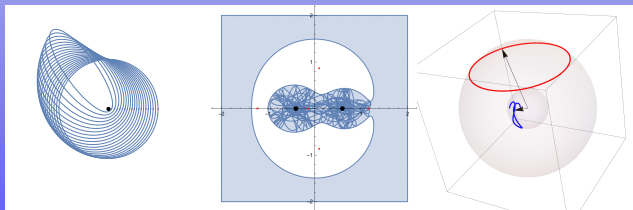


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

12 czerwca 2018



Zagadnienie 2 i 3 ciał. Rezonanse.

Prawa Keplera (wersja oryginalna):

- 1 odległość r planety od Słońca opisuje wzór $r = p/(1 + e \cos \phi)$
- 2 pole zakreślane przez promień wodzący w jednostce czasu jest stałe
- 3 stosunek trzeciej potęgi „średniej” odległości od Słońca $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ do kwadratu okresu jest stały dla każdej z planet.

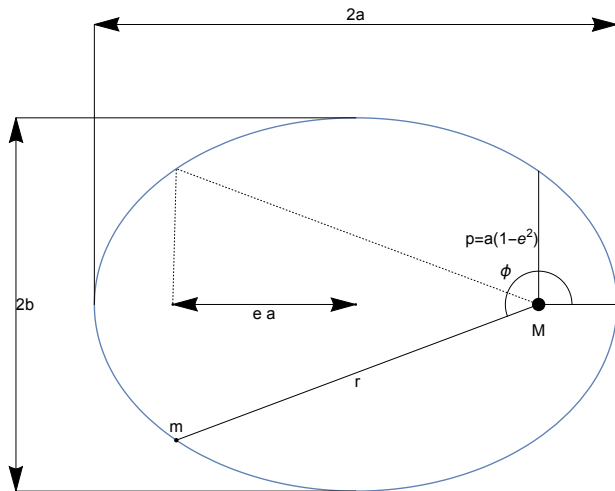
Prawa Keplera (wersja nowoczesna)

- 1 masa próbna porusza się po krzywej stożkowej: elipsa, parabola lub hiperbola, a masa centralna M znajduje się w jednym z ognisk
- 2 moment pędu cząstki próbnej jest zachowany

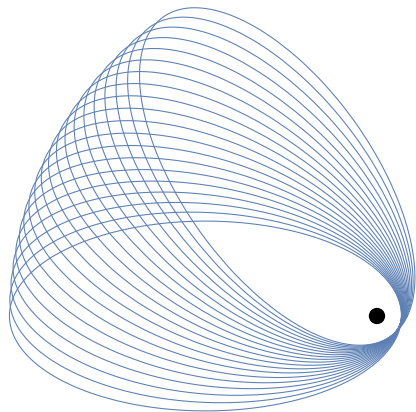
$$mr^2 \dot{\phi} = \text{const} = J$$

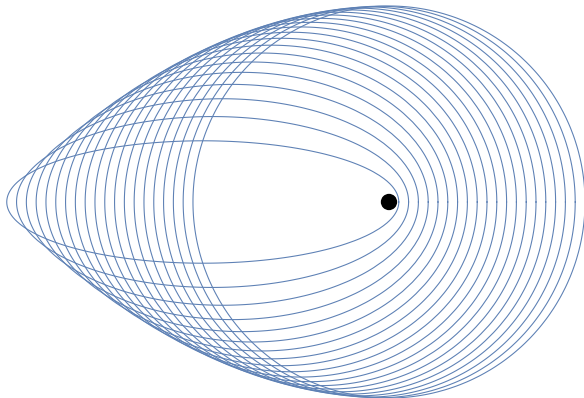
3

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const} = \frac{GM}{4\pi^2}, \text{ gdzie } a \text{ to wielka półoś elipsy, } [GM] = \frac{m^3}{s^2}$$

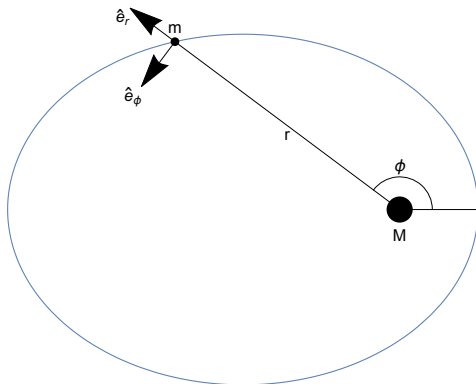


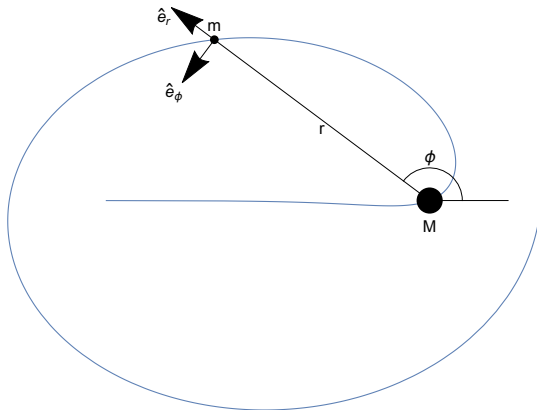
Orbita eliptyczna: zaburzenie w postaci precesji



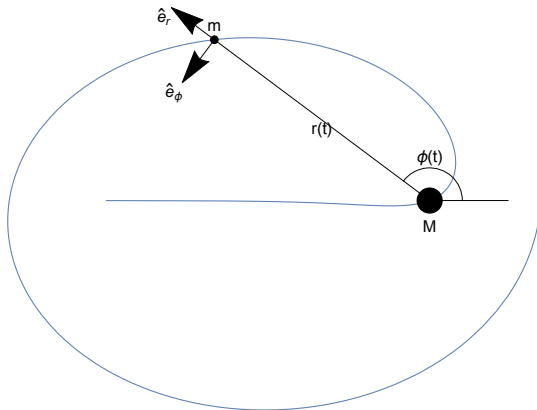


Wprowadzenie ruchu po elipsie





Wprowadzenie ruchu po elipsie



Równanie toru opisuje kawałkami funkcja:

$$\frac{du(\phi)}{d\phi} = \pm \sqrt{\frac{2mE}{J^2} + \frac{2Gm^2M}{J^2}u - u^2}, \quad u = 1/r$$

W perycentrum i apocentrum $dr/d\phi = 0$ i trzeba zmieniać znak w równaniu powyżej. Znacznie wygodniejsze jest zróżniczkowanie do postaci r . oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}.$$

Pokazana procedura prawie bez zmian przenosi się na ruch w ogólnym polu centralnym, w tym nierotujących czarnych dziur.

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

$$a = -\frac{GmM}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2m^3M^2}}$$

Dla dowolnej chwili t :

$$E = -\frac{GmM}{r(t)} + \frac{1}{2}mv(t)^2, \quad J = mv(t)r(t).$$

Dla ciała związanego (na orbicie eliptycznej) $E < 0$. Maksymalny możliwy moment pędu osiągany jest dla orbity kołowej. Dla $J = 0$ ciało m spada po linii prostej wprost na centrum.

- 1 położenie elipsy w przestrzeni, jak każdego ciała sztywnego, wymaga podania 3 współrzędnych
- 2 w astronomii tradycyjnie są to:
 - inklinacja i
 - długość węzła wstępującego Ω
 - długość perycentrum ω
- 3 z fizycznego punktu widzenia położenie elipsy wyznaczają wielkości zachowane:
 - wektor momentu pędu \mathbf{J} (prostopadły do płaszczyzny orbity)
 - wektor Rungego-Lenza \mathbf{A} , skierowany od ogniska do perycentrum
- 4 położenie w czasie wyznacza moment przejścia przez perycentrum

Celem rachunku perturbacyjnego w mechanice nieba jest wyznaczenie wolnozmiennych funkcji czasu $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\omega(t)$, $\phi(t)$, zakładając, że orbita pozostaje eliptyczna.

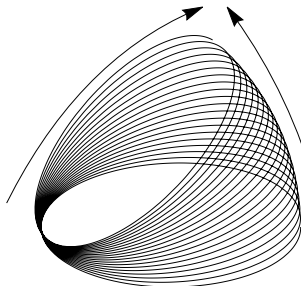
- Przykład 1 : poprawki do $1/r^2$
- Przykład 2 : ciśnienie promieniowania
- Przykład 3 : ~~ruch dookoła układu podwójnego~~
- Przykład 4 : ~~ruch dookoła układu spłaszczonego~~

Podobne interesujące przykłady można mnożyć.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciążenia zmieniamy $1/r^2$:

$$1/r^{1.99}$$

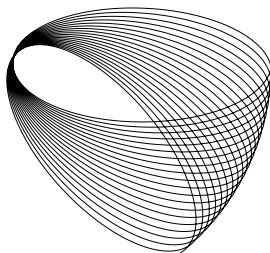


Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:

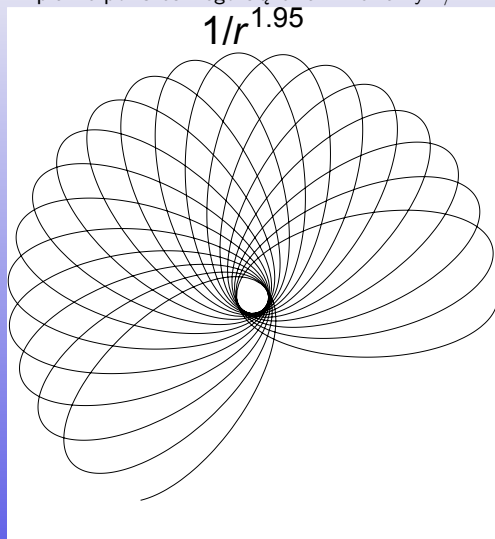
$$1/r^{2.01}$$



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

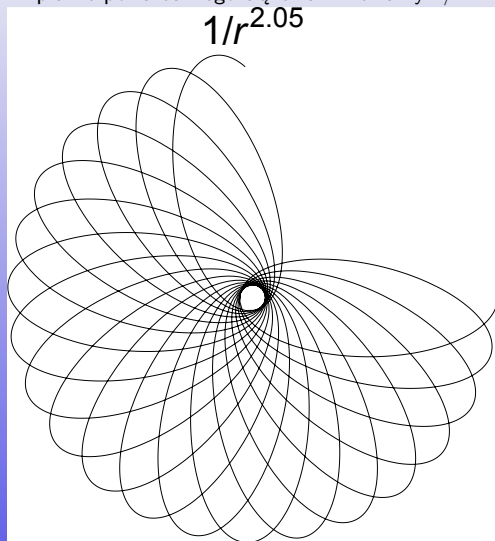
W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

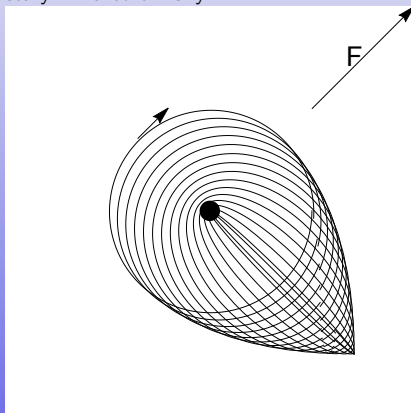
Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:



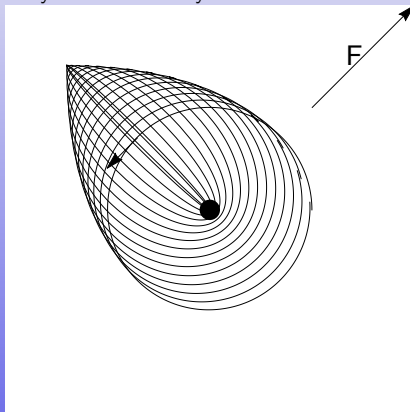
Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.

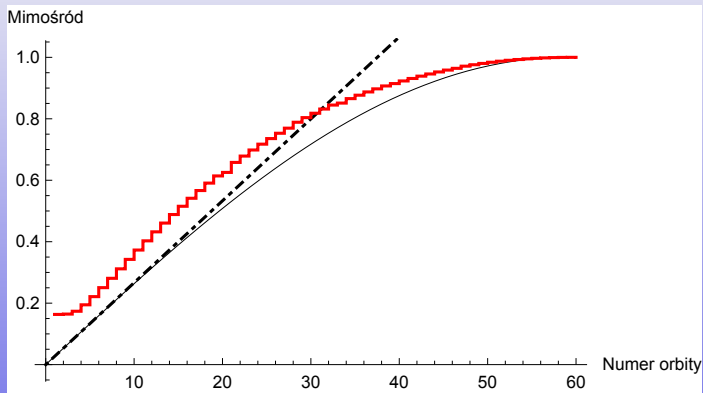


Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.

Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.



Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.



Wg. równania (2.48) z podręcznika Artymowicza:

$$\dot{e} = \frac{3F/m}{2\omega R_0} \sqrt{1 - e^2}, \quad e(t) = \sin\left(\frac{3F/m}{2\omega R_0} t\right)$$

Czy rozkład materii na zewnątrz wpływa na ruch wewnątrz?

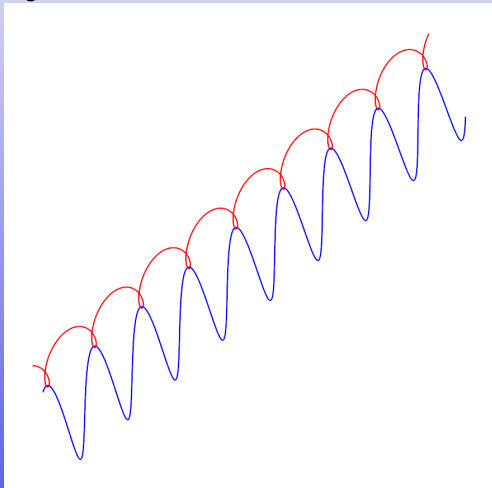
- 1 rozkład gęstości sferycznie symetryczny — NIE
- 2 rozkład gęstości osiowo symetryczny — TAK!
- 3 okrąg/dysk na zewnątrz orbity — TAK!
- 4 ciało orbitujące na na zewnątrz orbity — TAK!
- 5 czy siła pochodząca od zewnętrznego dysku może być odpychająca? — TAK!

$$\phi(r) = -G \int_0^R \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{ŹLE!, tylko w symetrii sferycznej}$$

$$\phi(r) = -G \int_0^\infty \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{DOBRZE!}$$

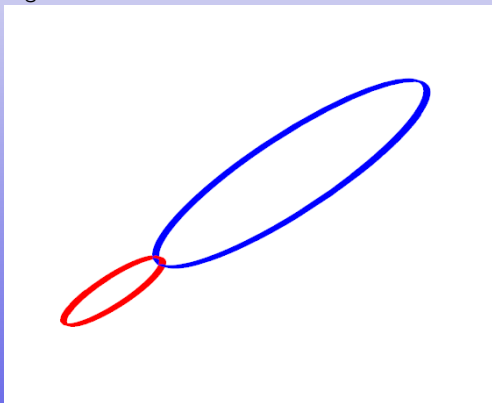
2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



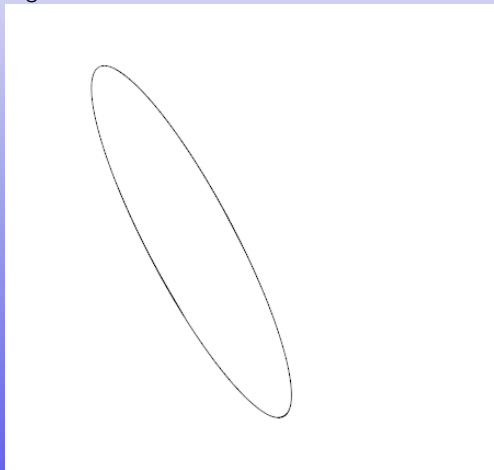
2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



Przepis na zamianę/symetryzację wzorów:

- 1 masa ciała centralnego to suma mas składników

$$M \rightarrow m_1 + m_2$$

- 2 masa ciała próbnego to masa zredukowana

$$m \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- 3 wielka półos elipsy $a = a_1 + a_2 \rightarrow$ tor ciała 1 **względem** ciała 2

- 4 okres T , mimośród e , płaszczyzna orbitalna \rightarrow bez zmian

- 5 rozmiar elips względem środka masy: $a_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2} a$

- 6 chwilowe położenie ciał względem środka masy opisuje przeskalowana symetria środkowa

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2$$

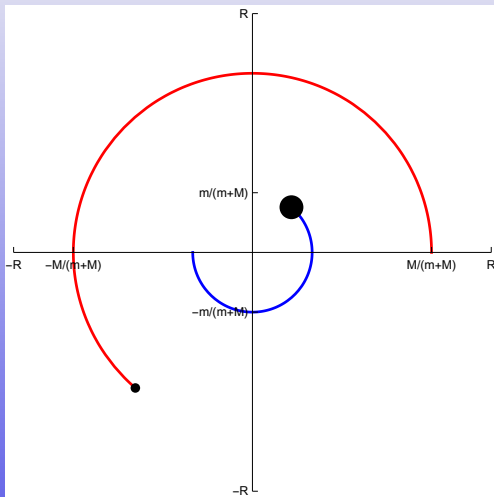
- 7 III prawo Keplera:

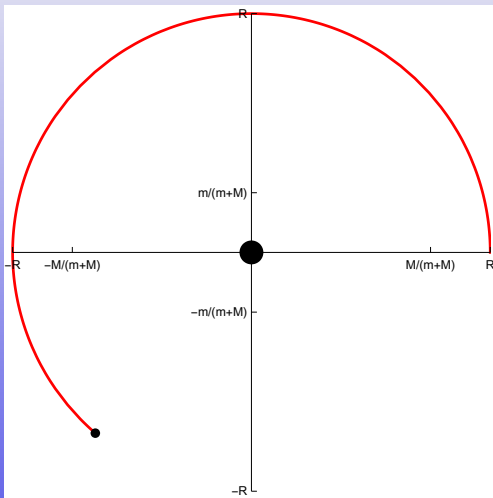
$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

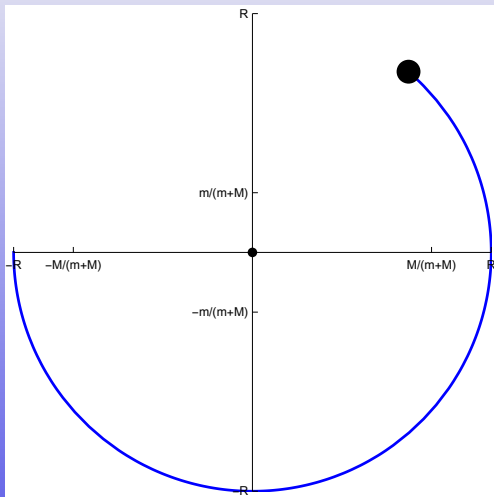
Założenia:

- 1 masy m oraz M krążą wokół środka masy po okręgach, czyli ze stałą prędkością kątową
- 2 trzecia masa μ jest pomijalnie mała $\mu \ll m, \mu \ll M$
- 3 ruch odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie orbitalnej mas m i M
- 4 tradycyjnie, przechodzimy do układu nieinercjalnego w którym masy m i M są nieruchome
- 5 przykłady:
 - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_{\oplus}, \mu \rightarrow M_{\mathcal{C}}$
 - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \rightarrow M_{\mathcal{C}}, \mu \rightarrow$ sonda kosmiczna, np: Apollo
 - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_J, \mu \rightarrow$ planetoidy trojańskie
 - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \simeq 500 \text{ kg}, \mu \simeq 0.1 \text{ kg} \rightarrow$ masy orbitalnego eksperymentu mierzącego stałą G

Szkic sytuacji







$$\mathbf{r}_m = \frac{M}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1a)$$

$$\mathbf{r}_M = -\frac{m}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1b)$$

$$\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3} \quad (1c)$$

Wypisujemy równania Newtona w układzie inercyjnym, zakładając, że pozycje mas m i M są zadane z góry.

$$\mu \ddot{x} = -\frac{G\mu m(x - x_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(x - x_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2a)$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{G\mu m(y - y_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(y - y_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2b)$$

$$r_{\mu m} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|, \quad r_{\mu M} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \quad (2c)$$

Dokonujemy zamiany funkcji niewiadomych:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

gdzie $x(t), y(t)$ – położenie w układzie inercyjnym,
 $X(t), Y(t)$ – położenie w układzie korotującym.

$$\ddot{X} = \omega^2 X + 2\omega \dot{Y} - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3a)$$

$$\ddot{Y} = \omega^2 Y - 2\omega \dot{X} - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3b)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \omega^2 \mathbf{R} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{R} = \{X(t), Y(t)\} \quad (3c)$$

- $\omega^2 \mathbf{R}$ - przyspieszenie odśrodkowe
- $-2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}$ - przyspieszenie Coriolisa
- \mathbf{g} - przyspieszenie grawitacyjne (natężenie pola grawitacyjnego)

Okazuje się, że powyższy układ równań posiada aż 5 rozwiązań stałych, t.j. opisujących masę próbną spoczywającą w układzie obracającym się. Zakładając, że $\dot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, otrzymujemy układ 2 równań algebraicznych:

$$\omega^2 \mathbf{R} + \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

$$\omega^2 X - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4a)$$

$$\omega^2 Y - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4b)$$

Zakładając, że $Y = 0$ otrzymujemy równanie na punkty leżące na linii łączącej masy m i M :

$$\omega^2 X_i = \pm \frac{Gm}{(X_i - R \frac{M}{m+M})^2} \pm \frac{GM}{(X_i + R \frac{m}{m+M})^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Znaki \pm biorą się z wyrażeń typu:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}^3} = \frac{x}{|x|^3} = \frac{1}{x|x|} = \pm \frac{1}{x^2}.$$

- powyższe równanie jasno pokazuje równość sił odśrodkowej i grawitacyjnej
- w postaci nieuproszczonej jest ono bardzo trudne do rozwiązania, nawet z użyciem *Mathematici*
- konieczna redukcja liczby symboli literowych

- 1 podstawienie $\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3}$ pozwala skrócić G
- 2 zmiana jednostek długości $X_i = \zeta_i R$ pozwala na pozbycie się R
- 3 wprowadzenie stosunku mas $q = m/M$ dodatkowo upraszcza równanie

$$\zeta = \frac{(1+q)q}{\pm(1+\zeta+\zeta q)^2} + \frac{1+q}{\pm(\zeta-q+\zeta q)^2}$$

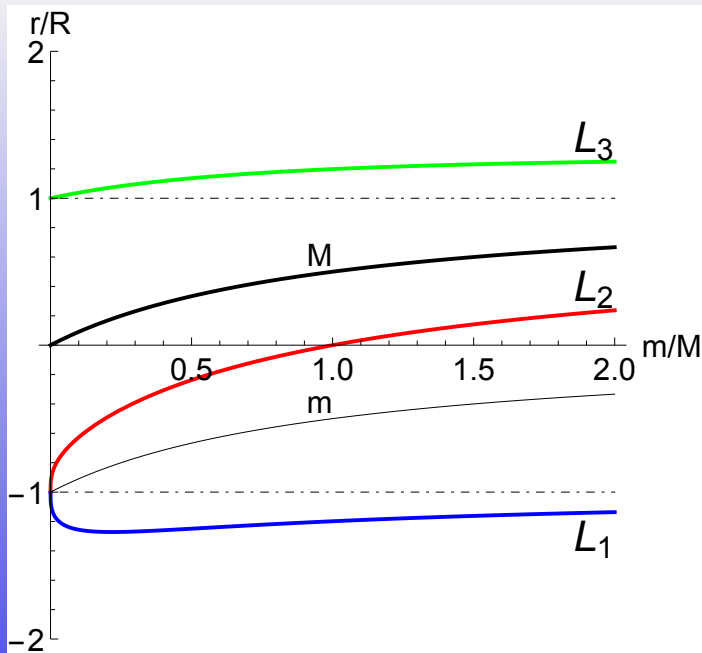
gdzie wyrażenie typu $\pm x^2$ należy rozumieć jako $\pm x^2 \equiv x|x| = x^2 \text{sign}(x)$.

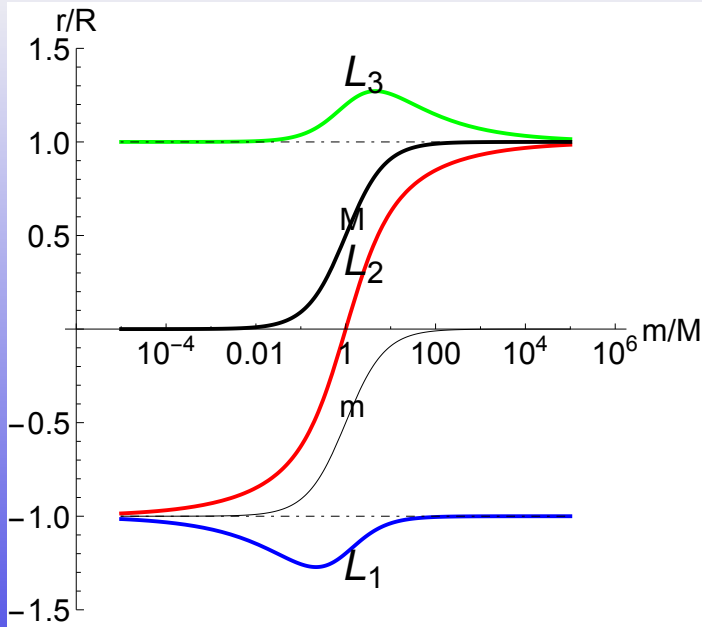
Otrzymaliśmy równanie algebraiczne, równoważne równaniu 5 stopnia z jednym parametrem. Takie zadanie może rozwiązać dla rzeczywistego q, ζ algorytm komputerowy (<http://mathworld.wolfram.com/TarskisTheorem.html>).

$$\zeta^5(q+1)^4 - 2\zeta^4(q-1)(q+1)^3 + \zeta^3(q+1)^2(q^2 - 4q + 1) - \zeta^2(q^4 - 1) + \zeta(2q^4 + 4q^3 + 5q^2 + 4q + 2) - q^4 - q^3 + q + 1 = 0$$

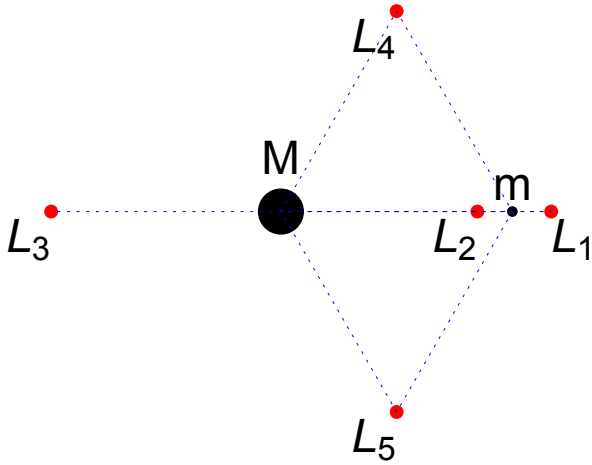
Rozwiązanie powyższego typu równania nie przedstawia trudności dla programu *Mathematica*. Wynik jest w postaci definiowalnej liczby algebraicznej **Root**.

- wynik musi być niezmienniczy na zamianę $m \leftrightarrow M$, czyli $q \rightarrow 1/q$
- pozycje i numeracja punktów L_1, L_2, L_3 odwracają się





$$m/M=81$$



Bardzo ciekawym faktem, jest istnienie dwóch punktów stacjonarnych, tworzących **trójkąt równoboczny** z masami m i M .

Znajomość tego faktu pozwala od razu wypisać ich współrzędne:

$$X_{L_{4,5}} = \frac{1}{2} \frac{m - M}{m + M} R, \quad Y_{L_{4,5}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

- fakt ten jest nieintuicyjny
- jeszcze bardziej zaskakuje stabilność pozycji $L_{4,5}$ przy odpowiednim stosunku mas $q = m/M$
- powyższe własności mają istotne znaczenie astrofizyczne oraz astronautyczne

$$\ddot{X}\dot{X} = \omega^2 X\dot{X} + 2\omega\dot{Y}\dot{X} + g_X\dot{X} \quad (5a)$$

$$\ddot{Y}\dot{Y} = \omega^2 Y\dot{Y} - 2\omega\dot{X}\dot{Y} + g_Y\dot{Y} \quad (5b)$$

Dodając powyższe równania, skracając wyrazy z przyspieszeniem Coriolisa i całkując po t otrzymujemy:

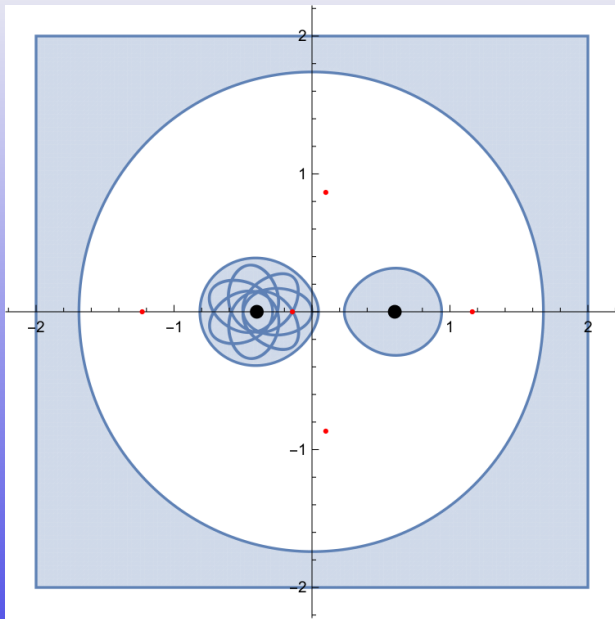
$$\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) - V_g(X, Y) = E$$

Ponieważ energia kinetyczna $\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$ musi być nieujemna, ruch jest dozwolony tylko w obszarze określonym nierównością:

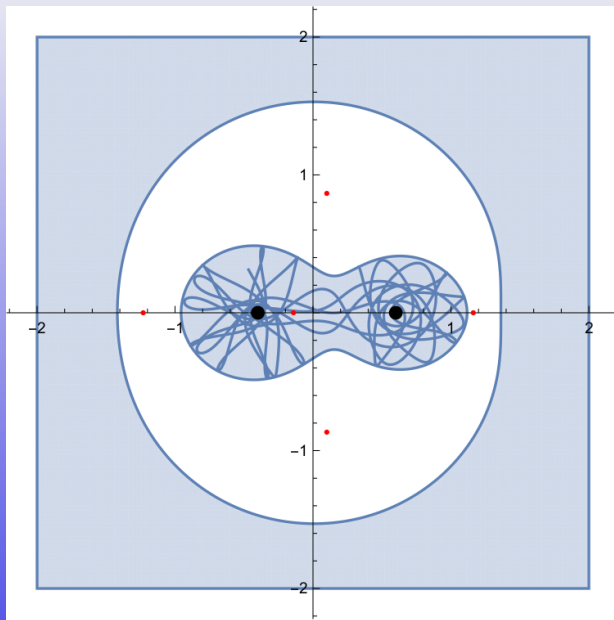
$$\frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) + V_g(X, Y) < E$$

Region Hill'a nigdy nie zostanie opuszczony, ale nie jest wiadome, jaki ruch jest faktycznie możliwy.

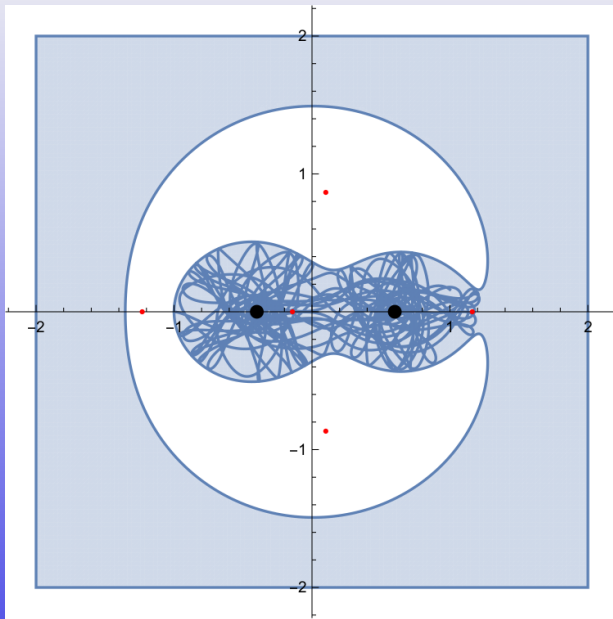
Ruch w pobliżu mas m i M



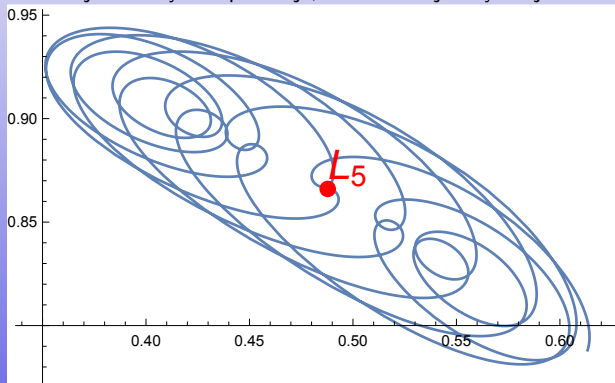
Ruch w pobliżu mas m i M



Ruch w pobliżu mas m i M

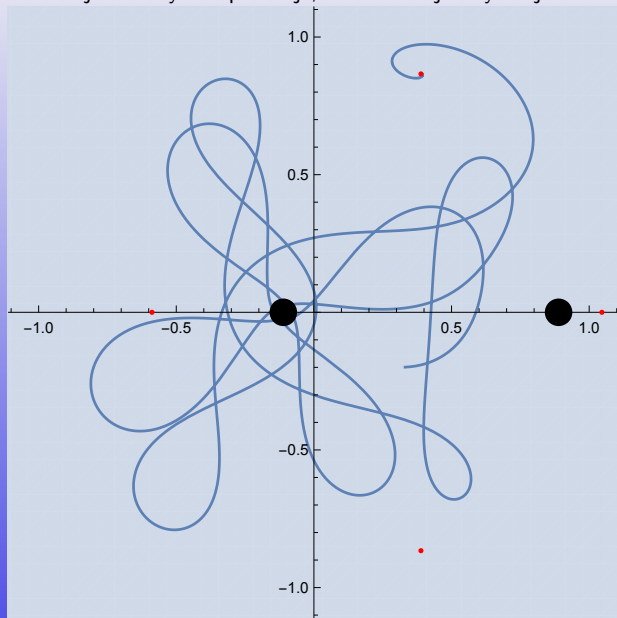


Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



Stabilność punktów Lagrange'a: ewidencja numeryczna

Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



W równaniach ruchu podstawiamy:

$$X(t) = \frac{1}{2}R \frac{M-m}{M+m} + \epsilon x(t) \quad (6a)$$

$$Y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}R + \epsilon y(t) \quad (6b)$$

a następnie rozwijamy w szereg potęgowy względem ϵ . Interesują nas człony przy ϵ , które utworzą układ równań różniczkowych liniowych:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \frac{3}{4}\omega^2x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m-M}{M+m}x = 0 \quad (7a)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \frac{9}{4}\omega^2y + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m-M}{M+m}y = 0 \quad (7b)$$

Stosujemy standardową procedurę dla równań liniowych:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

i otrzymujemy algebraiczny układ równań liniowych:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{3\omega^2}{4} & -2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} \\ 2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} & \lambda^2 - \frac{9\omega^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Wyznacznik macierzy powyżej daje równanie charakterystyczne:

$$\lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4} \frac{G^2 m M}{R^6} = 0.$$

Definicja niestabilności

Układ jest wykładniczo niestabilny w reżimie liniowym, gdy co najmniej jedna wartość własna posiada część rzeczywistą większą od zera:

$$\exists_{\lambda, \lambda \in \mathbb{C}} \lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4}\omega^2 \frac{mM}{(m+M)^2} = 0 \quad \& \quad \Re(\lambda) > 0$$

- 1 tradycyjnie: liczymy deltę r. dwukwadratowego i sprawdzamy kiedy jest równa zero (do przeliczenia na tablicy lub w domu)
- 2 stosując algorytm **eliminacji kwantyfikatorów**:
 - zapisujemy szczegółowo warunki jakie mają spełniać wartości własne i parametry: czy są rzeczywiste/ zespolone, większe od zera, ile ma ich być, czy mają być różne, itp. itd. za pomocą operacji przynależenia do zbioru, równości i nierówności oraz kwantyfikatorów \exists i \forall
 - powyższe wymaga staranności i pomysłowości
 - uruchamiamy algorytm: w *Mathematice* jest to **Resolve** (można użyć **Reduce**)
 - uszczegóławiamy wynik ręcznie lub za pomocą **Refine**

Obszar niestabilności:

$$\frac{25M}{2} - \frac{3\sqrt{69}M}{2} < m < \frac{3\sqrt{69}M}{2} + \frac{25M}{2}, \quad \frac{3\sqrt{69}}{2} + \frac{25}{2} \simeq 24.9599$$

Czas narastania niestabilności, tzw. czas Lyapunowa τ lub *e-folding time* to odwrotność największej z dodatnich stałych λ . Zależy od tego, jak daleko jesteśmy od punktu krytycznego. W powyższym przypadku λ osiąga maksimum dla $m = M$:

$$\lambda_{max} = \omega \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \simeq 0.12 T_{orb}$$

Rzeczywisty czas opuszczenia miejsca niestabilności zależy od tego, jak precyzyjnie ustalimy warunki początkowe. W praktyce szum numeryczny wystarcza aby zapoczątkować narastanie niestabilności.

W przypadku masy punktowej, przyspieszenie grawitacyjne i odśrodkowe równoważą się. W przypadku ciała rozciągniętego:

$$g = \frac{GM}{(d \pm r)^2} \simeq \frac{GM}{d^2} \mp \frac{2GM}{d^3} r$$

$$a = \omega^2(R \pm r) = \frac{GM}{d^2} \pm \frac{GM}{d^3} r$$

Odejmując stronami mamy:

$$a_t = \pm \frac{3GM}{d^3} r$$

Siła pływowa („rozrywająca”) zależy od:

- trzeciej potęgi odległości d od masy M
- rozmiarów r ciała poddanego sile pływowej

Rozważmy ciało niebieskie o kształcie kulistym, które na niebie ma rozmiary kątowe α . Jaka będzie pochodząca od niego siła pływową?

$$\frac{3GM}{d^3} = \frac{3G \frac{4}{3} \pi (\alpha d/2)^3 \rho}{d^3} = \frac{1}{2} \pi G \rho \alpha^3,$$

gdzie ρ to średnia gęstość.

Księżyc i Słońce mają te same rozmiary kątowe (zaćmienia!). Ich gęstości średnie to:

- $\bar{\rho}_{\odot} = 1408 \text{ kg/m}^3$
- $\bar{\rho}_{\text{C}} = 3344 \text{ kg/m}^3$

Wniosek: pływy pochodzące od Słońca są (tylko?) dwa razy słabsze niż od Księżycy.

Pytanie: z jakiej odległości podobne pływy wywołuje ludzkie ciało?

W Układzie Słonecznym spotykamy liczne przykłady mniej lub bardziej dokładnych **wymiernych** stosunków:

- 1 1:1 – okres orbitalny planetoid trojańskich i Jowisza w punktach L_4, L_5 układu Jowisz-Słońce
- 2 1:1 – prędkość kątowna obrotu i częstość orbitalna Księżycy
- 3 2:3 – okres orbitalny Ziemi i Wenus
- 4 1:1 – obrót Plutona i Charona
- 5 1:2:4 – okresy orbit Io, Europy i Ganimedesa
- 6 2:3 – okresy Plutona i Neptuna
- 7 3:4 – orbity Hiperiona i Tytana
- 8 3:2 – okres obrotu i orbity Merkurego

Częściowy rezonans 1:1



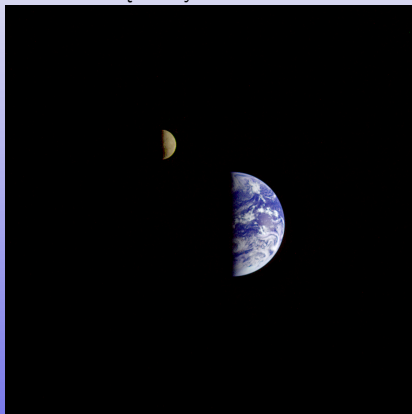
Ziemia - Księżyc

Pełny rezonans 1:1



Pluton - Charon

Częściowy rezonans 1:1

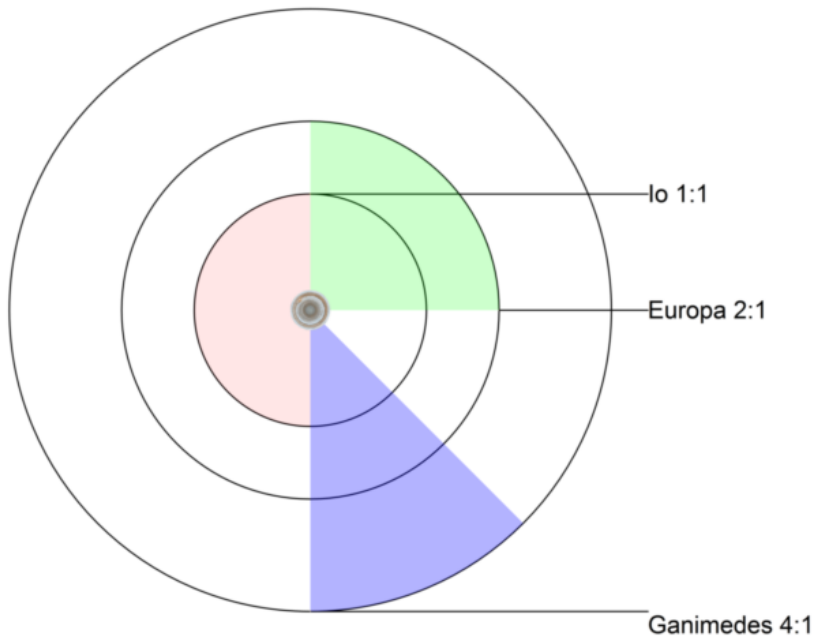


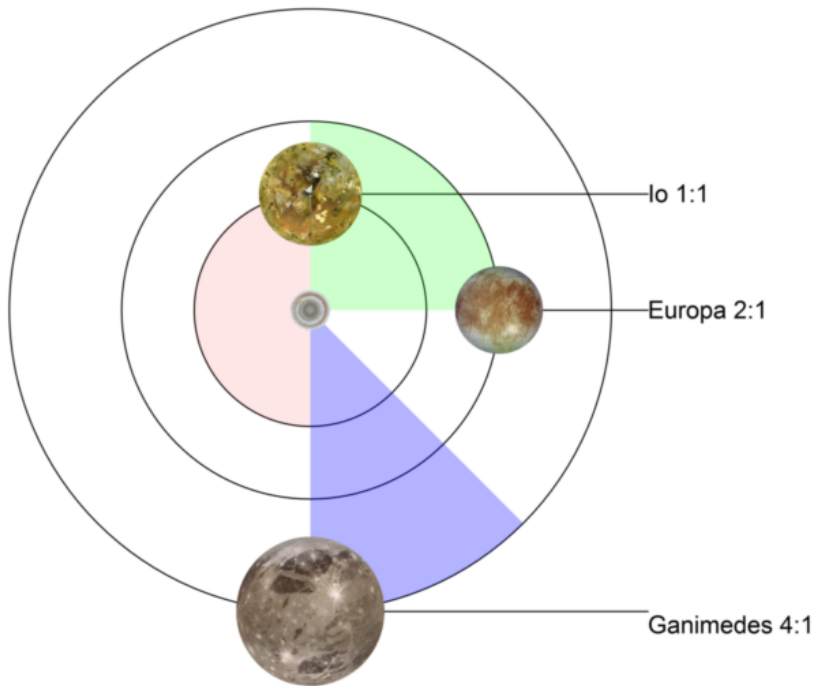
Ziemia - Księżyc

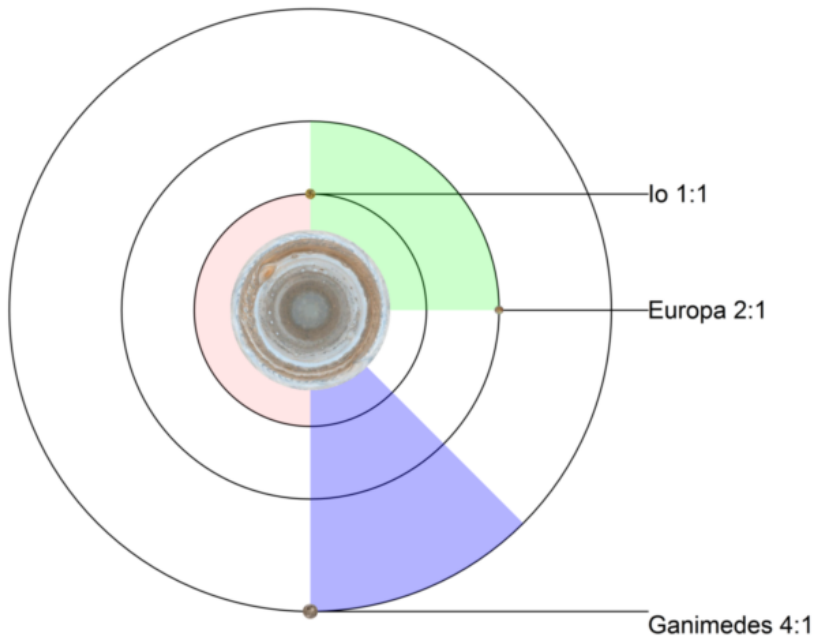
Pełny rezonans 1:1

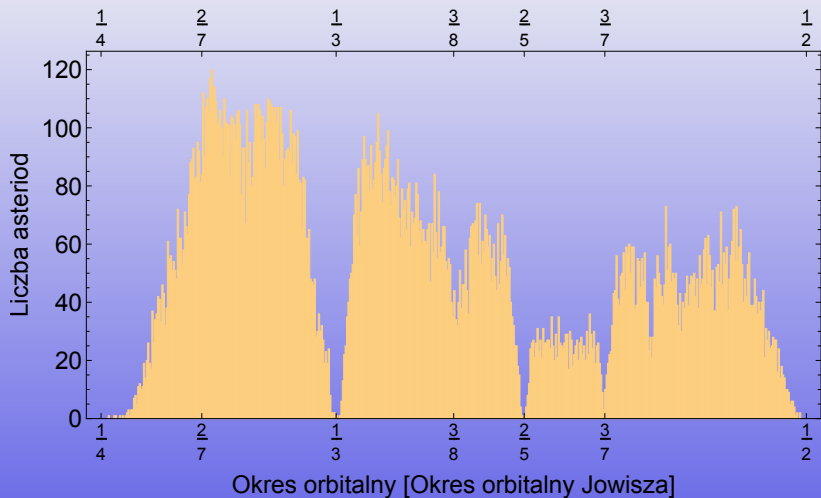


Pluton - Charon









$$a_n = \frac{4 + 3 \cdot 2^n}{10} [AU], \quad n = -\infty, 0, 1, \dots$$

Inna podobna formuła $a_n = 1.728^n$, która stosuje się także do księżyców Jowisza

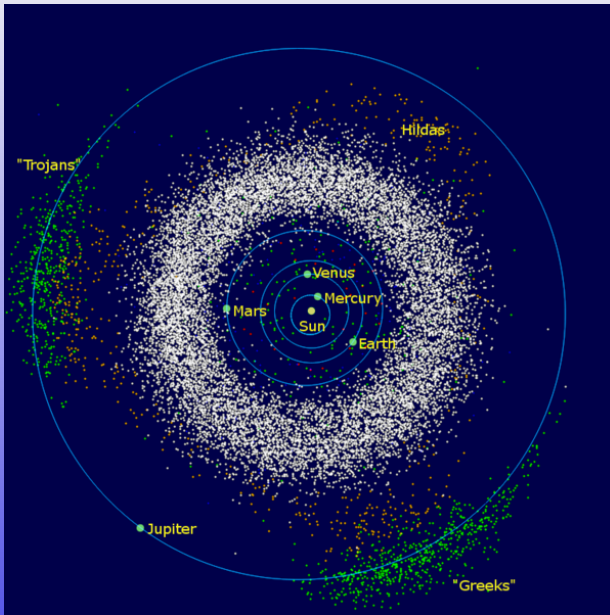
❶ standardowe wytłumaczenie:

- w Układzie Słonecznym powstaje bardzo duża liczba ciał rozmieszczonych losowo
- w toku ewolucji, niestabilności, rezonansów zajmują miejsca stabilne lub są wyrzucane poza Układ
- pozostają planety w bezpiecznych odległościach, kilku promieni Hill'a i stabilnych rezonansach

❷ struktura układów pozasłonecznych nie daje podstaw do twierdzenia o uniwersalności reguły Titiusa-Bodego

❸ niemniej jednak używa się jej do szukania egzoplanet

Planetoidy trojańskie



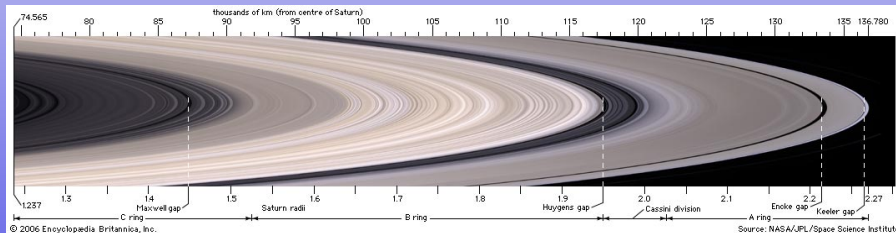
Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego — rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego — rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A — rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



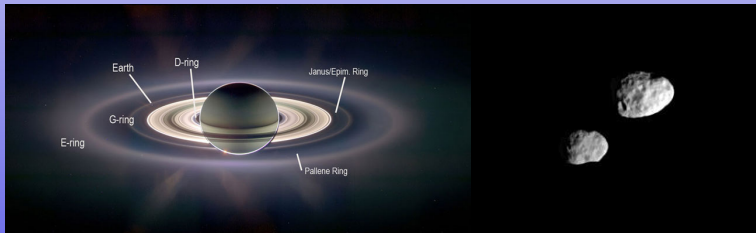
Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego — rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego — rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A — rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego — rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego — rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A — rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



Układy pozasłoneczne vs Układ Słoneczny

Przez setki lat teorie dotyczące układów planetarnych cierpiały z istotnego powodu:

- Liczba znanych układów planetarnych $N = 1$
- Obecnie $N > 3786$ i stale rośnie

Na dzień dzisiejszy katalog egzoplanet <http://exoplanet.eu/catalog/> obejmuje:

- 2834 (1195 w 2015) układów planetarnych
- 3786 (1897 w 2015) planet
- 629 (487 w 2015) układów z więcej niż jedną planetą

Kepler Orrery IV

Przez setki lat teorie dotyczące układów planetarnych cierpiały z istotnego powodu:

- Liczba znanych układów planetarnych $N = 1$
- Obecnie $N > 3786$ i stale rośnie

Na dzień dzisiejszy katalog exoplanet <http://exoplanet.eu/catalog/> obejmuje:

- 2834 (1195 w 2015) układów planetarnych
- 3786 (1897 w 2015) planet
- 629 (487 w 2015) układów z więcej niż jedną planetą

Kepler Orrery IV

- Układ składa się z 4 planet skalistych $0.4R_{\oplus} < R < R_{\oplus}$ wewnątrz oraz 4 gazowych gigantów $3.9R_{\oplus} < R < 11.2R_{\oplus}$
- orbity są prawie kołowe $0.007 < e < 0.12$, $\bar{e} = 0.06$
- orbity są prawie w jednej płaszczyźnie $0.33^{\circ} < i < 6.3^{\circ}$
- moment pędu Słońca jest bardzo mały $J_{\odot} \simeq 0.005J_{\text{tot}}$
- równik Słońca jest nachylony pod małym kątem $\alpha = 6^{\circ}$ do płaszczyzny niezmienniczej Laplace'a
- rozmiary orbit spełniają w przybliżeniu regułę Titiusa-Bodego

Hipotetyczny (fikcyjny) układ planetarny najbliższej gwiazdy, Alfy Centaura:

α Cen — najjaśniejsza gwiazda w gwiazdozborze Centaura

α Cen tworzy układ podwójny:

α Cen A + α Cen B

Zakładamy, że α Cen B ma układ planetarny:

- 1 α Cen Ba \equiv α Cen B — gwiazda centralna
- 2 α Cen Bb — pierwsza **odkryta** planeta
- 3 α Cen Bc — druga **odkryta** planeta
- 4 itd.

Table 1. Planet occurrence rates around FGK stars

Study	Technique	Period range	Size range	Occurrence [%]
Wright et al. (2012)	RV	< 10 d	> 30 M_{\oplus}	1.20 ± 0.38
Mayor et al. (2011)	RV	< 11 d	> 50 M_{\oplus}	0.89 ± 0.36
Cumming et al. (2008)	RV	< 5.2 yr	>100 M_{\oplus}	8.5 ± 1.3
		<100 d	>100 M_{\oplus}	2.4 ± 0.7
Howard et al. (2010)	RV	<50 d	3–10 M_{\oplus}	$11.8^{+4.3}_{-3.5}$
		<50 d	10–30 M_{\oplus}	$6.5^{+3.0}_{-2.3}$
Mayor et al. (2011)	RV	<50 d	3–10 M_{\oplus}	16.6 ± 4.4
		<50 d	10–30 M_{\oplus}	11.1 ± 2.4
		<10 yr	>50 M_{\oplus}	13.9 ± 1.7
Fressin et al. (2013)	Transit	<10 d	6–22 R_{\oplus}	0.43 ± 0.05
		<85 d	0.8–1.25 R_{\oplus}	16.6 ± 3.6
		<85 d	1.25–2 R_{\oplus}	20.3 ± 2.0
		<85 d	2–4 R_{\oplus}	19.9 ± 1.2
		<85 d	1.25–22 R_{\oplus}	52.3 ± 4.2
Petigura, Howard & Marcy (2013)	Transit	5–100 d	1–2 R_{\oplus}	26 ± 3
		5–100 d	8–16 R_{\oplus}	1.6 ± 0.4

Table 2. Occurrence rates of “Earth-like planets”

Type of star	Type of planet	Approx. HZ boundaries* [S/S_{\oplus}]	Occurrence rate [%]	Reference
M	1-10 M_{\oplus}	0.75-2.0	41^{+54}_{-13}	1
FGK	0.8-2.0 R_{\oplus}	0.3-1.8	$2.8^{+1.9}_{-0.9}$	2
FGK	0.5-2.0 R_{\oplus}	0.8-1.8	34 ± 14	3
M	0.5-1.4 R_{\oplus}	0.46-1.0	15^{+13}_{-6}	4
M	0.5-1.4 R_{\oplus}	0.22-0.80	48^{+12}_{-24}	5
GK	1-2 R_{\oplus}	0.25-4.0	11 ± 4	6
FGK	1-2 R_{\oplus}	0.25-4.0 [†]	~ 0.01	7
FGK	1-4 R_{\oplus}	0.35-1.0	$6.4^{+3.4}_{-1.1}$	8

Czego się dowiedzieliśmy?

Czy Układ Słoneczny jest jedyny w Galaktyce?	NIE
Ile gwiazd typu Słońca posiada planety?	co najmniej 10%
Czy Ukł. Słoneczny jest typowy?	NIE
Czy obecność Jowisza jest typowa	TAK, ale $0 < e < 0.9$, $\bar{e} \simeq 0.2$
Czy pojęcie „ekliptyki” ma sens	TAK
Czy występują rezonanse?	TAK, szczególnie pomiędzy gigantami
Czy spin gwiazdy zawsze jest równoległy do krętu układu?	NIE

Klasyczna teoria formowania się planet jest aktualnie w kryzysie spowodowanym konfrontacją z danymi obserwacyjnymi egzoplanet.

Zarys teorii

- 1 obłok otaczający gwiazdę kolapsuje do postaci dysku
- 2 niestabilności powodują uformowanie *planetozymali*
- 3 zderzenia i sklejanie planetozymali powoduje utworzenie jąder planet
- 4 akrecja (gazu lub pyłu, w zależności od tzw. linii śniegu) powoduje wzrost do obecnych rozmiarów
- 5 migracja i rezonanse powodują utrwalenie struktury układu

Wyniki dotyczące układów pozasłonecznych są silnie przekształcone poprzez obserwacyjny **bias**.

Metoda szukania	BIAS (preferowane parametry układu)
prędkość radialna	M - duże, T, M_*, Ω_* - małe
astrometria	a, M, T - duże
tranzyty (zaćmienia)	$i \simeq \pi/2, R$ - duży, R_* - mały
mikrosoczewkowanie	pomiar jednorazowy, brak możliwości potwierdzenia
bezpośrednie zdjęcia	R, a - duże

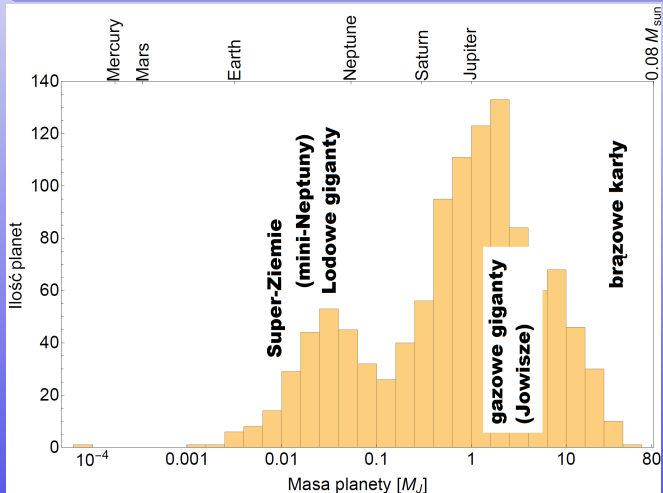
T – okres orbitalny planety, a – wielka półoś orbity planety, M – masa planety, R – promień planety, M_* – masa gwiazdy, Ω_* – prędkość kątowna gwiazdy, R_* – promień gwiazdy

Najważniejsze bazy danych o egzoplanetach:

- 1 exoplanets.eu
- 2 exoplanets.org
- 3 exoplanetarchive.ipac.caltech.edu

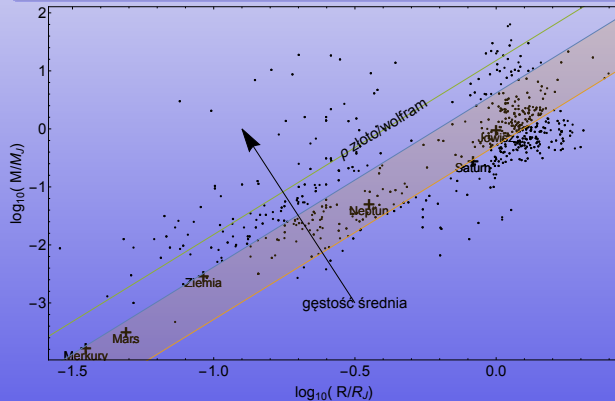
Układ Słoneczny

$$M_{\odot} \simeq 1000 M_J, \quad M_{\star} \simeq 0.08 M_{\odot} \simeq 80 M_J, \quad M_J \simeq 300 M_{\oplus}$$

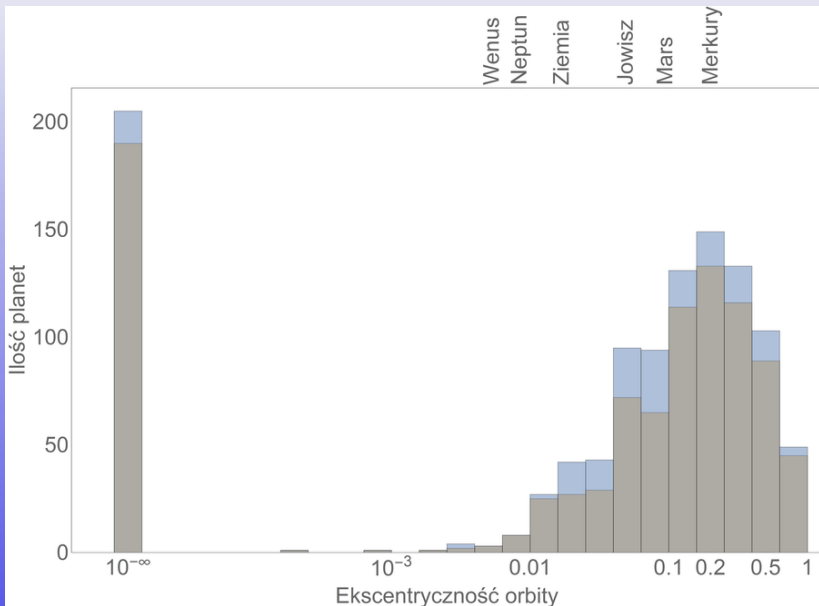


Układ Słoneczny

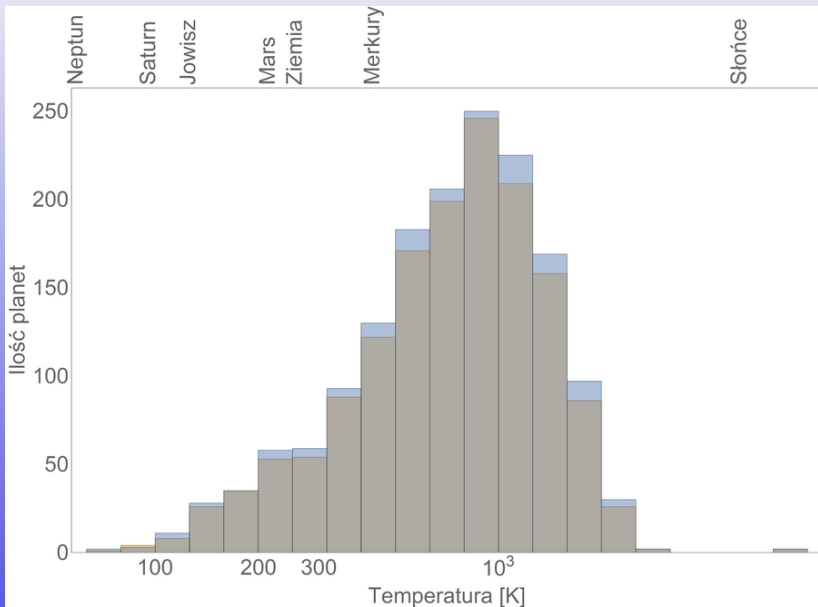
Saturn: $\bar{\rho} = 687 \text{ kg/m}^3$, Jowisz: $\bar{\rho} = 1326 \text{ kg/m}^3$, Ziemia: $\bar{\rho} = 5515 \text{ kg/m}^3$



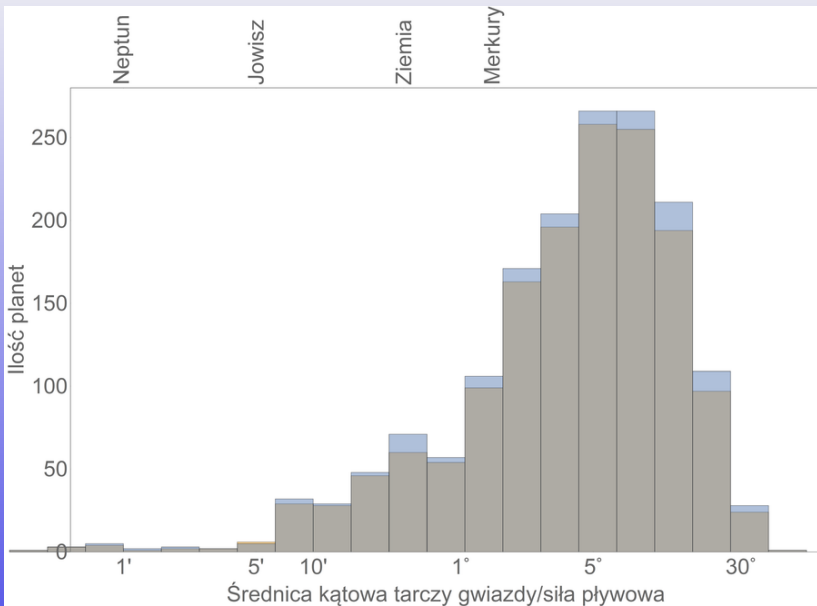
Układy pozasłoneczne: ekscentryczność orbity



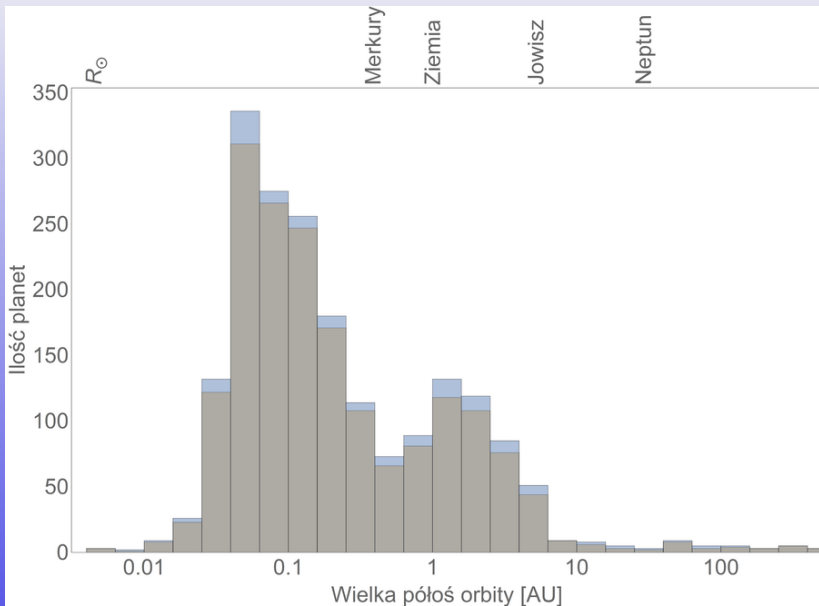
Układy pozasłoneczne: temperatura efektywna



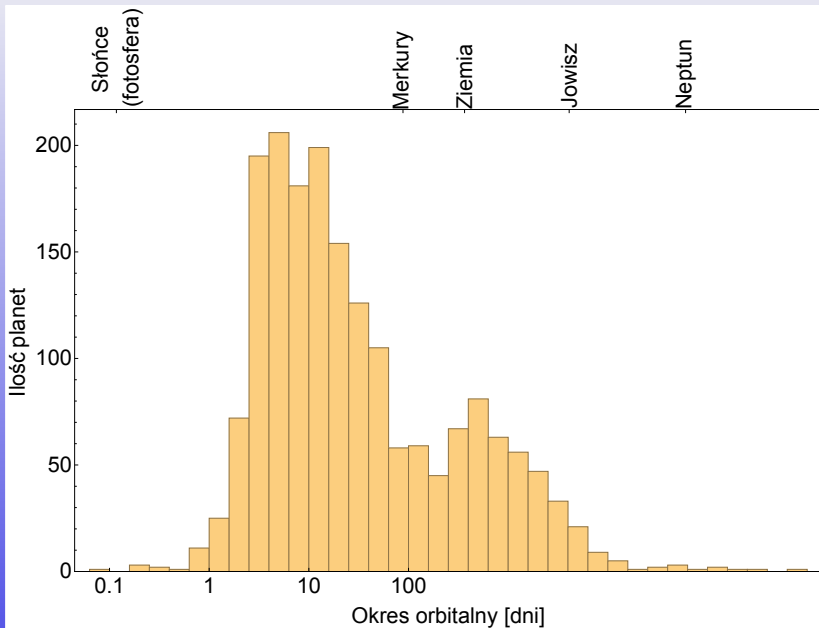
Układy pozasłoneczne: siły pływowe



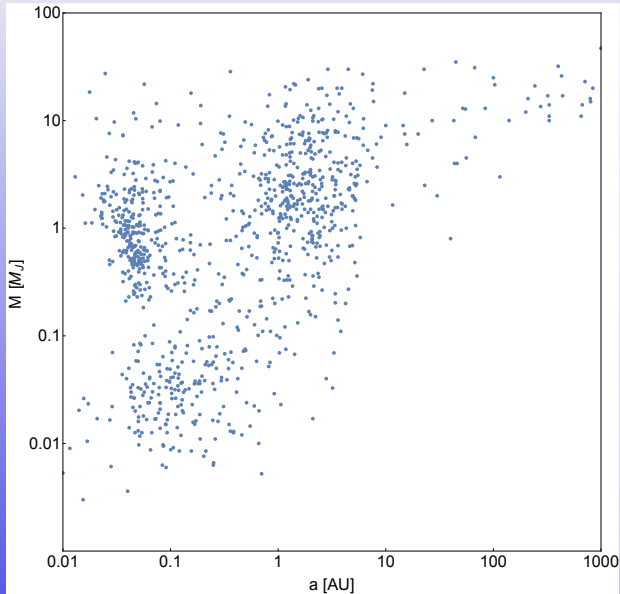
Układy pozasłoneczne: wielka półoś



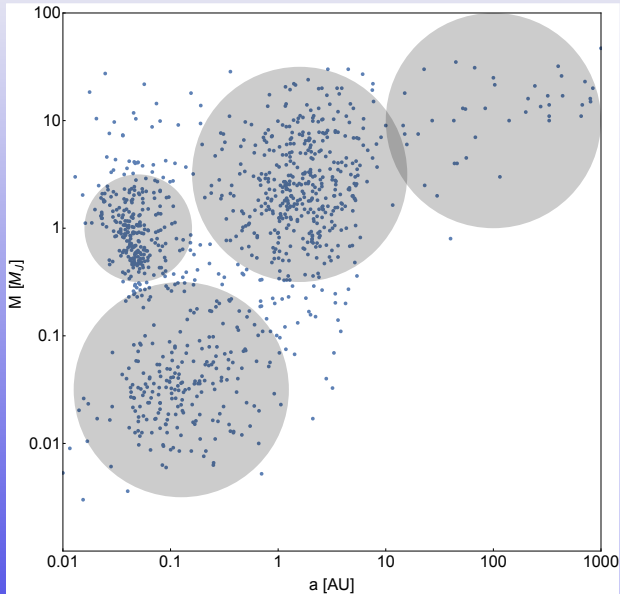
Układy pozasłoneczne: okres orbitalny



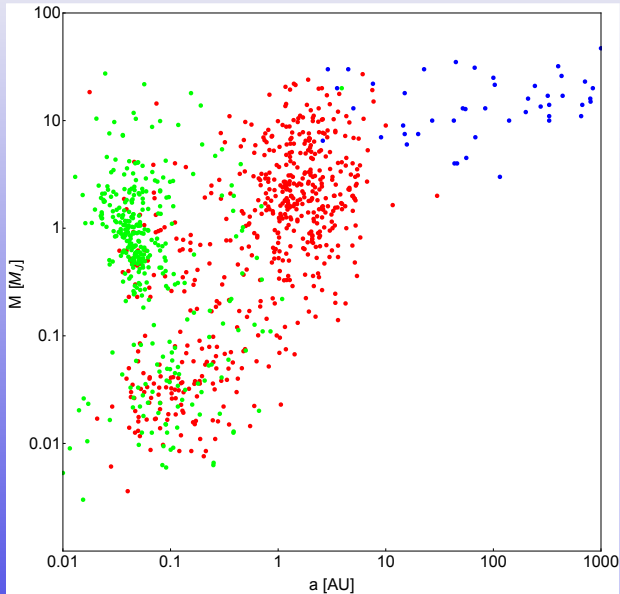
Układy pozasłoneczne: BIAS



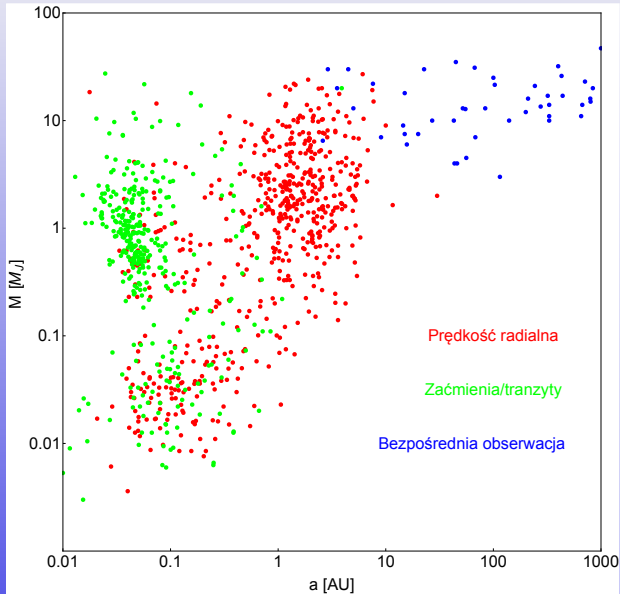
Układy pozasłoneczne: BIAS



Układy pozasłoneczne: BIAS



Układy pozasłoneczne: BIAS



Najnowsze odkrycia na obrzeżach Układu Słonecznego wymusiły doprecyzowanie definicji planety. Wyrzucenie Plutona z grona planet jest symbolem zmiany.

Obecnie rozróżniamy:

- 1 planety [def: (1) na orbicie Słońca (2) kształt sferyczny (3) oczyszczenie orbity]
 - planety skaliste (Merkury, Wenus, Ziemia, Mars)
 - lodowe olbrzymy (Uran, Neptun)
 - gazowe olbrzymy (Jowisz, Saturn)
- 2 księżyce (Księżyc, Ganimedes, Io, Europa, Tytan, Phoebe ...)
- 3 planety karłowate (Ceres, Pluton, Eris, Makemake, ...)
- 4 małe ciała Układu Słonecznego
- 5 komety

Życie i inteligencja we Wszechświecie

- zmiany klimatu
- wielkie wymierania
- rozwój nauki
- pogoda kosmiczna

- okresowe zaburzenia orbity (tzw. cykle Milankovica)
- ewolucja Słońca a Snowball Earth

Założmy, że planeta absorbuje 100% promieniowania słonecznego, a następnie emituje je we wszystkich kierunkach jak ciało doskonale czarne:

$$P_{\text{abs}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\oplus}^2} \pi R_{\oplus}^2, \quad L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$$

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4$$

Po skróceniu otrzymujemy zależność pomiędzy temperaturą planety (Ziemi) a jej odległością od gwiazdy centralnej (Słońca):

$$2 \frac{d_{\oplus}}{R_{\odot}} = \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\oplus}} \right)^2$$

Wynik zwykle podaje się jako rejon, w którym woda (H_2O) może występować w „stanie ciekłym” $273 \text{ K} < T_{\oplus} < 373 \text{ K}$:

$$0.55 \text{ AU} < d_{\oplus} < 1.05 \text{ AU}, \quad T_{\odot} = 5800 \text{ K}, R_{\odot} = 700000 \text{ km}$$

Ziemia ($d_{\oplus} = 1\text{AU}$) ledwo załapała się do tej strefy!

Założmy, że planeta absorbuje 100% promieniowania słonecznego, a następnie emituje je we wszystkich kierunkach jak ciało doskonale czarne:

$$P_{\text{abs}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\oplus}^2} \pi R_{\oplus}^2, \quad L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$$

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4$$

Po skróceniu otrzymujemy zależność pomiędzy temperaturą planety (Ziemi) a jej odległością od gwiazdy centralnej (Słońca):

$$2 \frac{d_{\oplus}}{R_{\odot}} = \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\oplus}} \right)^2$$

Wynik zwykle podaje się jako rejon, w którym metan (CH_4) może występować w „stanie ciekłym” $90 \text{ K} < T_{\text{r}_2} < 110 \text{ K}$:

$$6.5 \text{ AU} < d_{\text{r}_2} < 9.7 \text{ AU}, \quad T_{\odot} = 5800 \text{ K}, R_{\odot} = 700000 \text{ km}$$

Saturn ($d_{\text{r}_2} = 9.6 \text{ AU}$) ledwo załapał się do tej strefy!

Bardzo ważnym pojęciem modyfikującym przedstawione przed chwilą rozumowanie jest albedo, czyli współczynnik odbicia promieniowania przez obiekt astronomiczny.

- dla ciała doskonale czarnego $\text{albedo} = 0$
- dla idealnego lustra $\text{albedo} = 1$

Przykłady:	jądro komety	0.04
	asfalt	0.04
	Ziemia	0.3
	śnieg	0.80
	Wenus	0.90
	Eris	0.96
	Enceladus	0.99

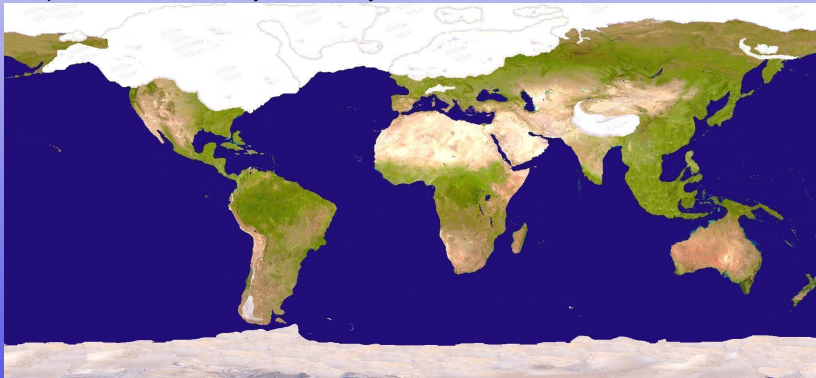
Używa się kilku definicji. Najważniejsze to albedo Bonda („energetyczne”; modelowanie klimatu) i albedo geometryczne („wizualne”; obserwacje).

Ostatnie maksimum zlodowacenia

Około 20 000 lat temu, z orbity ujrzelibyśmy szokujący obraz:

- 1 Ameryka Północna i Europa pokryte lądolodem o grubości kilku kilometrów
- 2 poziom oceanu niższy o 200 metrów
- 3 jeziora zaporowe, zmienione koryta rzek
- 4 inny klimat

Co spowodowało tak drastyczne zmiany w bardzo krótkim czasie?



Ostatnie maksimum zlodowacenia

Około 20 000 lat temu, z orbity ujrzelibyśmy szokujący obraz:

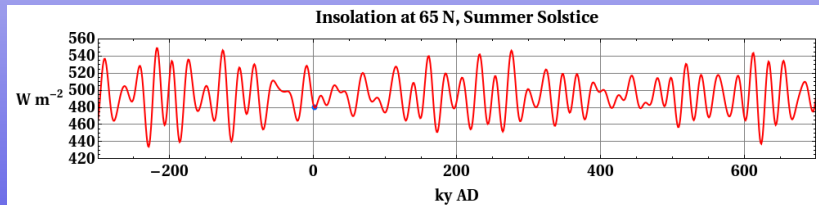
- 1 Ameryka Północna i Europa pokryte lądolodem o grubości kilku kilometrów
- 2 poziom oceanu niższy o 200 metrów
- 3 jeziora zaporowe, zmienione koryta rzek
- 4 inny klimat

Co spowodowało tak drastyczne zmiany w bardzo krótkim czasie?

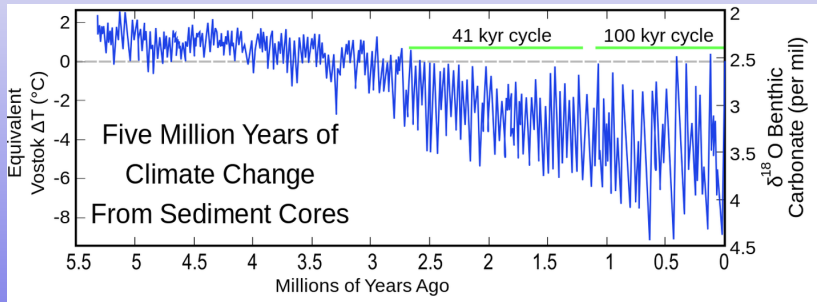


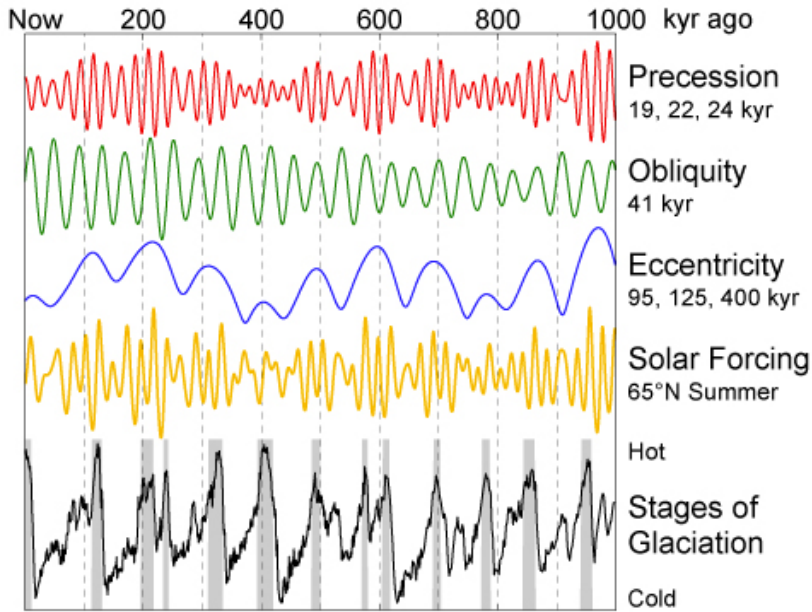
Elementy orbity Ziemi podlegają okresowym zmianom, wywołanym perturbacjami Jowisza, Saturna i innych planet:

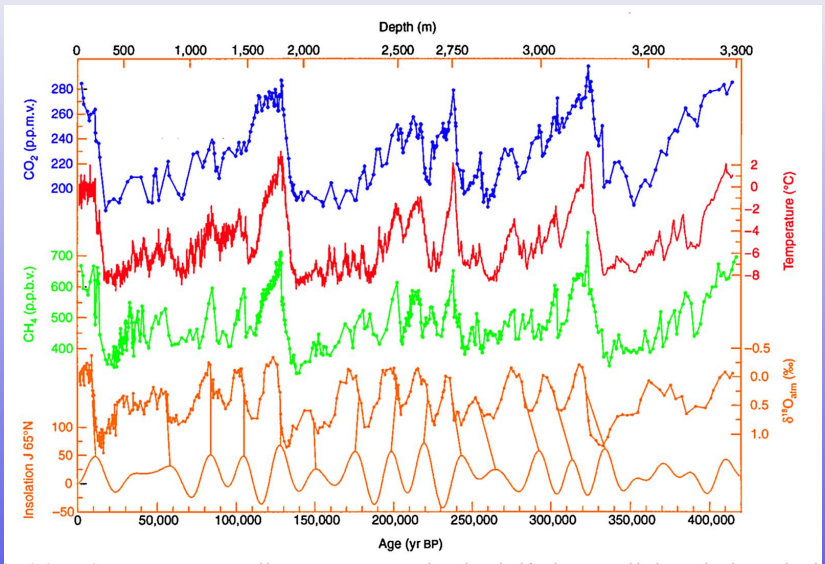
- 1 zmiana mimośrodów orbity w zakresie $0 \leq e < 0.05$ z okresem około 100 tysięcy lat (aktualnie: $e = 0.0167$)
- 2 wahania nachylenia osi obrotu Ziemi z zakresie $21.5 < \alpha < 24.5$ z okresem 41 000 lat (obecnie $\alpha = 23.5^\circ$)
- 3 precesja peryhelium z okresem około 112 000 lat (obecnie Ziemia jest w peryhelium 4 stycznia)
- 4 precesja osi obrotu Ziemi z okresem około 26 000 lat



<http://www.sciencecourseware.org/eec/GlobalWarming/Tutorials/Milankovitch/>





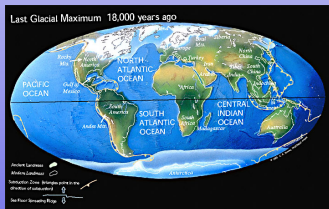


Ziemia oscyluje pomiędzy dwoma stanami stabilnymi:

- 1 stan chłodni (ang. *icehouse earth*)
- 2 stan szklarni (ang. *greenhouse earth*)

Chłodnia

łądolody na biegunach
niskie stężenie CO₂
20% historii



Cieplarnia

brak stałego zlodowacenia
wysokie stężenie CO₂
80% historii

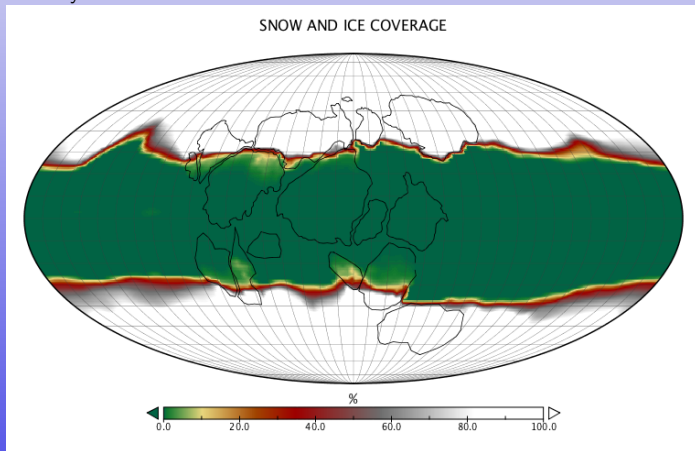


Obecnie Ziemia jest w stanie chłodni, w trakcie interglacjału.

Połączymy dwa fakty:

- 1 wzór na temperaturę Ziemi w zależności od odległości do Słońca
- 2 wzrost mocy promieniowania Słońca w tempie około 7% na 10^9 lat (miliard lat)

Kiedy w przeszłości Ziemia „wypada” ze strefy ciekłej wody $T = 0^\circ \text{C}$? Około 1-2 miliardy lat temu!



Gwałtowny spadek liczby gatunków w geologicznie krótkim czasie. Najważniejsze z wielu:

- 1 wymieranie permskie, wyznaczające koniec ery palozoiku
- 2 wymieranie kreda/trzeciorzęd wyznaczające koniec ery mezozoziku

Wydarzenia te mają pozornie kwaziokresowy charakter z $T \sim 100$ milionów lat.
Przyczyny „astrofizyczne”:

- wybuchy hipernowych/ rozbłyski gamma
- uderzenia meteorów i komet



Jeden z kraterów Morasko k. Poznania Źródło: <http://www.pkim.org/>



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

Chichen Itza Cenote





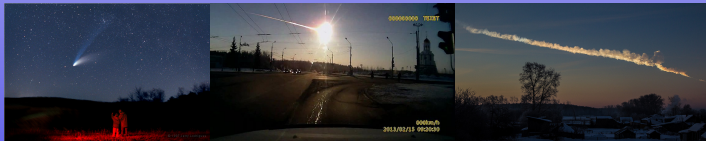
Each blue dot below represents a cenote such as the one to the left.



Chichen Itza Cenote



- złożony, ale regularny układ planetarny
- komety
 - ① Tycho wykazuje, że kometa jest 4x dalej niż Księżyc
 - ② Halley przewiduje powrót komety
- impakty, kratery, cenote
- zaćmienia
- supernowe, nowe, gwiazdy zmienne
 - ① Algol, Mira — pierwsze gwiazdy zidentyfikowane jako zmienne
 - ② SN1604 — *De Stella Nova in pede serpentari*
 - ③ S And vel SN1885 — odkrycie galaktyk
 - ④ SN 1987A — pierwsze neutrino z obiektu pozasłonecznego
 - ⑤ GW150914 — pierwsza obserwacja fal grawitacyjnych (złączenie pary czarnych dziur o masach 29 i 36 M_{\odot})



- Ziemia jedyną planetą na której występuje życie, od około 3.9 miliarda lat
- niejasne pochodzenie: teoria panspermii lub „zupy pierwotnej”
- odnalezienie życia gdziekolwiek poza Ziemią byłoby rewolucyjnym odkryciem
- powszechnie zakłada się, że woda w stanie ciekłym jest warunkiem koniecznym życia
- do niedawna za warunek konieczny uważano odpowiednie promieniowanie „słoneczne”
- 4 ery życia na Ziemi:
 - 1 era geochemiczna/geotermalna (początek: 4.28 ... 3.77 mld lat temu)
 - 2 era światła/fotosyntezy (początek: 2.4 ... 2.1 mld lat temu)
 - 3 era „mięsa”/zjadania innych organizmów (początek: 540 mln lat temu)
 - 4 era ognia/paliw kopalnych (1.7 ... 0.2 mln lat temu)

Powyższe warunki zawężają poszukiwania w Układzie Słonecznym do Marsa, natomiast dla egzoplanet wyznaczają *ekosferę*.

Szerszy zakres poszukiwań uwzględnia źródła energii geotermicznej lub/i inne płyny zamiast wody, np: węglowodory (metan itd.).

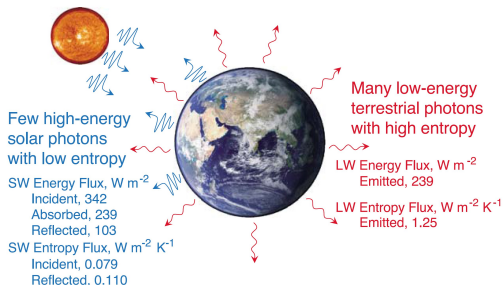


Figure 1. The global average energy and entropy fluxes from the zero-dimensional model of the Earth system. Earth's emitted LW and absorbed SW energy fluxes are balanced, but the entropy flux of the Earth's emitted LW radiation is 1 order of magnitude greater than the entropy flux of the incident or reflected SW radiation. The values of radiation energy and entropy fluxes are calculated for Earth's SW albedo of 0.30 and LW emissivity of 0.60 and for the solar constant $1367 W m^{-2}$. Adapted from *Stephens and O'Brien* [1993, Figure 1].

$$\frac{S_{in}}{S_{out}} = \frac{T_{\oplus}}{T_{\odot}}$$

Poglądy na warunki niezbędne dla istnienia życia zweryfikowały odkrycia:

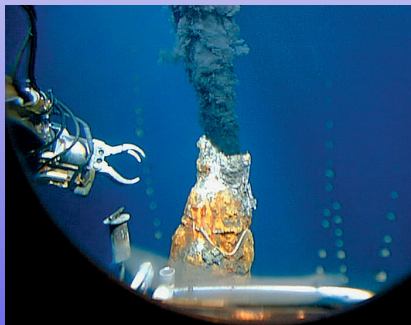
- 1 kominów hydrotermalnych na dnie oceanu
- 2 ekstremofilnych organizmów

Powyższe rozszerza listę do wszystkich ciał niebieskich posiadających źródło energii geotermalnej i wodę w stanie ciekłym!

- Europa
- Enceladus
- Ganimedes
- ?

Jeżeli zamiast wody dopuścimy ciekły metan, to lista się wydłuży o Tytana.

Źródło: Aliens of the Deep <http://www.imdb.com/title/tt0417415/>



Poglądy na warunki niezbędne dla istnienia życia zweryfikowały odkrycia:

- 1 kominów hydrotermalnych na dnie oceanu
- 2 ekstremofilnych organizmów

Powyższe rozszerza listę do wszystkich ciał niebieskich posiadających źródło energii geotermalnej i wodę w stanie ciekłym!

- Europa
- Enceladus
- Ganimedes
- ?

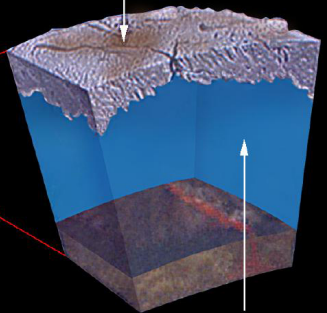
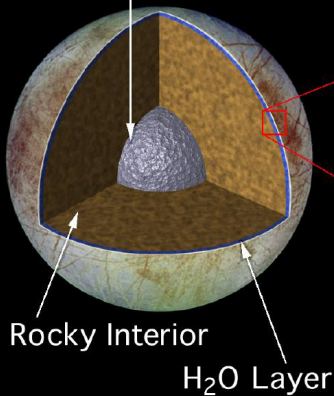
Jeżeli zamiast wody dopuścimy ciekły metan, to lista się wydłuży o Tytana.

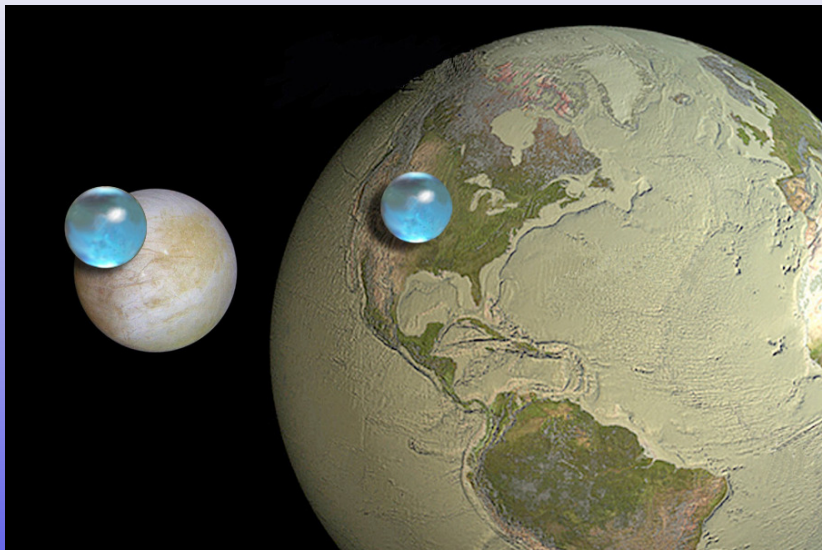
Źródło: Aliens of the Deep <http://www.imdb.com/title/tt0417415/>



Metallic Core

Ice Covering











- ❶ paradoks Fermiego: czas dyfuzji cywilizacji technologicznej (10 milionów lat) znacznie mniejszy od wieku Galaktyki (10 miliardów lat)
- ❷ SETI: milczenie Wszechświata
- ❸ skala Kardaszewa: gdzie są skutki działania zaawansowanych cywilizacji (zob: KIC 8462852)?
- ❹ równanie Drake'a na ilość cywilizacji technicznych

- 1 paradoks Fermiego: czas dyfuzji cywilizacji technologicznej (10 milionów lat) znacznie mniejszy od wieku Galaktyki (10 miliardów lat)
- 2 SETI: milczenie Wszechświata
- 3 skala Kardaszewa: gdzie są skutki działania zaawansowanych cywilizacji (zob: KIC 8462852)?
- 4 równanie Drake'a na ilość cywilizacji technicznych

- 1 paradoks Fermiego: czas dyfuzji cywilizacji technologicznej (10 milionów lat) znacznie mniejszy od wieku Galaktyki (10 miliardów lat)
- 2 SETI: milczenie Wszechświata
- 3 skala Kardaszewa: gdzie są skutki działania zaawansowanych cywilizacji (zob: KIC 8462852)?
- 4 równanie Drake'a na ilość cywilizacji technicznych

- 1 paradoks Fermiego: czas dyfuzji cywilizacji technologicznej (10 milionów lat) znacznie mniejszy od wieku Galaktyki (10 miliardów lat)
- 2 SETI: milczenie Wszechświata
- 3 skala Kardaszewa: gdzie są skutki działania zaawansowanych cywilizacji (zob: KIC 8462852)?
- 4 równanie Drake'a na ilość cywilizacji technicznych

$$N = R_* f_p n_e f_l f_i f_c L$$

- N - ilość cywilizacji zdolnych do kontaktu
- R_* - tempo tworzenia gwiazd (10/rok)
- f_p - prawdopodobieństwo posiadania planet (1)
- n_e - ilość planet zdolnych do podtrzymania życia (4)
- f_l - prawdopodobieństwo powstania życia (1)
- f_i - prawdopodobieństwo wyewoluowania inteligencji (1)
- f_c - prawdopodobieństwo wytworzenia technologii/nauki (1/100)
- L - średni czas życia cywilizacji (500 lat)

$$N = R_* f_p n_e f_l f_i f_c L$$

DRAKE EQUATION

The first National Academy of Sciences conference on the detection of extraterrestrial intelligent life was held from October 30 to November 3, 1961. In his opening remarks, Frank Drake proposed the above equation as the agenda for the meeting. The terms have the following meaning:

- | | |
|--|--|
| N = number of communicative civilizations in the Galaxy. | L = fractional main sequence lifetime in which life begins. |
| R_* = rate of solar type star formation in the Galaxy. | f_l = fraction of the life span that even a civilization exists. |
| f_p = fraction of such stars having planetary systems. | f_i = fraction of those that attempt interstellar communication. |
| n_e = average number of planets in the envelope of the star. | L = average longevity of the communicative phase. |

The factors on the right are essentially unknown, so N remains a tantalizing mystery. Nevertheless, the Drake equation served, and still serves, as an excellent way to categorize our ignorance and thereby stimulate productive discussion and research.

Presented here: National Academy of Sciences, Conference on the SETI Search, October 1961.