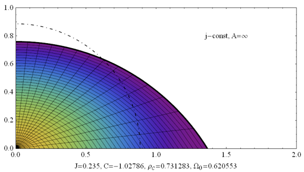
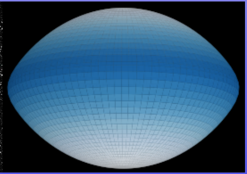
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

2 czerwca 2015



Rotacja sztywna

Klasyczna teoria rotujących ciał

Zagadnienie struktury i ewolucji stacjonarnych (niezależnych od czasu, ale z niezerową prędkością), w szczególności „rotujących” samograwitujących ciał będziemy rozpatrywać zaczynając od dwóch skrajnych przypadków:

1. obiekty o stałej gęstości (klasyczna teoria figur równowagi)
2. obiekty nieważkie, o średniej gęstości dążącej do zera, poruszające się w polu masy punktowej (model Roche'a)

Można pokazać, że w przypadku rotacji ze stałą prędkością kątową, ciała o rozkładzie gęstości danym funkcjami Lane-Emdena (politropy) zachowują się jakościowo podobnie do powyższych modeli gdy:

- $n < 0.8$ ($\gamma = 1 + \frac{1}{n} > 2.25$) – jak ciało o stałej gęstości
- jak model Roche'a w przeciwnym przypadku

Wartość $n \simeq 1$ i więcej odpowiada materii z której zbudowane są np: planety lub gwiazdy neutronowe.

Elipsoidalne figury równowagi

Kształt powierzchni obracającego się ciała o stałej gęstości jest w zasadzie nieznany. Okazuję się, że zakładając rotację „sztywną” (jednorodną)

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = const$$

z przyspieszeniem odśrodkowym $\vec{a}$ o potencjale odśrodkowym (centryfugalnym) Φ_c

$$\vec{a} = \Omega^2 \, r \, \vec{e}_r, \qquad \Phi_c = \frac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2)$$

jednym z rozwiązań jest elipsoida, dla której znany jest wzór na potencjał grawitacyjny (wewnątrz)

$$\Phi_g = \pi G \rho \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{a}_i^2 - r_i^2) A_i$$

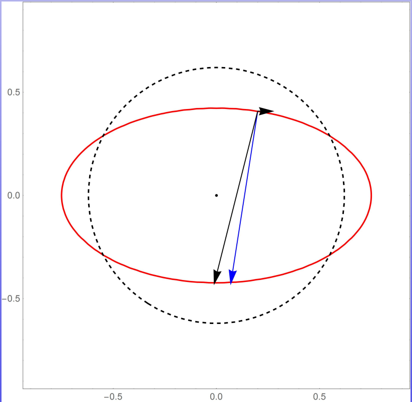
gdzie $\mathbf{a} = \{a, b, c\}$ to półosie elipsoidy, $r = \{x, y, z\}$ oraz

$$A_i = abc \int_0^\infty \frac{du}{(\mathbf{a}_i^2 + u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

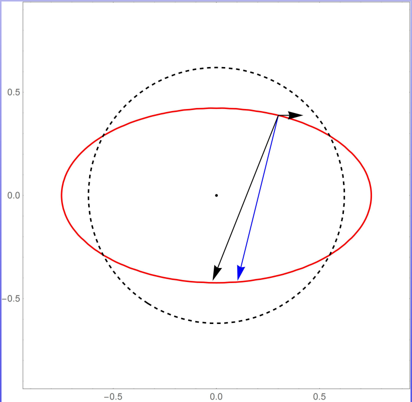
$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona"

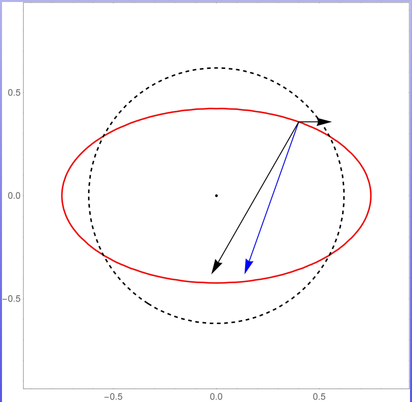
$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

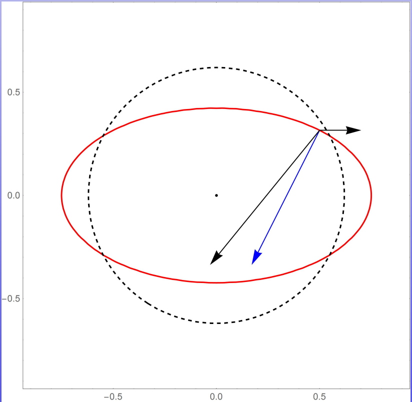
$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

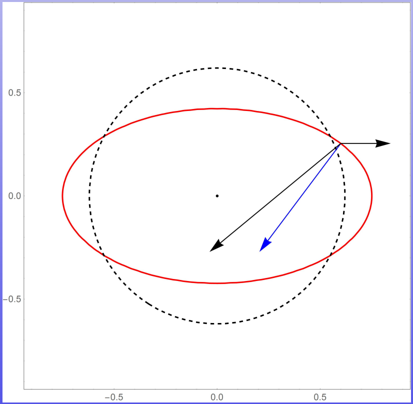
$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona"

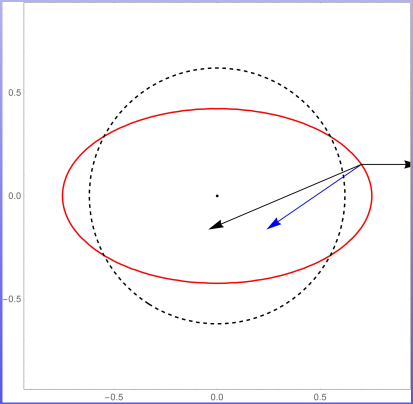
$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

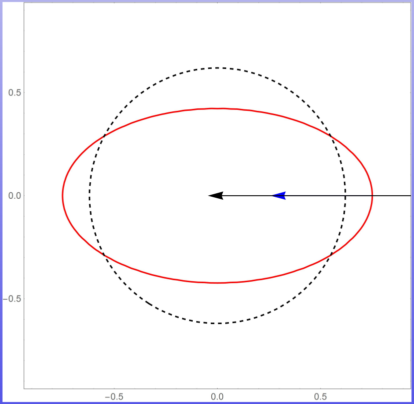
$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \perp \nabla P$$



Elipsoida Maclaurina

Okazuje się, że równanie równowagi można przepisać w postaci równania elipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdzie:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_x - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_y - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{4}{3}\pi abc = M$$

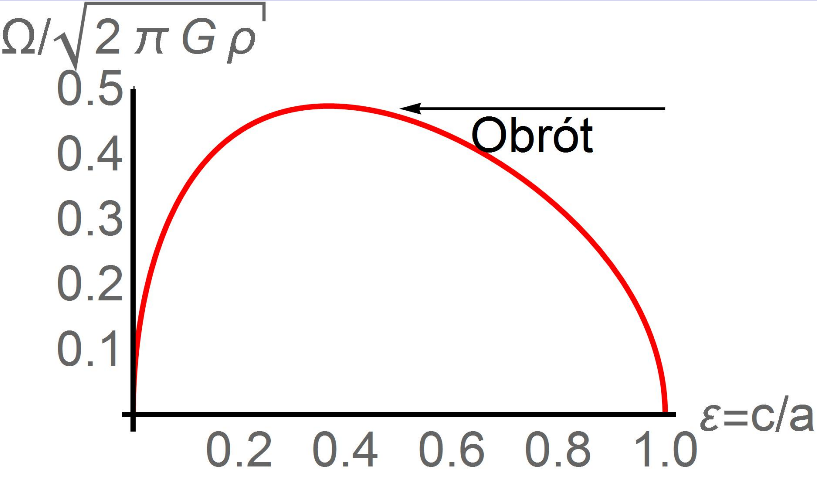
Rozwiązanie powyższego układu dla $a = b$ w zależności od bezwymiarowego parametru

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$$

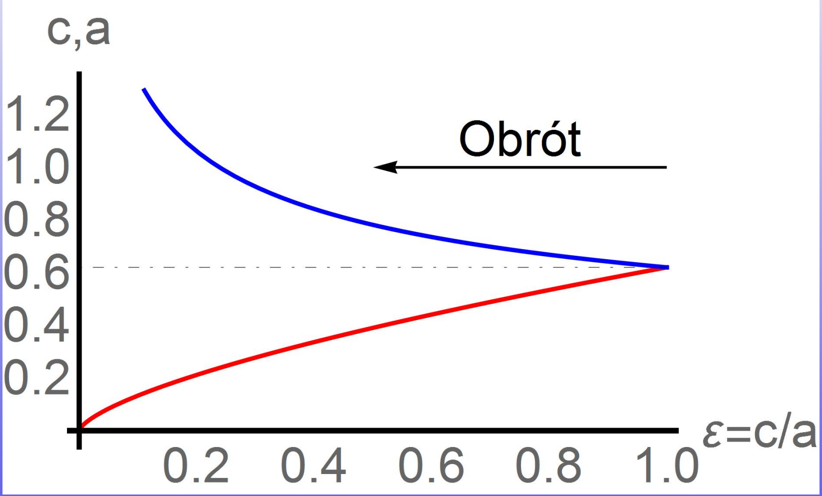
nazywamy *elipsoidą Maclaurina*. Oznaczając spłaszczenie przez $\varepsilon = c/a$ otrzymujemy:

$$\chi = \frac{\varepsilon\left(2\varepsilon^2+1\right) arccos\,\varepsilon - 3\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

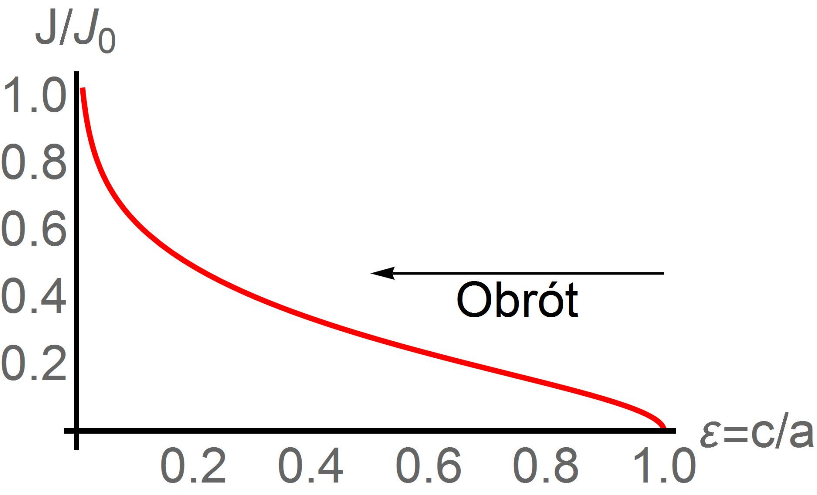
Elipsoida Maclaurina: Ω, wymiary, moment pędu



Elipsoida Maclaurina: Ω, wymiary, moment pędu



Elipsoida Maclaurina: Ω, wymiary, moment pędu



Elipsoida Maclaurina: podsumowanie

Elipsoidy Maclaurina tworzą ciąg obracających się elipsoid **obrotowych** o stale rosnącym **momencie pędu** J.

- dla $J = 0$ figurą równowagi jest kula
- dla $J < J_c$ prędkość kątowa elipsoidy rośnie, i ulega ona spłaszczeniu
- dla $J = J_c$ elipsoida Maclaurina osiąga maksymalną możliwą prędkość kątową (dla Ziemi, $\rho \simeq 5$ g/cc, $T_{obr} \simeq 15$ minut)

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} \simeq 0.22, \quad \varepsilon \simeq 0.36767$$

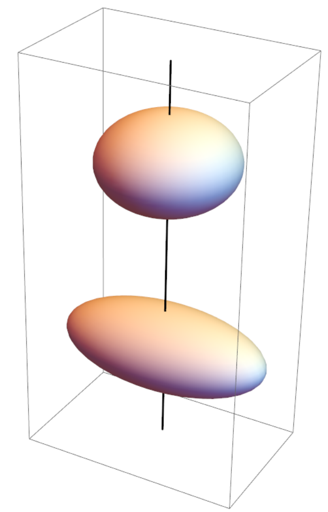
- dalsze zwiększanie momentu pędu powoduje jeszcze większe spłaszczenie, ale od tego miejsca prędkość kątowa Ω **maleje**
- dla $J \to \infty$ elipsoida Maclaurina degeneruje się do nieskończenie cienkiego „placka” który praktycznie pozostaje w spoczynku

Elipsoida Jacobiego

Zanim jeszcze elipsoida Maclaurina osiągnie maksymalną prędkość kątową dochodzi do *bifurkacji* (spontanicznego złamania symetrii) w kierunku trójosiowej *elipsoidy Jacobiego*.

Powyżej punktu bifurkacji istnieją 2 rozwiązania o tym samym momencie pędu.

Ciekawa wizualizacja bifurkacji: [YouTube]



Limity stabilności rotacyjnej

Używa się kilku miar stopnia rotacji układów samograwitujących:

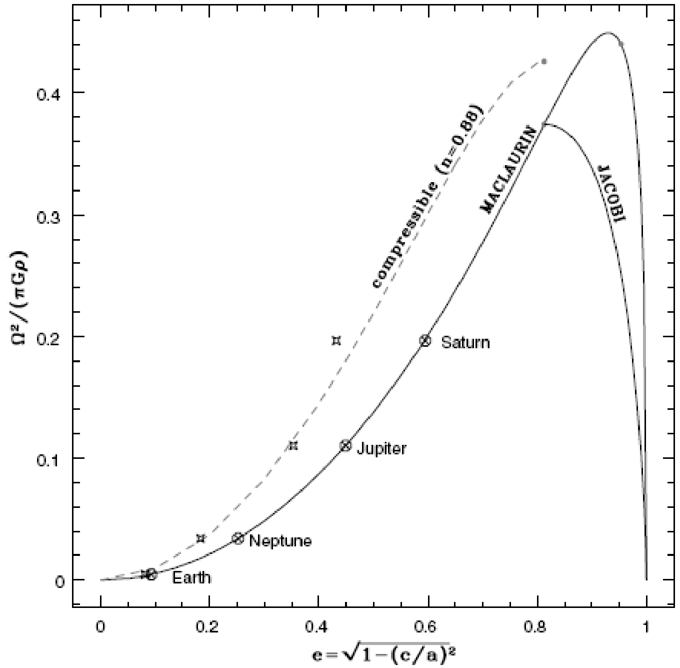
- bezwymiarowa prędkość kątowa

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho}$$

- moment pędu J
- stosunek rotacyjnej energii kinetycznej E_k do grawitacyjnej energii wiązania E_g

$$\beta = \frac{E_k}{|E_g|}$$

Z twierdzenia wirialnego $0 \leqslant \beta < 0.5$. Punkt bifurkacji do elipsoidy Jacobiego pojawia się dla $\chi = 0.187, \beta = 0.1375$, niestabilność dynamiczna elipsoidy Jacobiego $\beta \simeq 0.16$, Maclaurina $\beta \simeq 0.27$.



compressible (n=0.88)
MACLAURIN
JACOBI
Saturn
Jupiter
Neptune
Earth
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Ω²/(πGρ)
e=√1−(c/a)²

Analogia z modelem kroplowym jąder atomowych

Warto przy okazji wspomnieć o równolegle rozwijanej analogicznej teorii rotującej cieczy z napięciem powierzchniowym.

- motywacją model kroplowy jądra atomowego
- odpychanie elektrostatyczne zamiast przyciągania
- napięcie powierzchniowe daje energię wiązania

Przyrównując energię napięcia powierzchniowego do grawitacyjnej dla jednorodnej kuli mamy

$$4\pi R^2\sigma = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \quad \to \quad M = \frac{5\sigma}{G\rho}$$

Dla wody napięcie powierzchniowe $\sigma \simeq 0.072 N/m$ co daje przewagę sił samograwitacji już dla $M > 1000$ ton ($R > 10$ metrów). Dla materii jądrowej $\sigma \sim 1.25$ MeV/fm^2, czyli $M > 10^{10}$ kg (masa małej asteroidy).

Elipsoida Dedekinda (Riemanna, Dirichleta)

Pole prędkości $\mathbf{v}$ (v_x, v_y, v_z): $v_x = -q\,\zeta\, y$, $v_y = (1-q)\,\zeta\, x$, $v_z = 0$,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \zeta\, \mathbf{e}_z$$

Z równania elipsoidy wynika wektor normalny

$$G(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = \nabla G = (2\,x/a^2, 2\,y/b^2, 2\,z/c^2)$$

Warunek, że ciecz „nie wypływa” z elipsoidy, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$, daje

$$q = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \qquad 1-q = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy”– linii prądu:

$$\begin{aligned} v_x &= \tfrac{dx}{dt} &= &-q\,\zeta\, y \\ v_y &= \tfrac{dy}{dt} &= &(1-q)\,\zeta\, x \end{aligned}$$

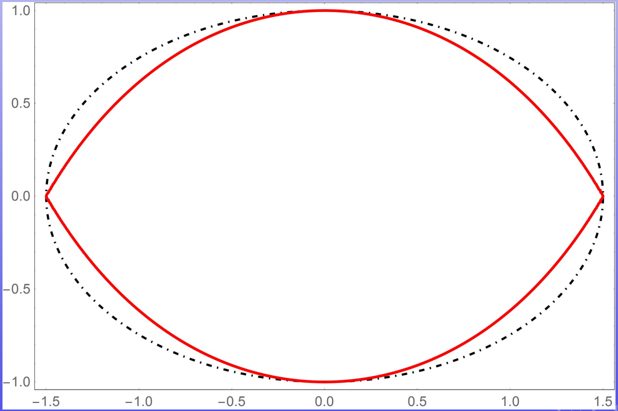
Podstawienie $x = A\, e^{i\Omega t}$, $\qquad y = B\, e^{i\Omega t}$ daje związek pomiędzy wirowością ζ `elipsoidy Dedekinda` a prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega}$ *elipsoidy Jacobiego*

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q\,\zeta \\ (1-q)\,\zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \qquad \zeta = \frac{a^2+b^2}{a\,b}\,\Omega$$

Model Roche'a

Zakładając, że cała masa rotującego obiektu jest skupiona w centrum, otrzymujemy równanie powierzchni:

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = const = \frac{GM}{R_p}$$



Fragmentacja kolapsujących obiektów

Scieżka Maclaurina

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzą na:
  - - ścieżkę Roche'a
  - - ścieżkę Maclaurina

Scieżka Roche'a

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro lub obiekty dysku wchodzą na:
  - - ścieżkę Roche'a
  - - ścieżkę Maclaurina

Rotacja różniczkowa

Równania Eulera

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla P} + \vec{g} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1b}$$

- interesują nas rozwiązania, dla których prędkość $\vec{v}$ jest funkcją wyłącznie współrzędnych (nie zależy od czasu)

Pochodna substancjonalna (operator $v\vec{\nabla}$)

$$\frac{d\vec{v}(t, x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v}$$

Równanie „Bernouliego” (Gromeki-Lamba)

Korzystając z tożsamości

$$(v\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

równanie Eulera w przypadku stacjonarnym można przepisać jako:

$$\nabla(h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Jeżeli wyraz po prawej jest równy zeru lub jest gradientem pewnej funkcji, otrzymujemy **równanie Bernouliego**

$$h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2 = const.$$

„Czysta rotacja”

Jednym z przypadków, kiedy można wprowadzić równanie Bernouliego jest tzw. „czysta rotacja”:

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z) r \; \vec{e}_\phi.$$

W ogólności stacjonarne pole prędkości $\vec{v}$ musi spełniać równanie

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})) = 0.$$

Podstawienie czystej rotacji do powyższego równania daje:

$$2r\Omega(r, z) \frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} = 0.$$

Przykład pola prędkości, które **nie jest** rotacją, a spełnia powyższe równanie, znajdujemy w elipsoidach Dedekinda.

Twierdzenie Poincare-Wavre

Grawitacja powierzchniowa (ang. effective gravity) **G** to suma natężenia pola grawitacyjnego $\vec{g}$ i przyspieszenia odśrodkowego

$$\vec{G} = \vec{g} + r\,\Omega(r,z)^2\,\vec{e}_r. \tag{2}$$

Dla samograwitującego ciała w stanie stacjonarnym o czystej rotacji poniższe zdania są równoważne:

(i) *Rotacja jest cylindryczna:* $\Omega = \Omega(r)$.

(ii) *Powierzchnie* $\rho = const$ *and* $p = const$ *pokrywają się.*

(iii) *Grawitacja powierzchniowa* $\vec{G}$ *ma potencjał*

(iv) *Wektor* $\vec{G}$ *jest prostopadły do izobar* $P = const$ *(w szczególności do powierzchni* $P = \rho = 0$ *).*

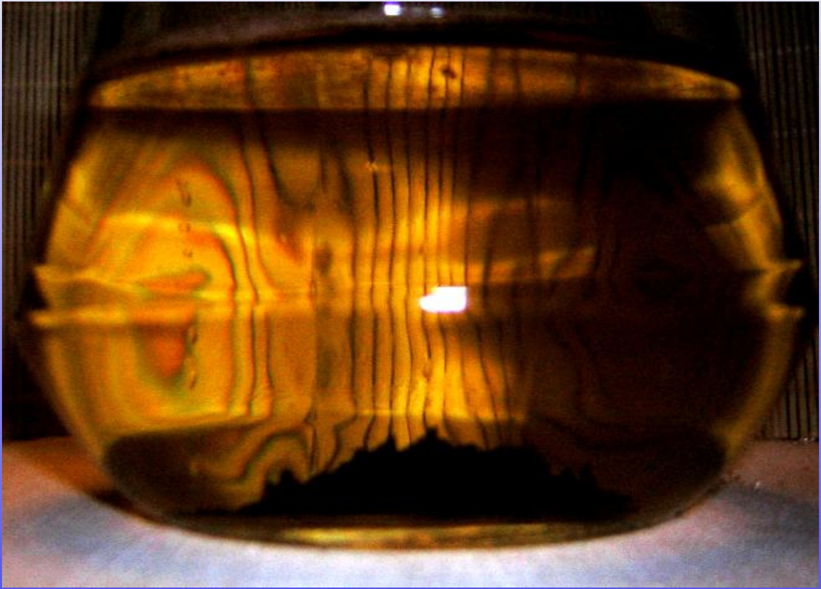
Obiekt spełniający powyższe założenia nazywamy *barotropą*. Spełnia ona równanie

$$h(r,z) + \Phi_g + \Phi_c = C,$$

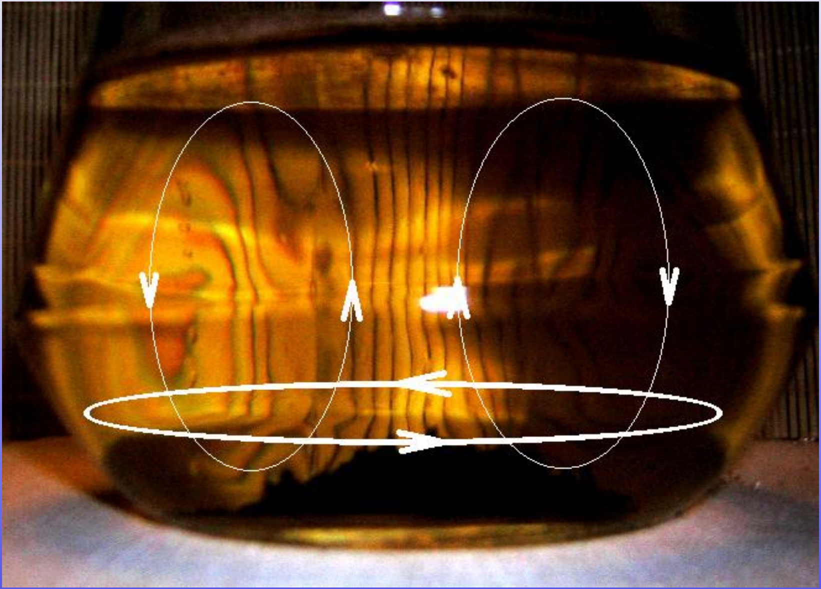
gdzie $\Phi_g = \int \Omega^2 r dr$ to *potencjał odśrodkowy*.

Cyrkulacja południkowa

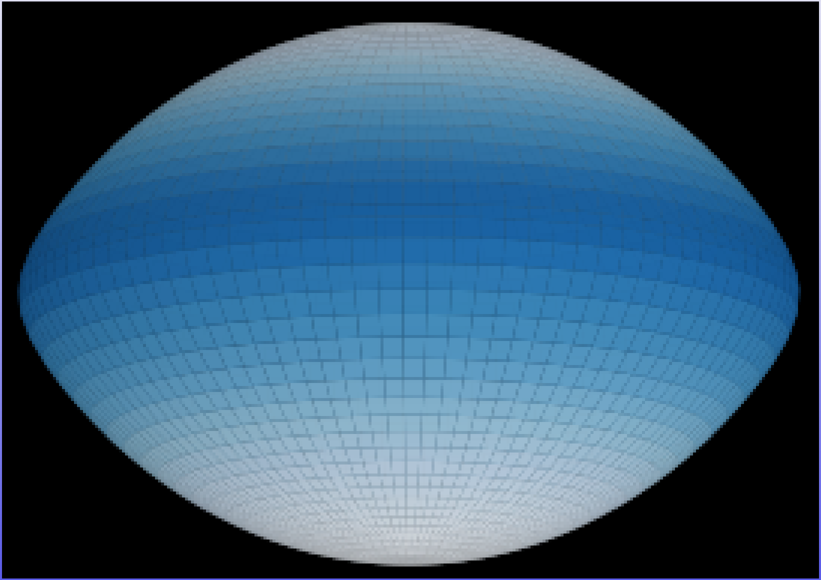
Cyrkulacja południkowa



Cyrkulacja południkowa



Cyrkulacja południkowa



Paradoks von Zeipela, rotacja 1D

Dołączenie do opisu równowagi hydrostacjonarnej barotropy, równania na transport energii daje układ równań który jest sprzeczny. Sytuację określamy jako *paradoks von Zeipela*. Sytuacja ta jest powszechnie ignorowana w astrofizyce, i modelowanie rotujących „gwiazd" rozbija się na 2 kategorie:

- rotujące barotropy z $\Omega = \Omega(r)$, które są w równowadze hydrostatycznej, ale nie termicznej
- obiekty z rotacją powłokową (ang: shellular rotation, 1D) z $\Omega = \Omega(m) \equiv \Omega(\sqrt{r^2 + z^2})$, które nie są w równowadze mechanicznej, ale są w równowadze termicznej

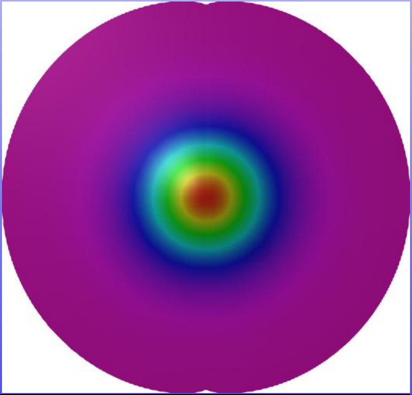
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



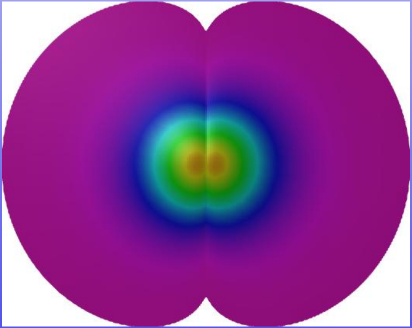
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r,z) = h_0(\sqrt{r^2+z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



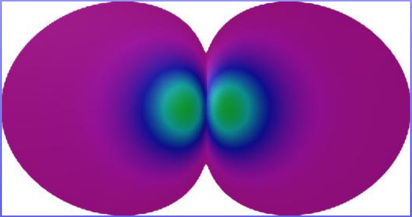
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r,z) = h_0(\sqrt{r^2+z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



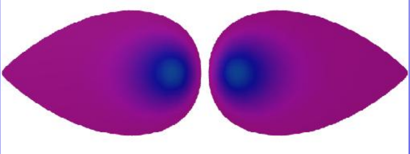
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



Obiekty zbudowane z milionów ciał: gromady kuliste, galaktyki

Gromady kuliste gwiazd

Sztandarowym przykładem astrofizycznego obiektu zbudowanego z $N \sim 10^4 \ldots 10^6$ gwiazd jest gromada kulista gwiazd.

Energia wiązania gromady vs ciasny układ podwójny

Pouczające jest porównanie energii wiązania grawitacyjnego:

- „gromady kulistej” ($M \simeq 10^5 M_\odot$, $R \simeq 10$ pc)

$$E_g \sim \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \simeq 5 \times 10^{42}\ J$$

- układu podwójnego pary białych karłów o masie $M = 1.44 M_\odot$ w odległości Ziemia-Księżyc $R \simeq 384400$ km

$$E_g \sim \frac{GM^2}{R} \simeq 1.5 \times 10^{42}\ J$$

Wystarczy kilka bliskich spotkań zwartych 3 ciał, aby wprowadzić do układu energię kinetyczną wystarczającą do odparowania całej gromady!

Sfera Plummera

Model sferycznej gromady kulistej o gęstości

$$\rho(r) = \rho_C \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}^5}, \quad \rho_C = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

odpowiadającej funkcji Lane-Emdena z $n = 5$
$w_5(z) = 1/\sqrt{1+z^2/3}$.
Rozkład prawdopodobieństwa znalezienia w położeniu $\vec{r}$ jednej z identycznych gwiazd o masie m i prędkości $\vec{v}$ ma postać:

$$f(\vec{r},\vec{v})\, d^3\vec{r} d^3\vec{v} = f(E)\, 4\pi r^2 dr\, 4\pi v^2 dv, \quad E = E(r,v)$$

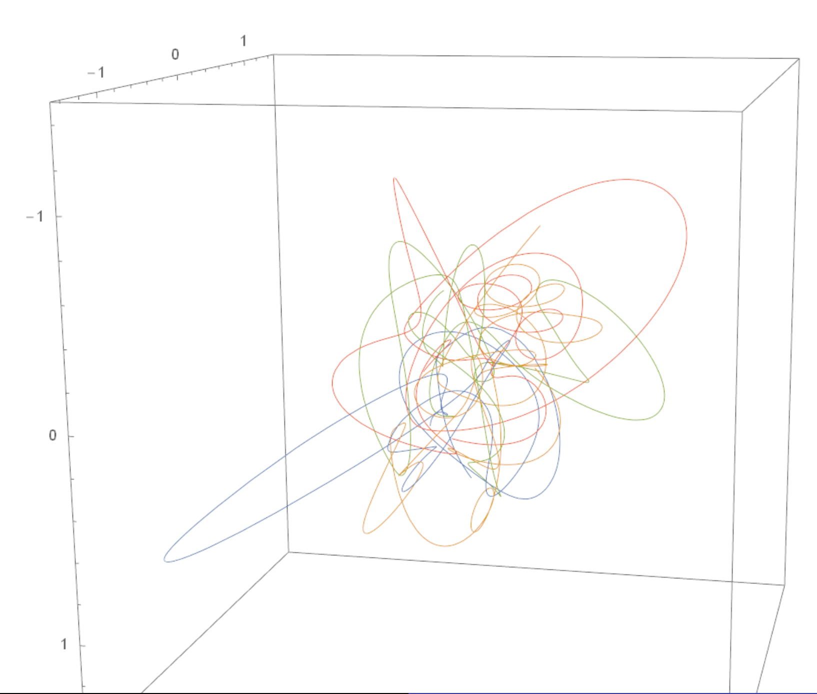
$$f(E) = \frac{24\sqrt{2}}{7\pi^3} \frac{a^2}{G^5 M^4} (-E/m)^{7/2}$$

Symulacja N-ciałowa sfery Plummera

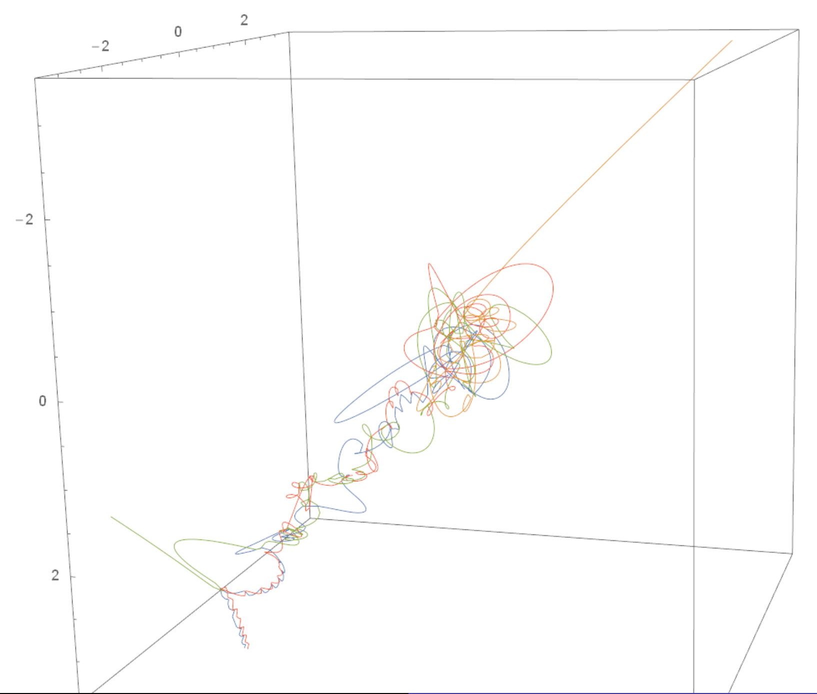
1. dysponując rozkładem gęstości i rozkładem prawdopodobieństwa w przestrzeni fazowej możemy wylosować warunki początkowe odpowiadające sferze Plummera
2. korygujemy współrzędne środka masy i całkowity pęd, tak aby wynosiły zero
3. skalujemy współrzędne i prędkość tak, aby dokładnie było spełnione twierdzenie wirialne $2E_{kin} = |E_{pot}|$
4. uruchamiamy symulację N-body i obserwujemy

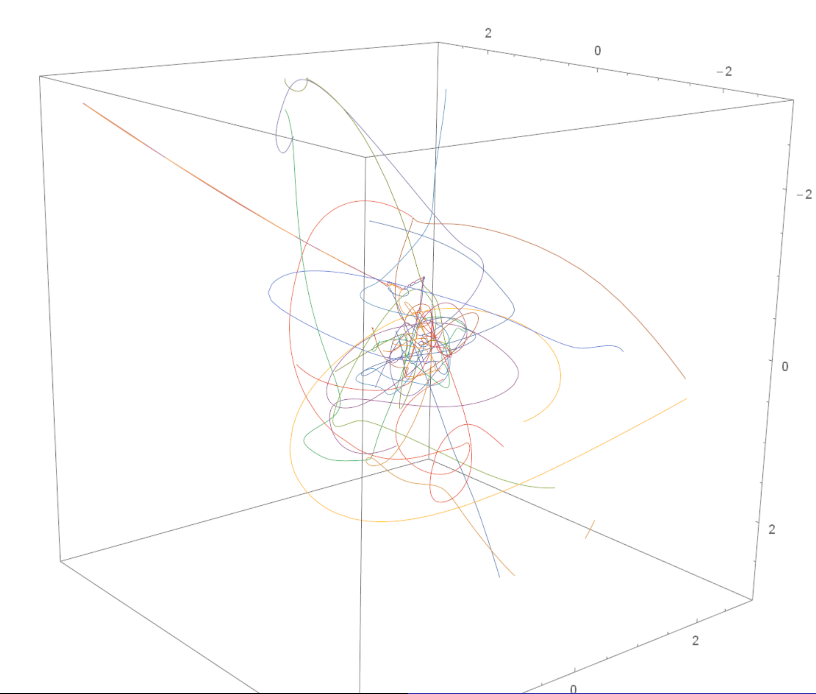
Najważniejsze zaobserwowane zjawiska to:

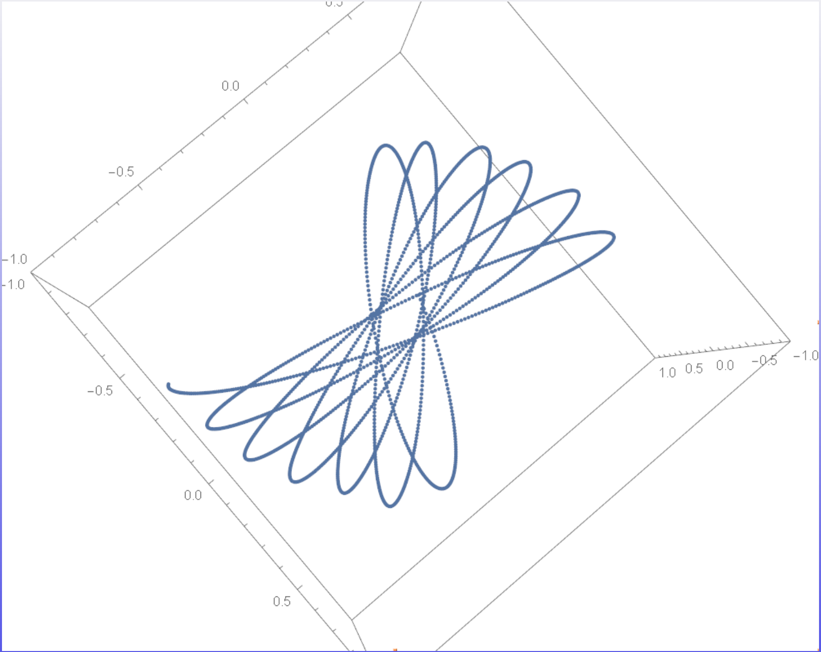
- dla $N \to \infty$ prawdopodobieństwo oddziaływania spada do zera, pojedyncza cząstka porusza się w uśrednionym polu pozostałych
- **parowanie:** oddziaływania trójciałowe wytwarzają cząstki o prędkościach przekraczających prędkość ucieczki v_{II}
- **segregacja masy**: gwiazdy cięższe/gęstsze dyfundują do centrum
- **kolaps jądra** (ang. core-collapse): w centrum $\rho \to \infty$ (nie wiadomo czy w tym procesie powstaje czarna dziura, tzw. IMBH)
- zacieśniające się układy podwójne są źródłem energii „termicznej” dla całej gromady, co powoduje zatrzymanie kolapsu i tzw. oscylacje grawitotermiczne
- opór dynamiczny („falowy”)

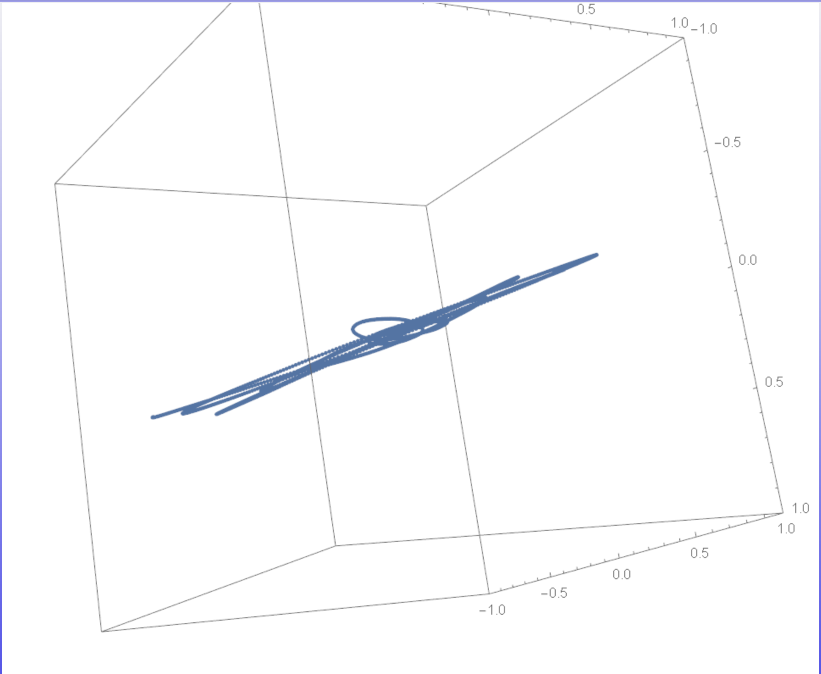


-1
0
1
-1
0
1


-2
0
2
-2
0
2


2
0
−2
−2
0
2
2
0


0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0


0.5
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0

Zmiękczanie siły newtonowskiej

Z powodów praktycznych (dzielenie przez zero) jak i fizycznych (skończone rozmiary gwiazd) w symulacjach N-ciałowych stosuje się powszechnie „zmiękczanie" siły newtonowskiej:

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \to \vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + \varepsilon^2}^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Parametr ϵ na sens najmniejszej dopuszczalnej odległości pomiędzy gwiazdami.
W realistycznych symulacjach musimy wziąć pod uwagę nie tylko rozmiary, ale także ewolucję gwiazd oraz ich nieuniknione zderzenia.