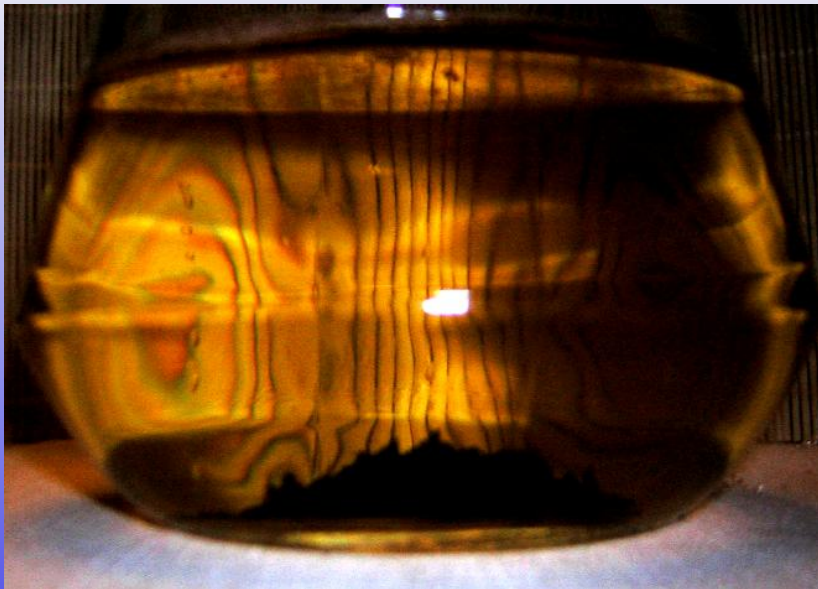
- (i) *Rotacja jest cylindryczna: $\Omega = \Omega(r)$.*
- (ii) *Powierzchnie $\rho = \text{const}$ and $p = \text{const}$ pokrywają się.*
- (iii) *Grawitacja powierzchniowa \vec{G} ma potencjał*
- (iv) *Wektor \vec{G} jest prostopadły do izobar $P = \text{const}$ (w szczególności do powierzchni $P = \rho = 0$).*

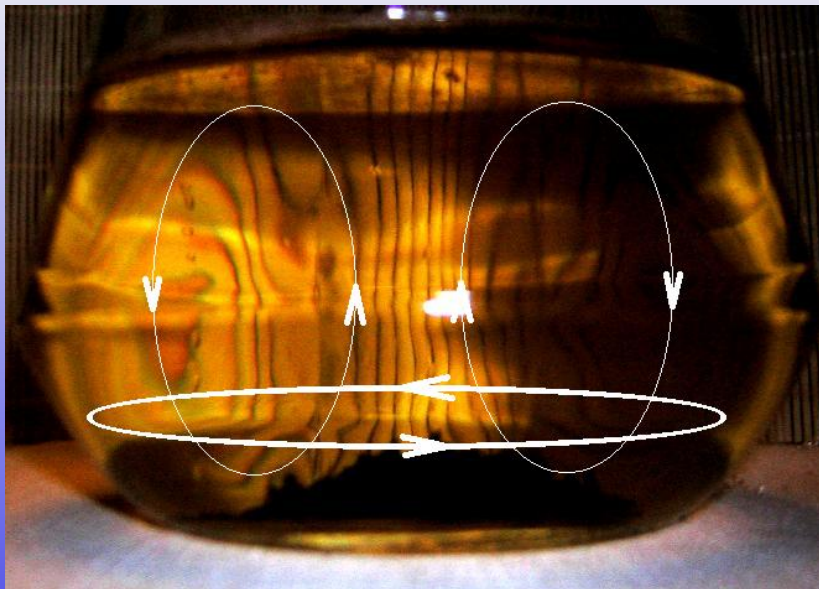
Obiekt spełniający powyższe założenia nazywamy *barotropą*. Spełnia ona równanie

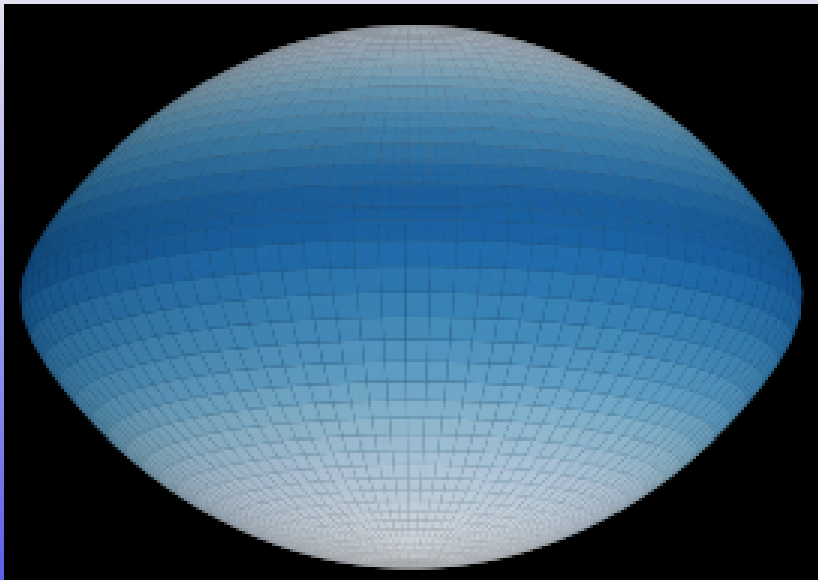
$$h(r, z) + \Phi_g + \Phi_c = C,$$

gdzie $\Phi_g = \int \Omega^2 r dr$ to *potencjał odśrodkowy*.









Dołączenie do opisu równowagi hydrostacyjnej barotropy, równania na transport energii daje układ równań który jest sprzeczny. Sytuację określamy jako *paradoks von Zeipela*.

Sytuacja ta jest powszechnie ignorowana w astrofizyce, i modelowanie rotujących „gwiazd” rozbija się na 2 kategorie:

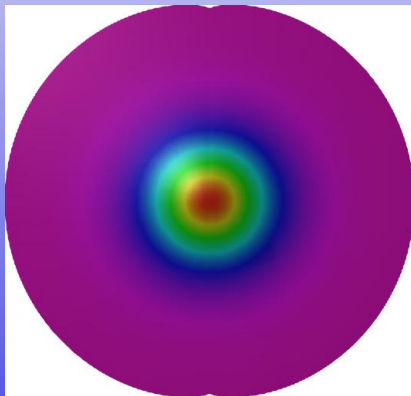
- rotujące barotropy z $\Omega = \Omega(r)$, które są w równowadze hydrostatycznej, ale nie termicznej
- obiekty z rotacją powłokową (ang: shellular rotation, 1D) z $\Omega = \Omega(m) \equiv \Omega(\sqrt{r^2 + z^2})$, które nie są w równowadze mechanicznej, ale są w równowadze termicznej

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

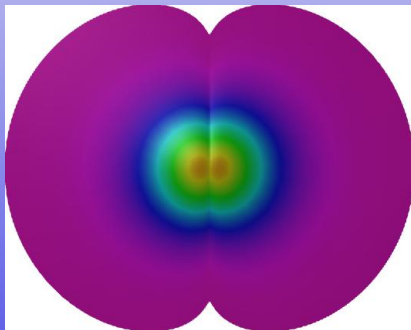


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

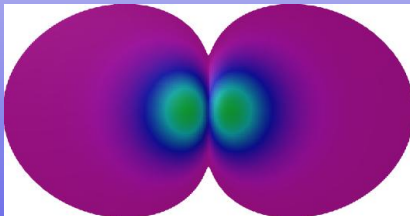


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

