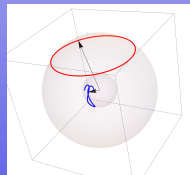
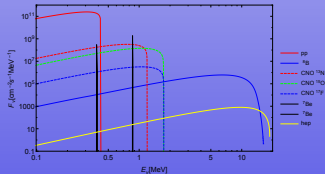
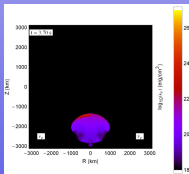


# Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

4 czerwca 2019



# Układy planetarne

- Wielki Wybuch: H, He, D, T, Li
- Gwiazdy III populacji: C,N,O
- białe karły: He, C/O, O/Ne/Mg
- supernowe termojądrowe: C/O → „Fe”
- supernowe implozyjne → gwiazdy neutronowe
- złączenia gwiazd neutronowych → Au, U, W, ...

Nowe pierwiastki „zrewolucjonizowały” kosmiczną scenę! Powstały m.in. planety skaliste, asteroidy, komety, lód/woda, związki organiczne, pył a także nowe źródła energii: promieniotwórczość, przemiany chemiczne, pływy, zderzenia.

# Układy pozasłoneczne vs Układ Słoneczny

Przez setki lat teorie dotyczące układów planetarnych cierpiały z istotnego powodu:

- Liczba znanych układów planetarnych  $N = 1$
- Obecnie  $N > 4000$  i stale rośnie

Na dzień dzisiejszy katalog egzoplanet <http://exoplanet.eu/catalog/> obejmuje:

- 3043 (2834 w 2018, 1195 w 2015) układów planetarnych
- 4071 (3786 w 2018, 1897 w 2015) planet
- 659 (629 w 2018, 487 w 2015) układów z więcej niż jedną planetą

Kepler Orrery IV

Przez setki lat teorie dotyczące układów planetarnych cierpiały z istotnego powodu:

- Liczba znanych układów planetarnych  $N = 1$
- Obecnie  $N > 4000$  i stale rośnie

Na dzień dzisiejszy katalog exoplanet <http://exoplanet.eu/catalog/> obejmuje:

- 3043 (2834 w 2018, 1195 w 2015) układów planetarnych
- 4071 (3786 w 2018, 1897 w 2015) planet
- 659 (629 w 2018, 487 w 2015) układów z więcej niż jedną planetą

Kepler Orrery IV

- Układ składa się z 4 planet skalistych  $0.4R_{\oplus} < R < R_{\oplus}$  wewnątrz oraz 4 gazowych gigantów  $3.9R_{\oplus} < R < 11.2R_{\oplus}$
- orbity są prawie kołowe  $0.007 < e < 0.12$ ,  $\bar{e} = 0.06$
- orbity są prawie w jednej płaszczyźnie  $0.33^{\circ} < i < 6.3^{\circ}$
- moment pędu Słońca jest bardzo mały  $J_{\odot} \simeq 0.005J_{\text{tot}}$
- równik Słońca jest nachylony pod małym kątem  $\alpha = 6^{\circ}$  do płaszczyzny niezmienniczej Laplace'a
- rozmiary orbit spełniają w przybliżeniu regułę Titiusa-Bodego

Hipotetyczny (fikcyjny) układ planetarny najbliższej gwiazdy, Alfy Centaura:

$\alpha$  Cen — najjaśniejsza gwiazda w gwiazdozborze Centaura

$\alpha$  Cen tworzy układ podwójny:

$\alpha$  Cen A +  $\alpha$  Cen B

Zakładamy, że  $\alpha$  Cen B ma układ planetarny:

- 1  $\alpha$  Cen Ba  $\equiv$   $\alpha$  Cen B — gwiazda centralna
- 2  $\alpha$  Cen Bb — pierwsza **odkryta** planeta
- 3  $\alpha$  Cen Bc — druga **odkryta** planeta
- 4 itd.



Table 1. Planet occurrence rates around FGK stars

| Study                           | Technique | Period range | Size range            | Occurrence [%]       |
|---------------------------------|-----------|--------------|-----------------------|----------------------|
| Wright et al. (2012)            | RV        | < 10 d       | > 30 $M_{\oplus}$     | $1.20 \pm 0.38$      |
| Mayor et al. (2011)             | RV        | < 11 d       | > 50 $M_{\oplus}$     | $0.89 \pm 0.36$      |
| Cumming et al. (2008)           | RV        | < 5.2 yr     | >100 $M_{\oplus}$     | $8.5 \pm 1.3$        |
|                                 |           | <100 d       | >100 $M_{\oplus}$     | $2.4 \pm 0.7$        |
| Howard et al. (2010)            | RV        | <50 d        | 3–10 $M_{\oplus}$     | $11.8^{+4.3}_{-3.5}$ |
|                                 |           | <50 d        | 10–30 $M_{\oplus}$    | $6.5^{+3.0}_{-2.3}$  |
| Mayor et al. (2011)             | RV        | <50 d        | 3–10 $M_{\oplus}$     | $16.6 \pm 4.4$       |
|                                 |           | <50 d        | 10–30 $M_{\oplus}$    | $11.1 \pm 2.4$       |
|                                 |           | <10 yr       | >50 $M_{\oplus}$      | $13.9 \pm 1.7$       |
| Fressin et al. (2013)           | Transit   | <10 d        | 6–22 $R_{\oplus}$     | $0.43 \pm 0.05$      |
|                                 |           | <85 d        | 0.8–1.25 $R_{\oplus}$ | $16.6 \pm 3.6$       |
|                                 |           | <85 d        | 1.25–2 $R_{\oplus}$   | $20.3 \pm 2.0$       |
|                                 |           | <85 d        | 2–4 $R_{\oplus}$      | $19.9 \pm 1.2$       |
|                                 |           | <85 d        | 1.25–22 $R_{\oplus}$  | $52.3 \pm 4.2$       |
| Petigura, Howard & Marcy (2013) | Transit   | 5–100 d      | 1–2 $R_{\oplus}$      | $26 \pm 3$           |
|                                 |           | 5–100 d      | 8–16 $R_{\oplus}$     | $1.6 \pm 0.4$        |

Table 2. Occurrence rates of “Earth-like planets”

| Type of star | Type of planet       | Approx. HZ boundaries* [ $S/S_{\oplus}$ ] | Occurrence rate [%] | Reference |
|--------------|----------------------|---|---------------------|-----------|
| M            | 1-10 $M_{\oplus}$    | 0.75-2.0                                  | $41^{+54}_{-13}$    | 1         |
| FGK          | 0.8-2.0 $R_{\oplus}$ | 0.3-1.8                                   | $2.8^{+1.9}_{-0.9}$ | 2         |
| FGK          | 0.5-2.0 $R_{\oplus}$ | 0.8-1.8                                   | $34 \pm 14$         | 3         |
| M            | 0.5-1.4 $R_{\oplus}$ | 0.46-1.0                                  | $15^{+13}_{-6}$     | 4         |
| M            | 0.5-1.4 $R_{\oplus}$ | 0.22-0.80                                 | $48^{+12}_{-24}$    | 5         |
| GK           | 1-2 $R_{\oplus}$     | 0.25-4.0                                  | $11 \pm 4$          | 6         |
| FGK          | 1-2 $R_{\oplus}$     | 0.25-4.0 <sup>†</sup>                     | $\sim 0.01$         | 7         |
| FGK          | 1-4 $R_{\oplus}$     | 0.35-1.0                                  | $6.4^{+3.4}_{-1.1}$ | 8         |

# Czego się dowiedzieliśmy?

|  |   |
|--|---|
| Czy Układ Słoneczny jest jedyny w Galaktyce?             | NIE   |
| Ile gwiazd typu Słońca posiada planety?                  | co najmniej 10%                               |
| Czy Ukł. Słoneczny jest typowy?                          | NIE   |
| Czy obecność Jowisza jest typowa                         | TAK, ale $0 < e < 0.9$ , $\bar{e} \simeq 0.2$ |
| Czy pojęcie „ekliptyki” ma sens                          | TAK   |
| Czy występują rezonanse?                                 | TAK, szczególnie pomiędzy gigantami           |
| Czy spin gwiazdy zawsze jest równoległy do krętu układu? | NIE   |

Klasyczna teoria formowania się planet jest aktualnie w kryzysie spowodowanym konfrontacją z danymi obserwacyjnymi egzoplanet.

## Zarys teorii

- 1 obłok otaczający gwiazdę kolapsuje do postaci dysku
- 2 niestabilności powodują uformowanie *planetozymali*
- 3 zderzenia i sklejanie planetozymali powoduje utworzenie jąder planet
- 4 akrecja (gazu lub pyłu, w zależności od tzw. linii śniegu) powoduje wzrost do obecnych rozmiarów
- 5 migracja i rezonanse powodują utrwalenie struktury układu

Wyniki dotyczące układów pozasłonecznych są silnie przekształcone poprzez obserwacyjny **bias**.

| Metoda szukania      | BIAS (preferowane parametry układu)               |
|----------------------|---|
| prędkość radialna    | $M$ - duże, $T, M_*, \Omega_*$ - małe             |
| astrometria          | $a, M, T$ - duże                                  |
| tranzyty (zaćmienia) | $i \simeq \pi/2, R$ - duży, $R_*$ - mały          |
| mikrosoczewkowanie   | pomiar jednorazowy, brak możliwości potwierdzenia |
| bezpośrednie zdjęcia | $R, a$ - duże                                     |

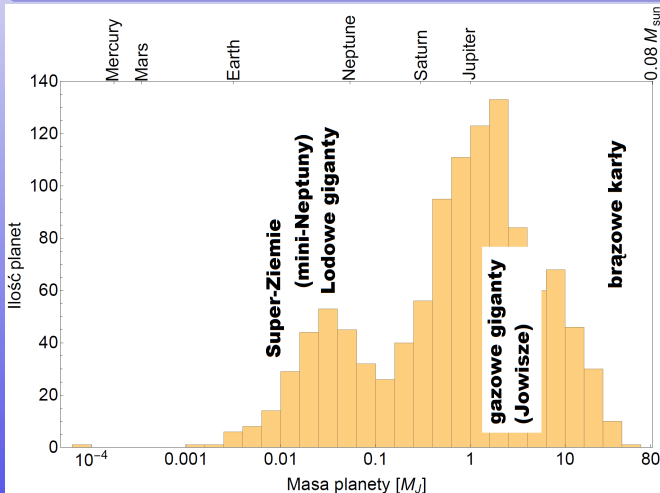
$T$  – okres orbitalny planety,  $a$  – wielka półoś orbity planety,  $M$  – masa planety,  $R$  – promień planety,  $M_*$  – masa gwiazdy,  $\Omega_*$  – prędkość kątowna gwiazdy,  $R_*$  – promień gwiazdy

Najważniejsze bazy danych o egzoplanetach:

- 1 [exoplanets.eu](http://exoplanets.eu)
- 2 [exoplanets.org](http://exoplanets.org)
- 3 [exoplanetarchive.ipac.caltech.edu](http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu)

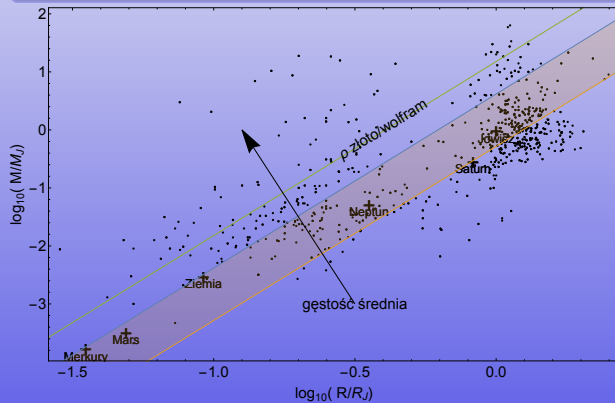
## Układ Słoneczny

$$M_{\odot} \simeq 1000 M_J, \quad M_{\star} \simeq 0.08 M_{\odot} \simeq 80 M_J, \quad M_J \simeq 300 M_{\oplus}$$



## Układ Słoneczny

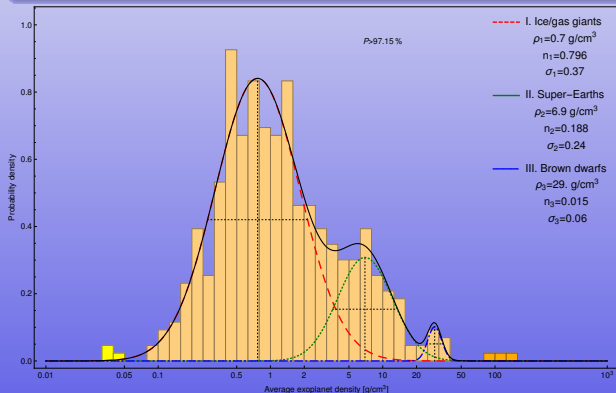
Saturn:  $\bar{\rho} = 687 \text{ kg/m}^3$ , Jowisz:  $\bar{\rho} = 1326 \text{ kg/m}^3$ , Ziemia:  $\bar{\rho} = 5515 \text{ kg/m}^3$



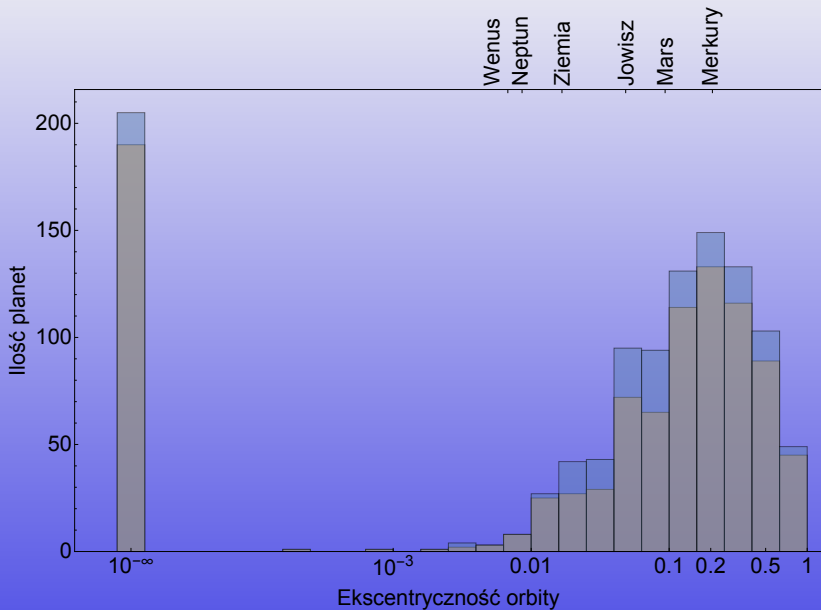


## Układ Słoneczny

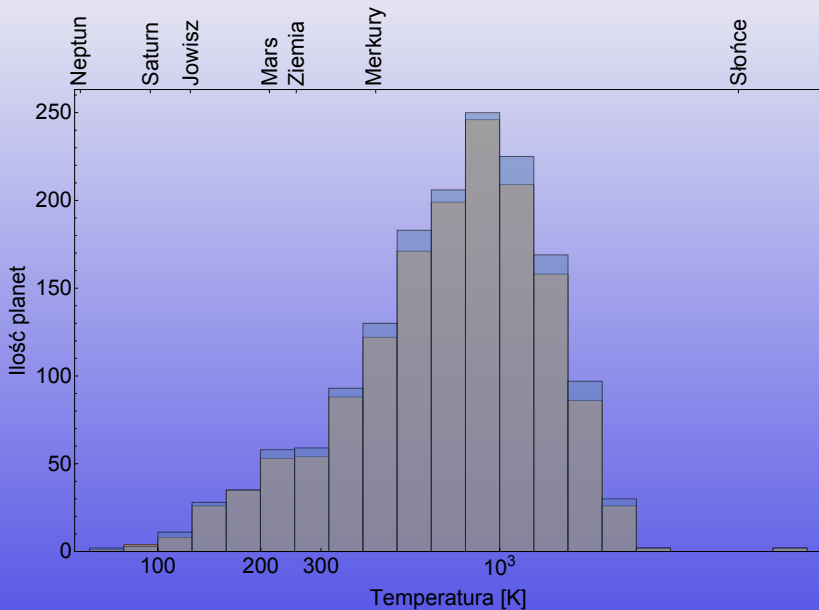
Saturn:  $\bar{\rho} = 687 \text{ kg/m}^3$ , Jowisz:  $\bar{\rho} = 1326 \text{ kg/m}^3$ , Ziemia:  $\bar{\rho} = 5515 \text{ kg/m}^3$



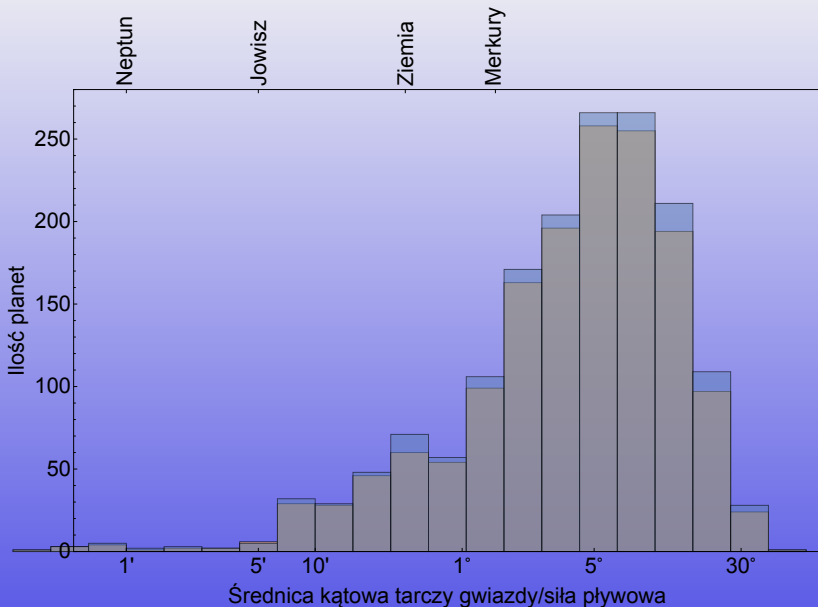
# Układy pozasłoneczne: ekscentryczność orbity



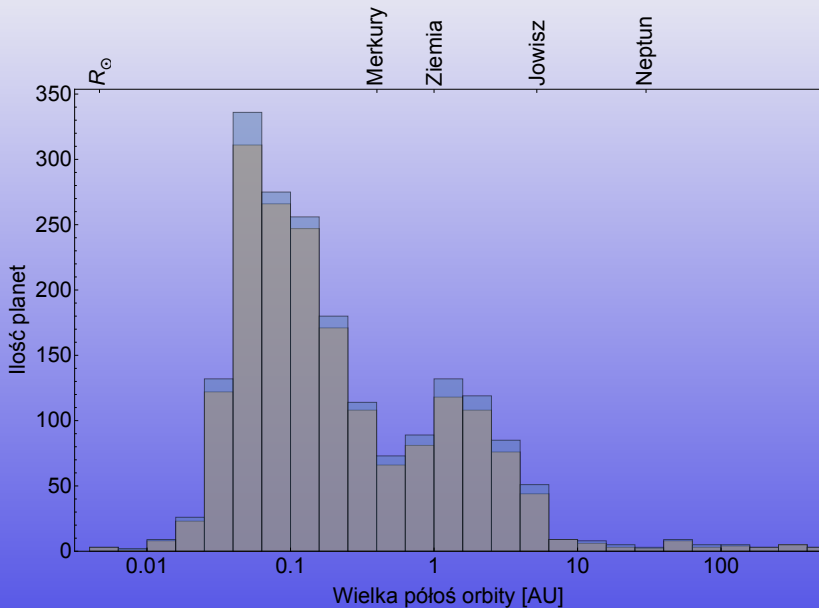
# Układy pozasłoneczne: temperatura efektywna



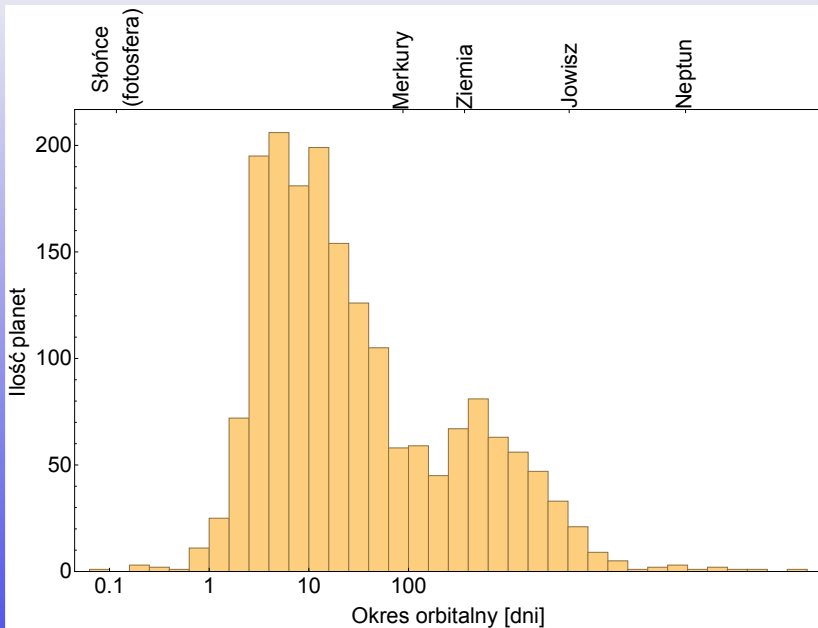
# Układy pozasłoneczne: siły pływowe



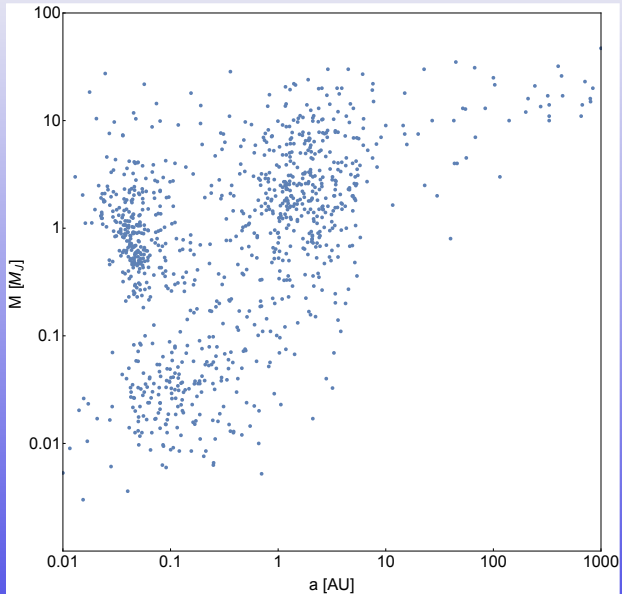
# Układy pozasłoneczne: wielka pólóś



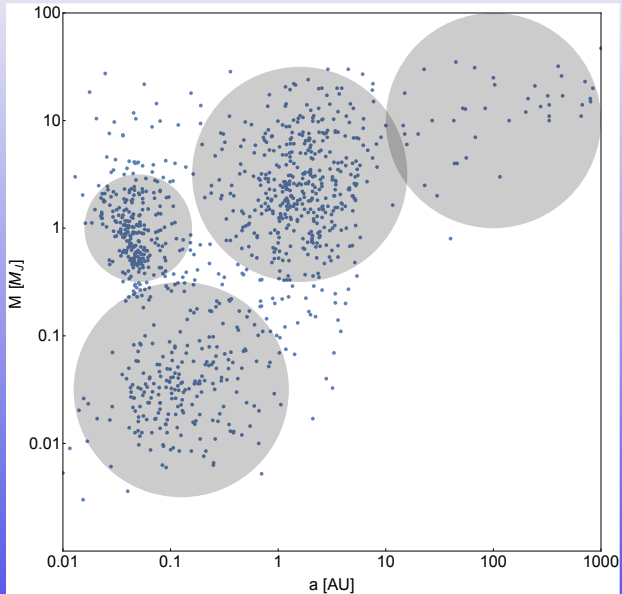
# Układy pozasłoneczne: okres orbitalny



# Układy pozasłoneczne: BIAS

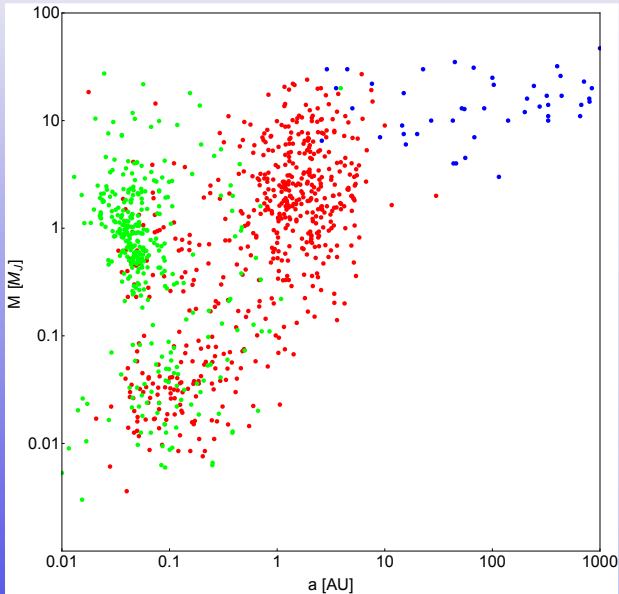


# Układy pozasłoneczne: BIAS

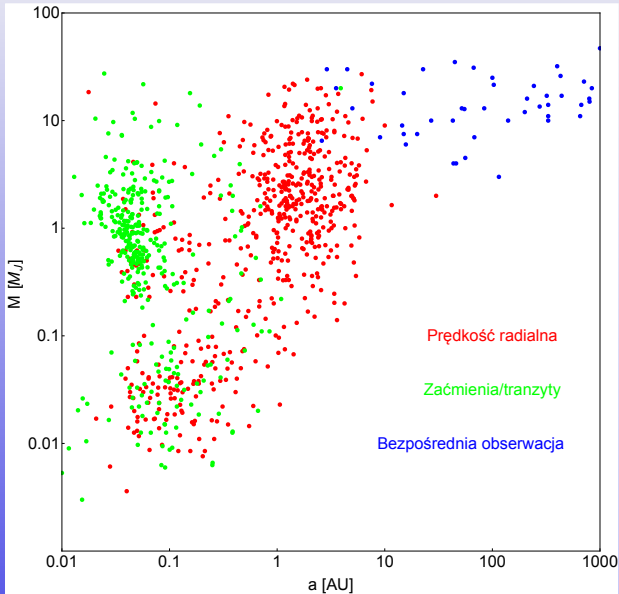




# Układy pozasłoneczne: BIAS



# Układy pozasłoneczne: BIAS



Najnowsze odkrycia na obrzeżach Układu Słonecznego wymusiły doprecyzowanie definicji planety. Wyrzucenie Plutona z grona planet jest symbolem zmiany.

Obecnie rozróżniamy:

- 1 planety [def: (1) na orbicie Słońca (2) kształt sferyczny (3) oczyszczenie orbity ]
  - planety skaliste (Merkury, Wenus, Ziemia, Mars)
  - lodowe olbrzymy (Uran, Neptun)
  - gazowe olbrzymy (Jowisz, Saturn)
- 2 księżyce (Księżyc, Ganimedes, Io, Europa, Tytan, Phoebe ...)
- 3 planety karłowate (Ceres, Pluton, Eris, Makemake, ...)
- 4 małe ciała Układu Słonecznego
- 5 komety

# Zagadnienie 2 i 3 ciał. Rezonanse.

## Prawa Keplera (wersja oryginalna):

- 1 odległość  $r$  planety od Słońca opisuje wzór  $r = p/(1 + e \cos \phi)$
- 2 pole zakreślane przez promień wodzący w jednostce czasu jest stałe
- 3 stosunek trzeciej potęgi „średniej” odległości od Słońca  $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$  do kwadratu okresu jest stały dla każdej z planet.

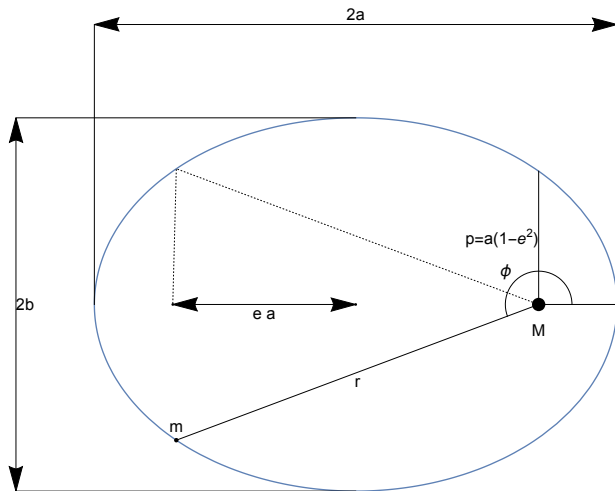
## Prawa Keplera (wersja nowoczesna)

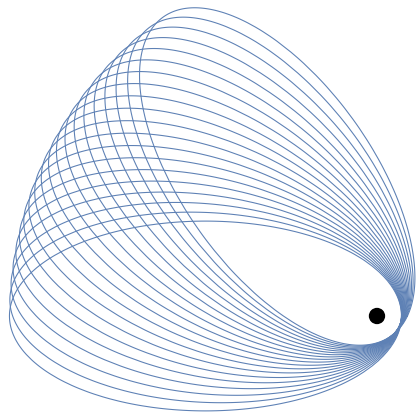
- 1 masa próbna porusza się po krzywej stożkowej: elipsa, parabola lub hiperbola, a masa centralna  $M$  znajduje się w jednym z ognisk
- 2 moment pędu cząstki próbnej jest zachowany

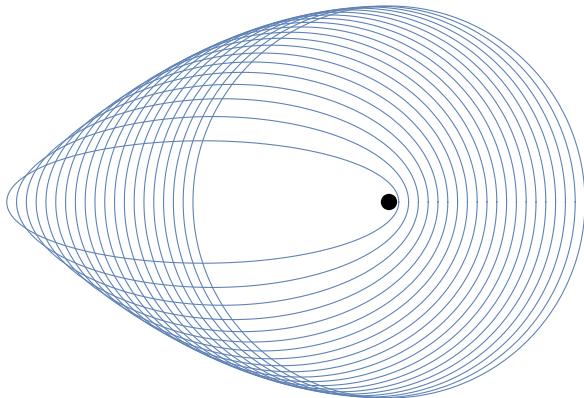
$$mr^2 \dot{\phi} = \text{const} = J$$

3

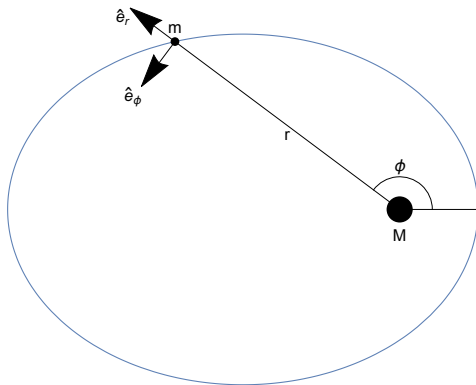
$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const} = \frac{GM}{4\pi^2}, \text{ gdzie } a \text{ to wielka półoś elipsy, } [GM] = \frac{m^3}{s^2}$$

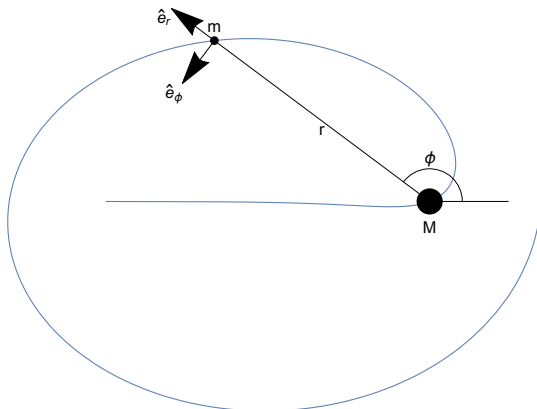




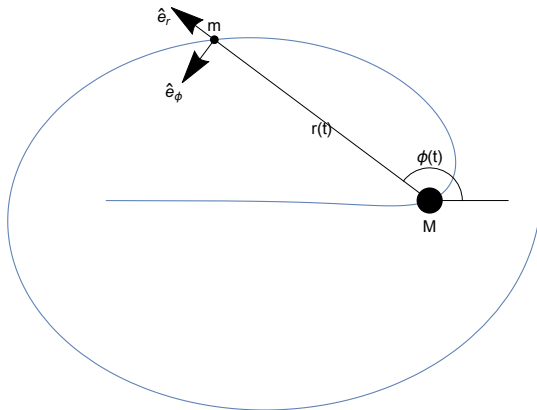








# Wprowadzenie ruchu po elipsie



Równanie toru opisuje kawałkami funkcja:

$$\frac{du(\phi)}{d\phi} = \pm \sqrt{\frac{2mE}{J^2} + \frac{2Gm^2M}{J^2}u - u^2}, \quad u = 1/r$$

W perycentrum i apocentrum  $dr/d\phi = 0$  i trzeba zmieniać znak w równaniu powyżej. Znacznie wygodniejsze jest zróżniczkowanie do postaci  $r$ . oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}.$$

Pokazana procedura prawie bez zmian przenosi się na ruch w ogólnym polu centralnym, w tym nierotujących czarnych dziur.

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

$$a = -\frac{GmM}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2m^3M^2}}$$

Dla dowolnej chwili  $t$ :

$$E = -\frac{GmM}{r(t)} + \frac{1}{2}mv(t)^2, \quad J = mv(t)r(t).$$

Dla ciała związanego (na orbicie eliptycznej)  $E < 0$ . Maksymalny możliwy moment pędu osiągnany jest dla orbity kołowej. Dla  $J = 0$  ciało  $m$  spada po linii prostej wprost na centrum.

- 1 położenie elipsy w przestrzeni, jak każdego ciała sztywnego, wymaga podania 3 współrzędnych
- 2 w astronomii tradycyjnie są to:
  - inklinacja  $i$
  - długość węzła wstępującego  $\Omega$
  - długość perycentrum  $\omega$
- 3 z fizycznego punktu widzenia położenie elipsy wyznaczają wielkości zachowane:
  - wektor momentu pędu  $\mathbf{J}$  (prostopadły do płaszczyzny orbity)
  - wektor Rungego-Lenza  $\mathbf{A}$ , skierowany od ogniska do perycentrum
- 4 położenie w czasie wyznacza moment przejścia przez perycentrum

Celem rachunku perturbacyjnego w mechanice nieba jest wyznaczenie wolnozmiennych funkcji czasu  $a(t)$ ,  $e(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\phi(t)$ , zakładając, że orbita pozostaje eliptyczna.

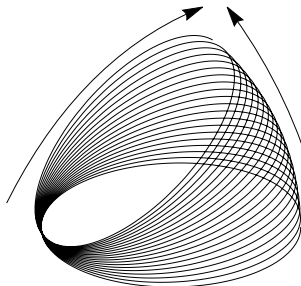
- Przykład 1 : poprawki do  $1/r^2$
- Przykład 2 : ciśnienie promieniowania
- Przykład 3 : ~~ruch dookoła układu podwójnego~~
- Przykład 4 : ~~ruch dookoła układu spłaszczonego~~

Podobne interesujące przykłady można mnożyć.

# Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciążenia zmieniamy  $1/r^2$ :

$$1/r^{1.99}$$



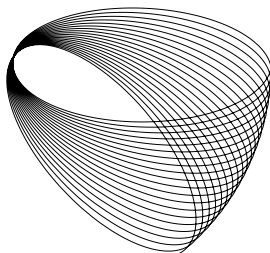
Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.



# Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy  $1/r^2$ :

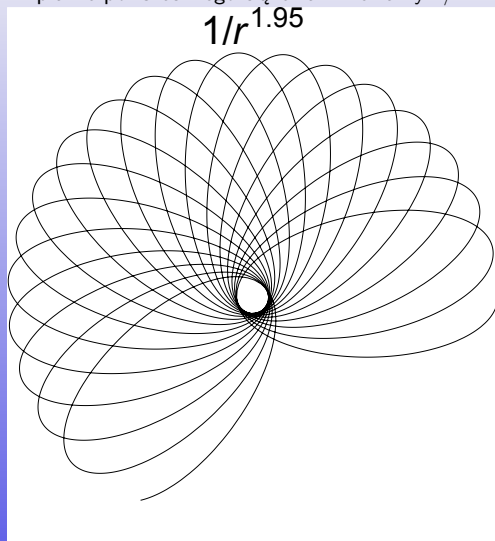
$$1/r^{2.01}$$



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

# Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

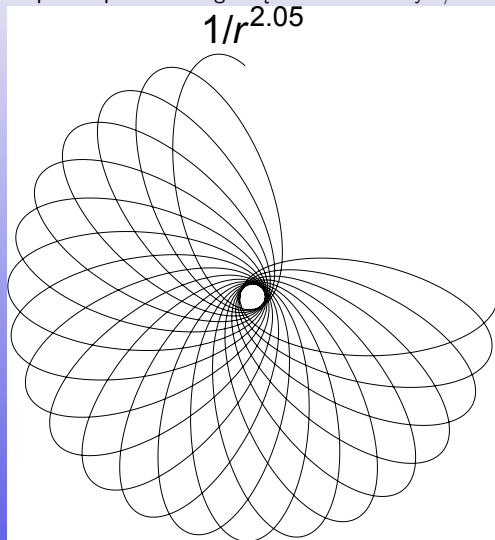
W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy  $1/r^2$ :



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

# Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

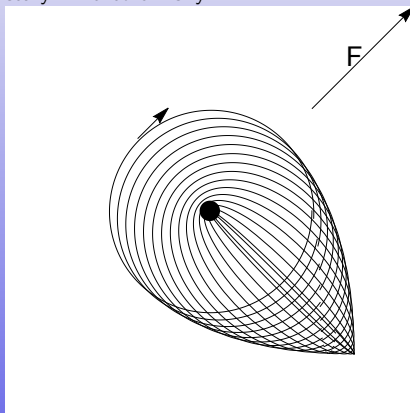
W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy  $1/r^2$ :



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

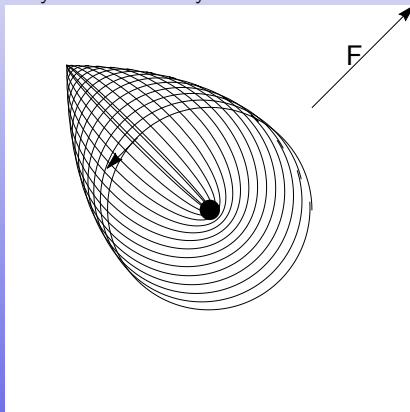
## Zaburzenia orbity: Przykład 2: ciśnienie promieniowania

Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.

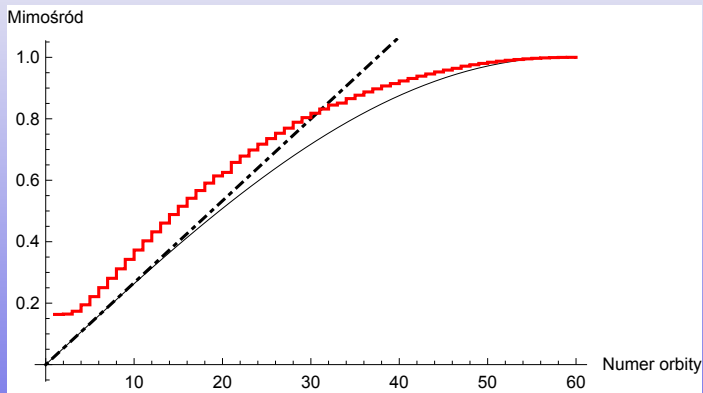


Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.

Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.



Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.



Wg. równania (2.48) z podręcznika Artymowicza:

$$\dot{e} = \frac{3F/m}{2\omega R_0} \sqrt{1 - e^2}, \quad e(t) = \sin\left(\frac{3F/m}{2\omega R_0} t\right)$$

## Czy rozkład materii na zewnątrz wpływa na ruch wewnątrz?

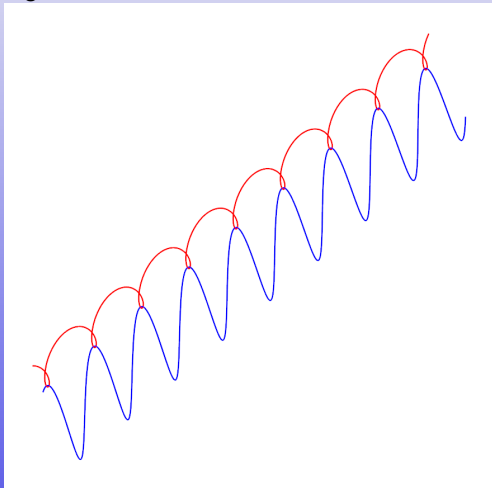
- 1 rozkład gęstości sferycznie symetryczny — NIE
- 2 rozkład gęstości osiowo symetryczny — TAK!
- 3 okrąg/dysk na zewnątrz orbity — TAK!
- 4 ciało orbitujące na na zewnątrz orbity — TAK!
- 5 czy siła pochodząca od zewnętrznego dysku może być odpychająca? — TAK!

$$\phi(r) = -G \int_0^R \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{ŹLE!, tylko w symetrii sferycznej}$$

$$\phi(r) = -G \int_0^\infty \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{DOBRZE!}$$

## 2 ciała: Przykład generycznego ruchu

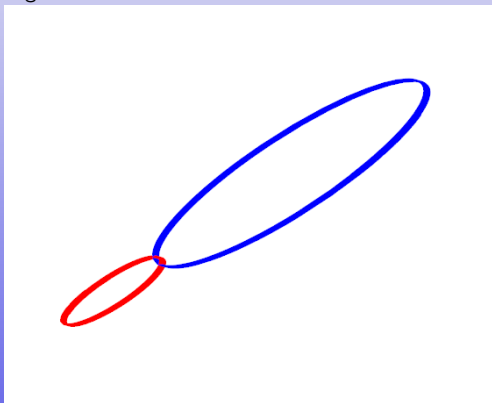
Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.





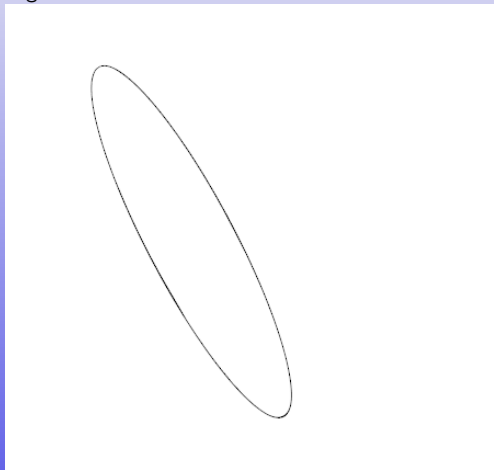
## 2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



## 2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



### Przepis na zamianę/symetryzację wzorów:

- 1 masa ciała centralnego to suma mas składników

$$M \rightarrow m_1 + m_2$$

- 2 masa ciała próbnego to masa zredukowana

$$m \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- 3 wielka półosł elipsy  $a = a_1 + a_2 \rightarrow$  tor ciała 1 **względem** ciała 2

- 4 okres  $T$ , mimośród  $e$ , płaszczyzna orbitalna  $\rightarrow$  bez zmian

- 5 rozmiar elipsy względem środka masy:  $a_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2} a$

- 6 chwilowe położenie ciał względem środka masy opisuje przeskalowana symetria środkowa

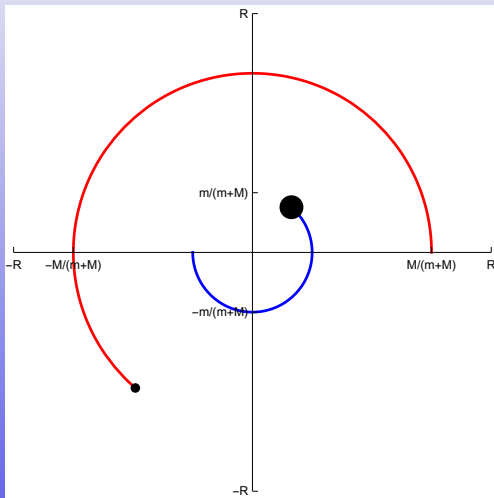
$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2$$

- 7 III prawo Keplera:

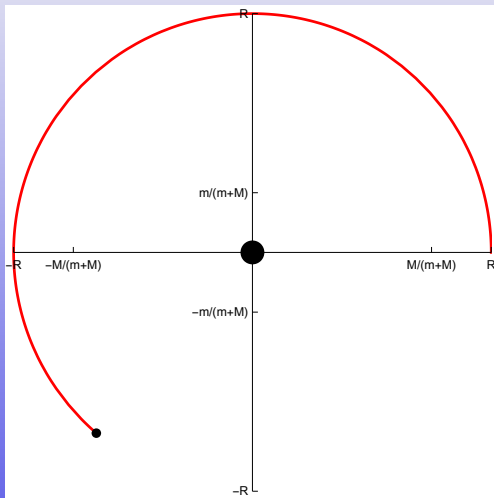
$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

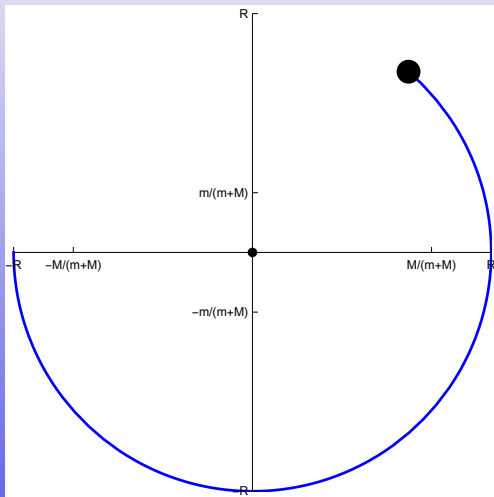
Założenia:

- 1 masy  $m$  oraz  $M$  krążą wokół środka masy po okręgach, czyli ze stałą prędkością kątową
- 2 trzecia masa  $\mu$  jest pomijalnie mała  $\mu \ll m, \mu \ll M$
- 3 ruch odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie orbitalnej mas  $m$  i  $M$
- 4 tradycyjnie, przechodzimy do układu nieinercyjnego w którym masy  $m$  i  $M$  są nieruchome
- 5 przykłady:
  - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_{\oplus}, \mu \rightarrow M_{\mathcal{C}}$
  - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \rightarrow M_{\mathcal{C}}, \mu \rightarrow$  sonda kosmiczna, np: Apollo
  - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_J, \mu \rightarrow$  planetoidy trojańskie
  - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \simeq 500 \text{ kg}, \mu \simeq 0.1 \text{ kg} \rightarrow$  masy orbitalnego eksperymentu mierzącego stałą  $G$



# Szkic sytuacji





$$\mathbf{r}_m = \frac{M}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1a)$$

$$\mathbf{r}_M = -\frac{m}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1b)$$

$$\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3} \quad (1c)$$



Wypisujemy równania Newtona w układzie inercyjnym, zakładając, że pozycje mas  $m$  i  $M$  są zadane z góry.

$$\mu \ddot{x} = -\frac{G\mu m(x - x_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(x - x_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2a)$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{G\mu m(y - y_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(y - y_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2b)$$

$$r_{\mu m} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|, \quad r_{\mu M} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \quad (2c)$$

Dokonujemy zamiany funkcji niewiadomych:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

gdzie  $x(t), y(t)$  – położenie w układzie inercyjnym,  
 $X(t), Y(t)$  – położenie w układzie korotującym.

$$\ddot{X} = \omega^2 X + 2\omega \dot{Y} - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3a)$$

$$\ddot{Y} = \omega^2 Y - 2\omega \dot{X} - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3b)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \omega^2 \mathbf{R} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{R} = \{X(t), Y(t)\} \quad (3c)$$

- $\omega^2 \mathbf{R}$  - przyspieszenie odśrodkowe
- $-2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}$  - przyspieszenie Coriolisa
- $\mathbf{g}$  - przyspieszenie grawitacyjne (natężenie pola grawitacyjnego)

Okazuje się, że powyższy układ równań posiada aż 5 rozwiązań stałych, t.j. opisujących masę próbną spoczywającą w układzie obracającym się. Zakładając, że  $\dot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ , otrzymujemy układ 2 równań algebraicznych:

$$\omega^2 \mathbf{R} + \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

$$\omega^2 X - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4a)$$

$$\omega^2 Y - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4b)$$

Zakładając, że  $Y = 0$  otrzymujemy równanie na punkty leżące na linii łączącej masy  $m$  i  $M$ :

$$\omega^2 X_i = \pm \frac{Gm}{(X_i - R \frac{M}{m+M})^2} \pm \frac{GM}{(X_i + R \frac{m}{m+M})^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Znaki  $\pm$  biorą się z wyrażień typu:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}^3} = \frac{x}{|x|^3} = \frac{1}{x|x|} = \pm \frac{1}{x^2}.$$

- powyższe równanie jasno pokazuje równość sił odśrodkowej i grawitacyjnej
- w postaci nieuproszczonej jest ono bardzo trudne do rozwiązania, nawet z użyciem *Mathematici*
- konieczna redukcja liczby symboli literowych

- 1 podstawienie  $\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3}$  pozwala skrócić  $G$
- 2 zmiana jednostek długości  $X_i = \zeta_i R$  pozwala na pozbycie się  $R$
- 3 wprowadzenie stosunku mas  $q = m/M$  dodatkowo upraszcza równanie

$$\zeta = \frac{(1+q)q}{\pm(1+\zeta+\zeta q)^2} + \frac{1+q}{\pm(\zeta-q+\zeta q)^2}$$

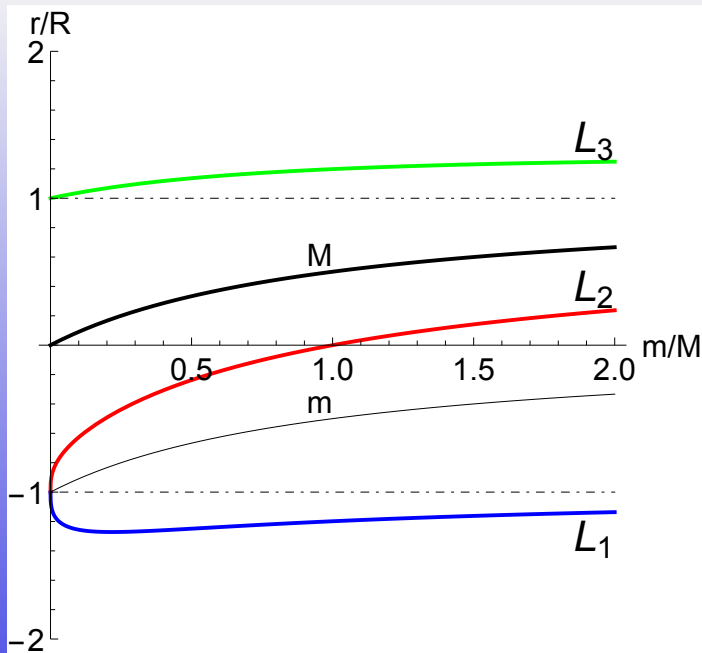
gdzie wyrażenie typu  $\pm x^2$  należy rozumieć jako  $\pm x^2 \equiv x|x| = x^2 \text{sign}(x)$ .

Otrzymaliśmy równanie algebraiczne, równoważne równaniu 5 stopnia z jednym parametrem. Takie zadanie może rozwiązać dla rzeczywistego  $q, \zeta$  algorytm komputerowy ( <http://mathworld.wolfram.com/TarskisTheorem.html> ).

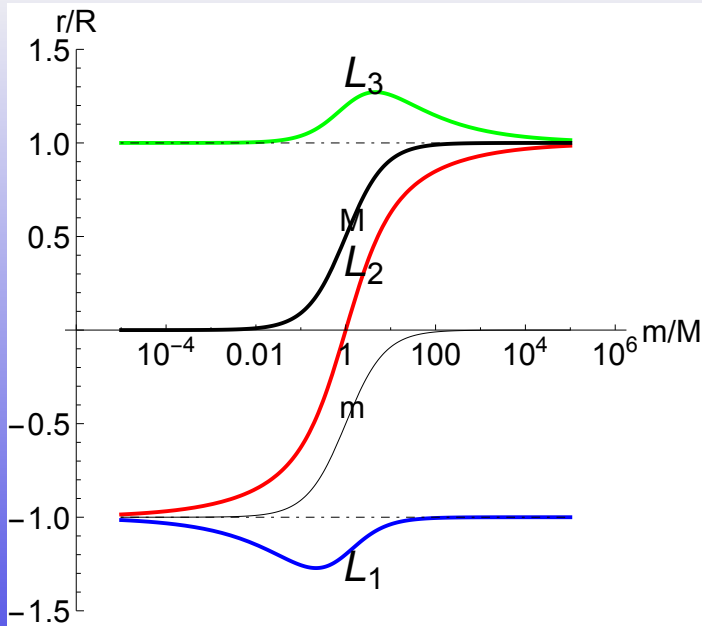
$$\zeta^5(q+1)^4 - 2\zeta^4(q-1)(q+1)^3 + \zeta^3(q+1)^2(q^2 - 4q + 1) - \zeta^2(q^4 - 1) + \zeta(2q^4 + 4q^3 + 5q^2 + 4q + 2) - q^4 - q^3 + q + 1 = 0$$

Rozwiązanie powyższego typu równania nie przedstawia trudności dla programu *Mathematica*. Wynik jest w postaci definiowalnej liczby algebraicznej **Root**.

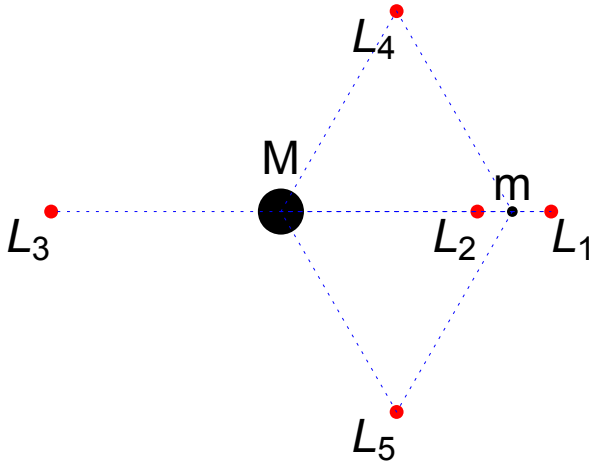
- wynik musi być niezmienniczy na zamianę  $m \leftrightarrow M$ , czyli  $q \rightarrow 1/q$
- pozycje i numeracja punktów  $L_1, L_2, L_3$  odwracają się







$$m/M=81$$



Bardzo ciekawym faktem, jest istnienie dwóch punktów stacjonarnych, tworzących **trójkąt równoboczny** z masami  $m$  i  $M$ .

Znajomość tego faktu pozwala od razu wypisać ich współrzędne:

$$X_{L_{4,5}} = \frac{1}{2} \frac{m - M}{m + M} R, \quad Y_{L_{4,5}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

- fakt ten jest nieintuicyjny
- jeszcze bardziej zaskakuje stabilność pozycji  $L_{4,5}$  przy odpowiednim stosunku mas  $q = m/M$
- powyższe własności mają istotne znaczenie astrofizyczne oraz astronautyczne

$$\ddot{X}\dot{X} = \omega^2 X\dot{X} + 2\omega\dot{Y}\dot{X} + g_X\dot{X} \quad (5a)$$

$$\ddot{Y}\dot{Y} = \omega^2 Y\dot{Y} - 2\omega\dot{X}\dot{Y} + g_Y\dot{Y} \quad (5b)$$

Dodając powyższe równania, skracając wyrazy z przyspieszeniem Coriolisa i całkując po  $t$  otrzymujemy:

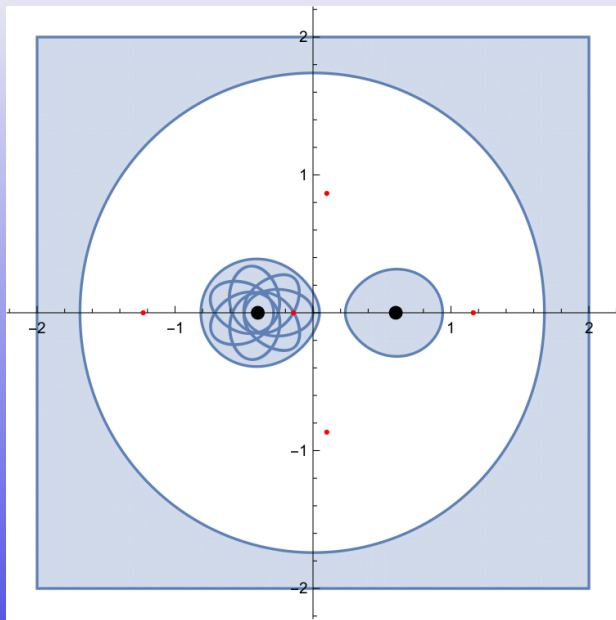
$$\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) - V_g(X, Y) = E$$

Ponieważ energia kinetyczna  $\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$  musi być nieujemna, ruch jest dozwolony tylko w obszarze określonym nierównością:

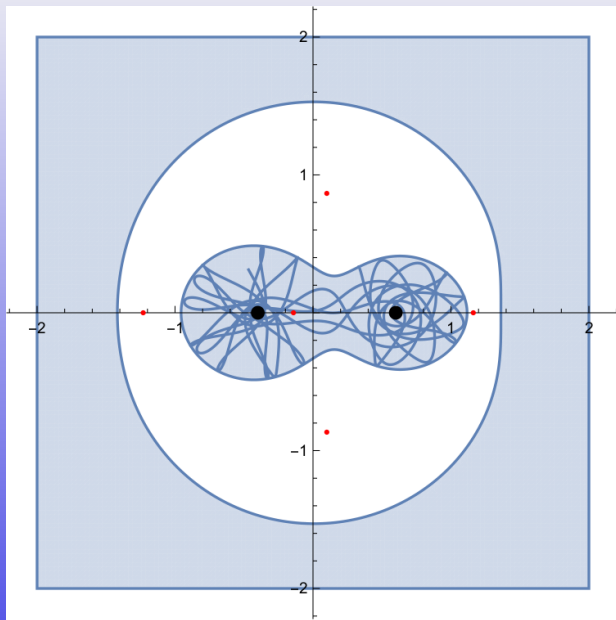
$$\frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) + V_g(X, Y) < E$$

Region Hill'a nigdy nie zostanie opuszczony, ale nie jest wiadome, jaki ruch jest faktycznie możliwy.

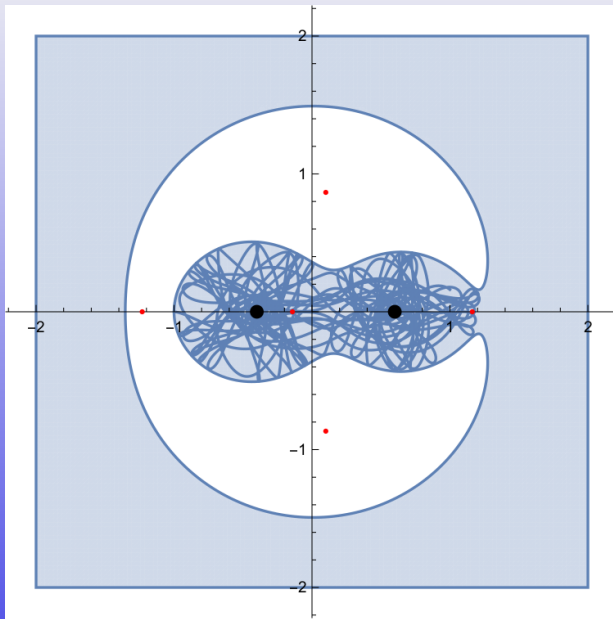
# Ruch w pobliżu mas $m$ i $M$



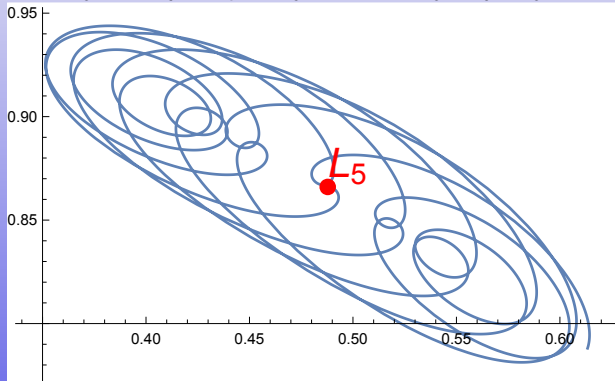
# Ruch w pobliżu mas $m$ i $M$



# Ruch w pobliżu mas $m$ i $M$



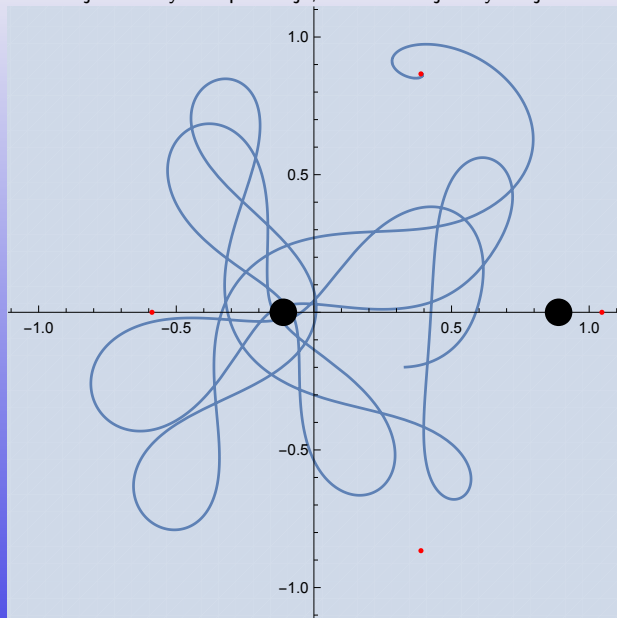
Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.





# Stabilność punktów Lagrange'a: ewidencja numeryczna

Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



W równaniach ruchu podstawiamy:

$$X(t) = \frac{1}{2}R \frac{M-m}{M+m} + \epsilon x(t) \quad (6a)$$

$$Y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}R + \epsilon y(t) \quad (6b)$$

a następnie rozwijamy w szereg potęgowy względem  $\epsilon$ . Interesują nas człony przy  $\epsilon$ , które utworzą układ równań różniczkowych liniowych:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \frac{3}{4}\omega^2x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m-M}{M+m}x = 0 \quad (7a)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \frac{9}{4}\omega^2y + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m-M}{M+m}y = 0 \quad (7b)$$

Stosujemy standardową procedurę dla równań liniowych:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

i otrzymujemy algebraiczny układ równań liniowych:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{3\omega^2}{4} & -2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} \\ 2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} & \lambda^2 - \frac{9\omega^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Wyznacznik macierzy powyżej daje równanie charakterystyczne:

$$\lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4} \frac{G^2 m M}{R^6} = 0.$$

### Definicja niestabilności

Układ jest wykładniczo niestabilny w reżimie liniowym, gdy co najmniej jedna wartość własna posiada część rzeczywistą większą od zera:

$$\exists_{\lambda, \lambda \in \mathbb{C}} \lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4}\omega^2 \frac{mM}{(m+M)^2} = 0 \quad \& \quad \Re(\lambda) > 0$$

- 1 tradycyjnie: liczymy deltę r. dwukwadratowego i sprawdzamy kiedy jest równa zero (do przeliczenia na tablicy lub w domu)
- 2 stosując algorytm **eliminacji kwantyfikatorów**:
  - zapisujemy szczegółowo warunki jakie mają spełniać wartości własne i parametry: czy są rzeczywiste/ zespolone, większe od zera, ile ma ich być, czy mają być różne, itp. itd. za pomocą operacji przynależenia do zbioru, równości i nierówności oraz kwantyfikatorów  $\exists$  i  $\forall$
  - powyższe wymaga staranności i pomysłowości
  - uruchamiamy algorytm: w *Mathematice* jest to **Resolve** (można użyć **Reduce**)
  - uszczegóławiamy wynik ręcznie lub za pomocą **Refine**

Obszar niestabilności:

$$\frac{25M}{2} - \frac{3\sqrt{69}M}{2} < m < \frac{3\sqrt{69}M}{2} + \frac{25M}{2}, \quad \frac{3\sqrt{69}}{2} + \frac{25}{2} \simeq 24.9599$$

Czas narastania niestabilności, tzw. czas Lyapunowa  $\tau$  lub *e-folding time* to odwrotność największej z dodatnich stałych  $\lambda$ . Zależy od tego, jak daleko jesteśmy od punktu krytycznego. W powyższym przypadku  $\lambda$  osiąga maksimum dla  $m = M$ :

$$\lambda_{max} = \omega \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \simeq 0.12 T_{orb}$$

Rzeczywisty czas opuszczenia miejsca niestabilności zależy od tego, jak precyzyjnie ustalimy warunki początkowe. W praktyce szum numeryczny wystarcza aby zapoczątkować narastanie niestabilności.

W przypadku masy punktowej, przyspieszenie grawitacyjne i odśrodkowe równoważą się. W przypadku ciała rozciągniętego:

$$g = \frac{GM}{(d \pm r)^2} \simeq \frac{GM}{d^2} \mp \frac{2GM}{d^3} r$$

$$a = \omega^2(R \pm r) = \frac{GM}{d^2} \pm \frac{GM}{d^3} r$$

Odejmując stronami mamy:

$$a_t = \pm \frac{3GM}{d^3} r$$

Siła pływowa („rozrywająca”) zależy od:

- trzeciej potęgi odległości  $d$  od masy  $M$
- rozmiarów  $r$  ciała poddanego sile pływowej

Rozważmy ciało niebieskie o kształcie kulistym, które na niebie ma rozmiary kątowe  $\alpha$ . Jaka będzie pochodząca od niego siła pływowa?

$$\frac{3GM}{d^3} = \frac{3G \frac{4}{3} \pi (\alpha d/2)^3 \rho}{d^3} = \frac{1}{2} \pi G \rho \alpha^3,$$

gdzie  $\rho$  to średnia gęstość.

Księżyc i Słońce mają te same rozmiary kątowe (zaćmienia!). Ich gęstości średnie to:

- $\bar{\rho}_{\odot} = 1408 \text{ kg/m}^3$
- $\bar{\rho}_{\text{C}} = 3344 \text{ kg/m}^3$

Wniosek: pływy pochodzące od Słońca są (tylko?) dwa razy słabsze niż od Księżycy.

Pytanie: z jakiej odległości podobne pływy wywołuje ludzkie ciało?

W Układzie Słonecznym spotykamy liczne przykłady mniej lub bardziej dokładnych **wymiernych** stosunków:

- 1 1:1 – okres orbitalny planetoid trojańskich i Jowisza w punktach  $L_4, L_5$  układu Jowisz-Słońce
- 2 1:1 – prędkość kątowna obrotu i częstość orbitalna Księżyca
- 3 2:3 – okres orbitalny Ziemi i Wenus
- 4 1:1 – obrót Plutona i Charona
- 5 1:2:4 – okresy orbit Io, Europy i Ganimedesa
- 6 2:3 – okresy Plutona i Neptuna
- 7 3:4 – orbity Hiperiona i Tytana
- 8 3:2 – okres obrotu i orbity Merkurego



Częściowy rezonans 1:1



Ziemia - Księżyc

Pełny rezonans 1:1



Pluton - Charon

Częściowy rezonans 1:1

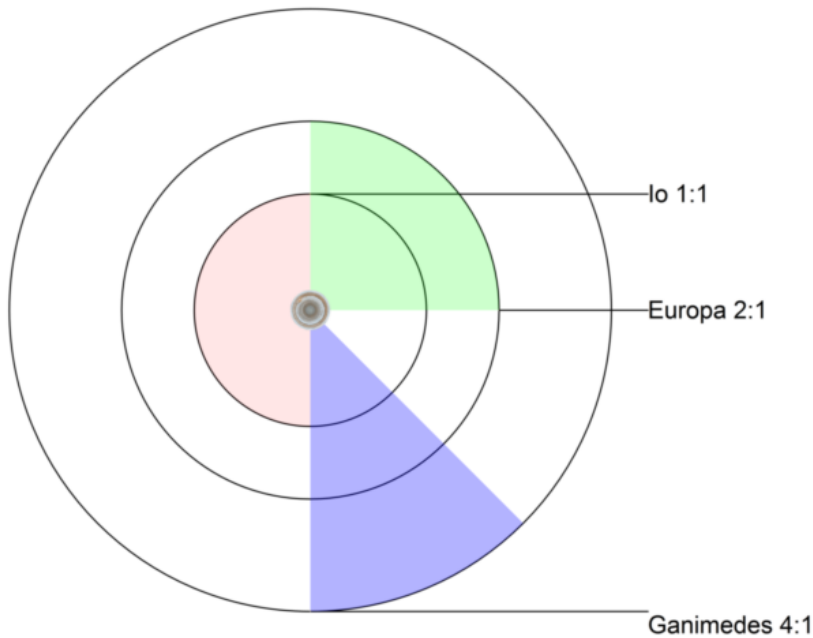


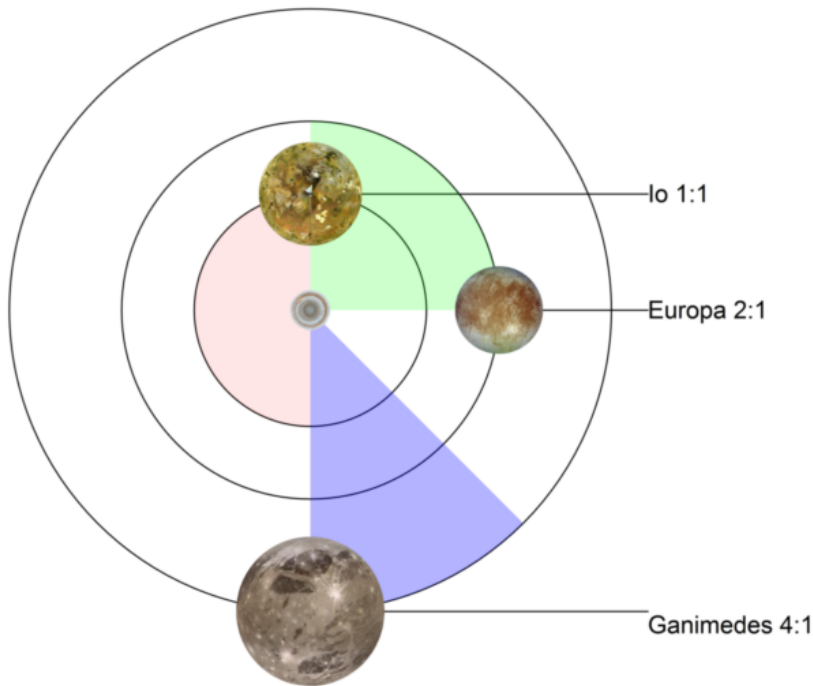
Ziemia - Księżyc

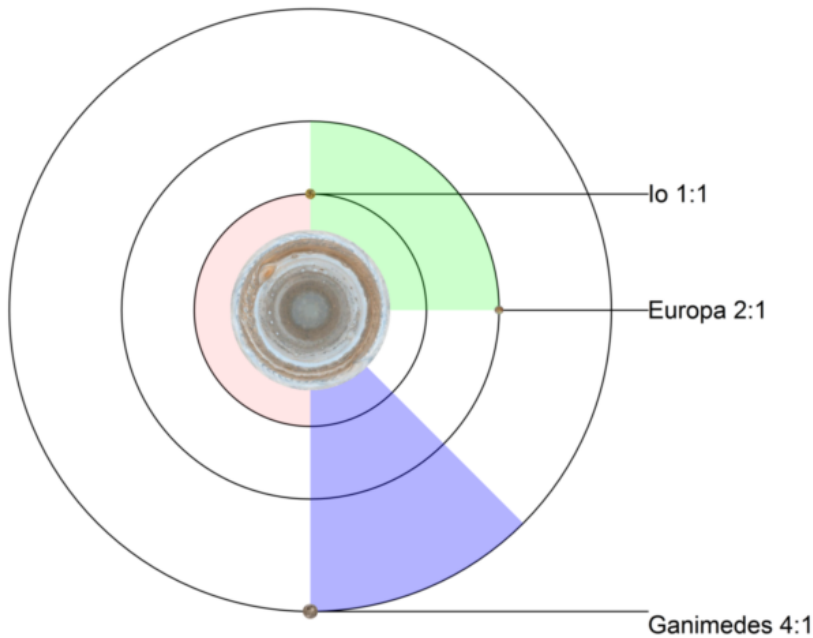
Pełny rezonans 1:1

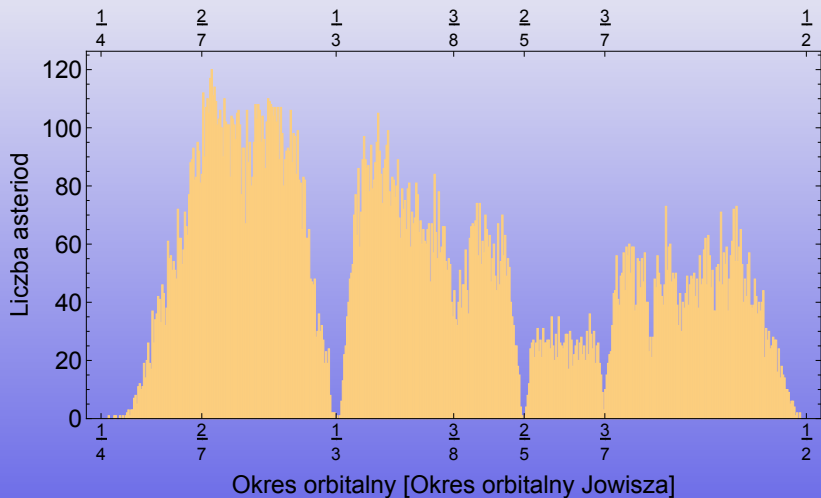


Pluton - Charon









$$a_n = \frac{4 + 3 \cdot 2^n}{10} [AU], \quad n = -\infty, 0, 1, \dots$$

Inna podobna formuła  $a_n = 1.728^n$ , która stosuje się także do księżyców Jowisza

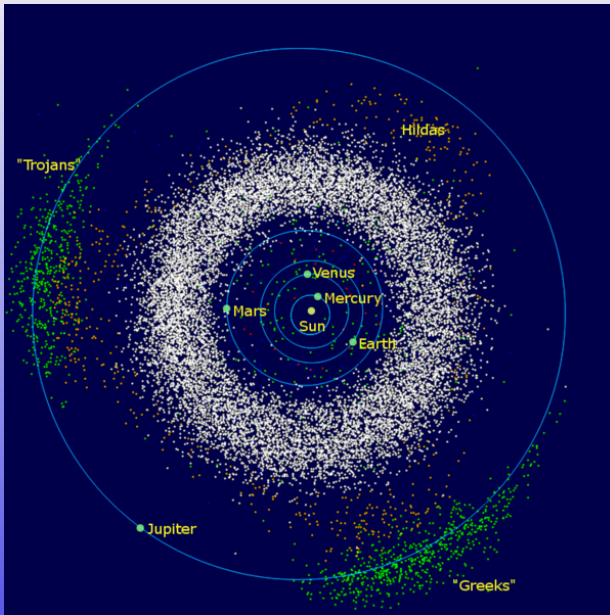
❶ standardowe wytłumaczenie:

- w Układzie Słonecznym powstaje bardzo duża liczba ciał rozmieszczonych losowo
- w toku ewolucji, niestabilności, rezonansów zajmują miejsca stabilne lub są wyrzucane poza Układ
- pozostają planety w bezpiecznych odległościach, kilku promieni Hill'a i stabilnych rezonansach

❷ struktura układów pozasłonecznych nie daje podstaw do twierdzenia o uniwersalności reguły Titiusa-Bodego

❸ niemniej jednak używa się jej do szukania egzoplanet

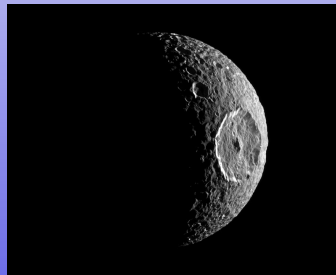
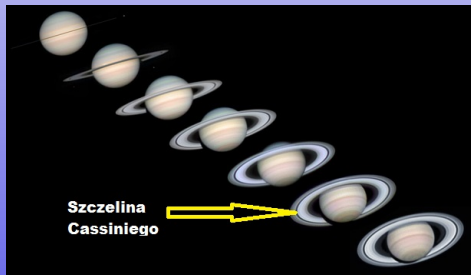
# Planetoidy trojańskie





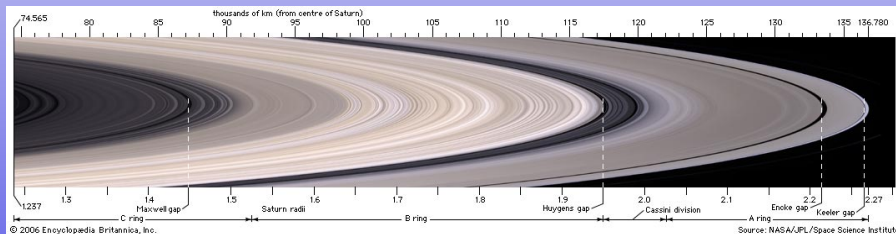
Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego — rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego — rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A — rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



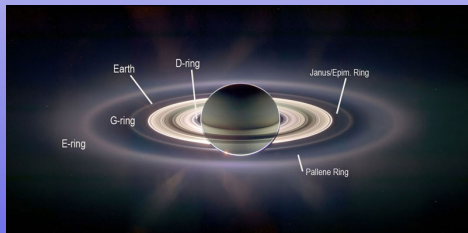
Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego — rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego — rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A — rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego — rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego — rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A — rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



- niewyróżniająca się gwiazda Galaktyki
- ze względu na bliskość kompleksowo przebadana eksperymentalnie i teoretycznie
- stale monitorowana, w niektórych aspektach (np: plamy słoneczne) od kilkuset lat
- występują w niej prawie wszystkie procesy istotne w teorii ewolucji gwiazd
- jest perfekcyjnie sferyczne ( $\Delta R/R \simeq 7 \times 10^{-5}$ ) i bardzo wolno obraca się (raz na miesiąc)

Słońce z dobrym przybliżeniem promieniuje jak ciało doskonale czarne. Widmo energetyczne (energia fotonu  $E_\gamma = h\nu$ ) promieniowania ma postać Plancka:

$$\frac{dL}{d(h\nu)} = L_\odot \frac{15}{(\pi k T_\odot)^4} \frac{(h\nu)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

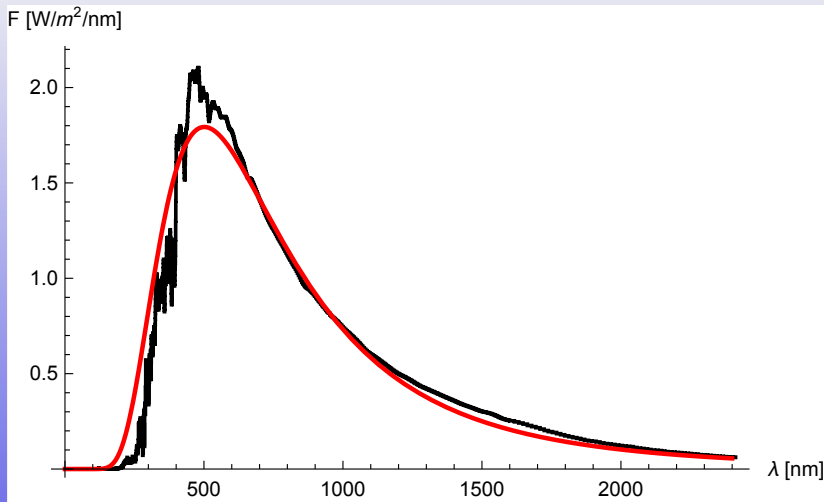
Temperaturę efektywną  $T_\odot = T_{\text{eff}}$  definiujemy poprzez całkowitą moc promieniowania, tak aby był spełniony wzór Stefana-Boltzmana  $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 T_\odot^4$ .

## Stała słoneczna

Natężenie promieniowania w odległości  $d = 1$  AU nazywamy *stałą słoneczną*:

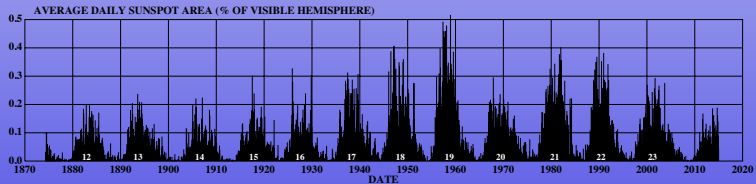
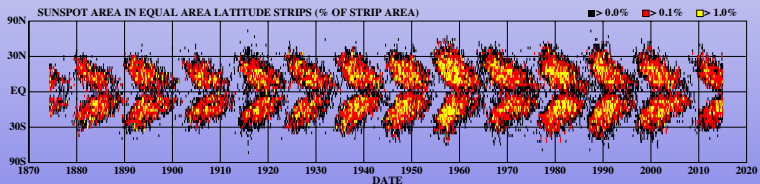
$$\frac{L_\odot}{4\pi d^2} = 1361 \text{ W/m}^2$$

Faktyczna ilość energii na  $\text{m}^2$  docierająca do powierzchni Ziemi jest zmienna i prawie 10 razy mniejsza.



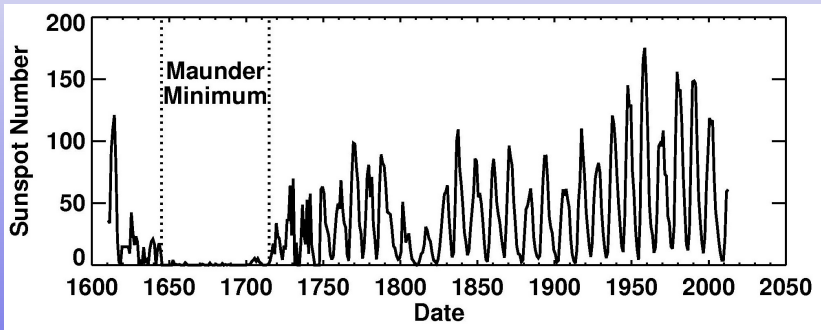
$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \frac{2\pi hc^2}{\sigma T^4} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, T = 5877 \text{ K}, d = 1 \text{ AU}, L_{\odot} = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

## DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS



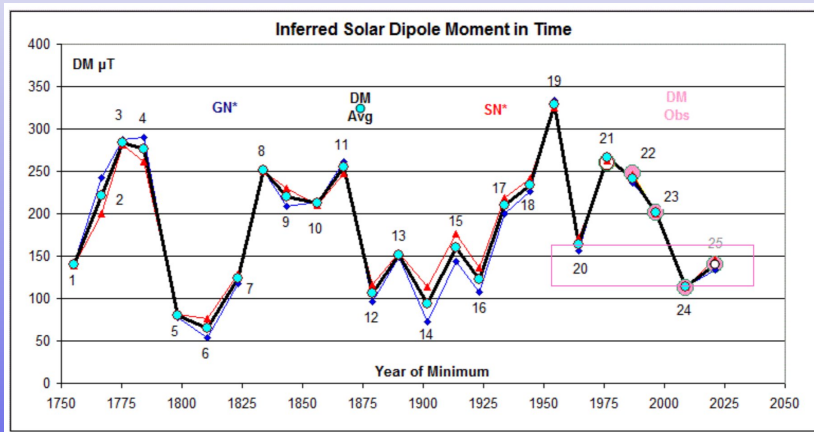
<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/BFLY.PDF>

HATHAWAY NASA/ARC 2015/3



<http://www.leif.org/research/Prediction-of-SC25.pdf>





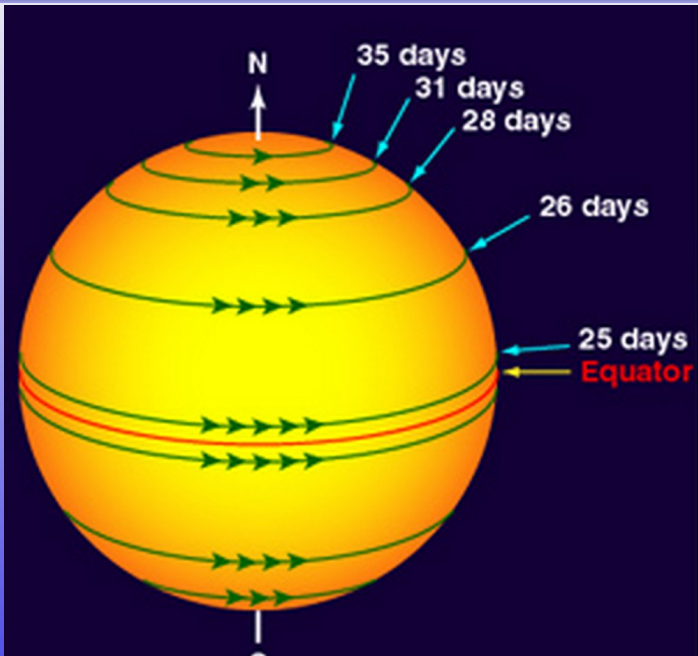
<http://www.leif.org/research/Prediction-of-SC25.pdf>

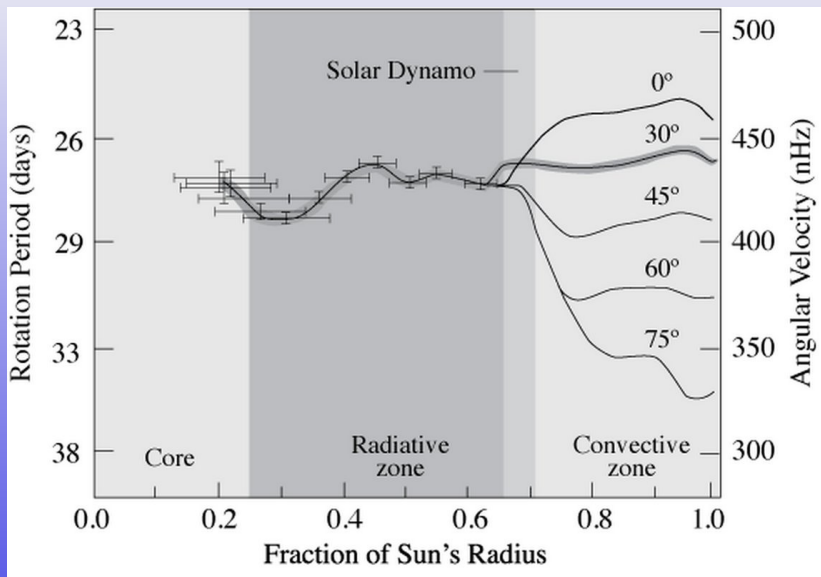
Podstawowe fakty:

- 1 okres obrotu na równiku  $T \simeq 25$  dni
- 2 dla porównania: okres orbity tuż nad powierzchnią Słońca

$$2\pi/\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^3}} \simeq 2.7 \text{ godziny}$$

- 3 Słońce obraca się ponad 200 razy wolniej niż to możliwe
- 4 rotacja ma charakter różnicowy: obrót na równiku jest szybszy ( $T=25$  dni) niż na biegunach ( $T>30$  dni)
- 5 rotacja zmienia się z odległością od centrum

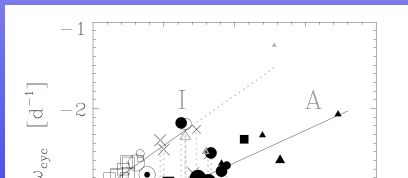
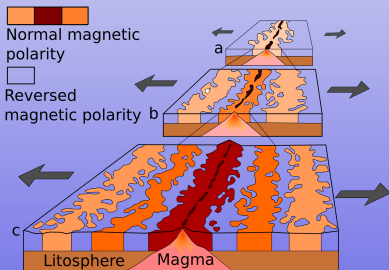




# Cykl magnetycznej aktywności Słońca i Ziemi

Pełny cykl aktywności obejmuje dwa maksima aktywności ze zmianą biegunów magnetycznych, po czym pole magnetyczne wraca do pozycji wyjściowej.

- dla Słońca pełny cykl wynosi  $2 \times 11 = 22$  lata
- analogiczne zjawisko przebiegunowania pola magnetycznego Ziemi zachodzi w kwaziperiodyczny sposób z czasem od 700 tysięcy do 2 milionów lat. Ostatnie miało miejsce 780 tyś. lat temu.
- podobne zjawisko obserwujemy dla innych gwiazd



Obliczenie widma energetycznego neutrin słonecznych wymaga bardzo szczegółowego rozpatrzenia spalania wodoru:

- cykl *ppI*
- cykl *ppII*
- cykl *ppIII*
- cykl CNO

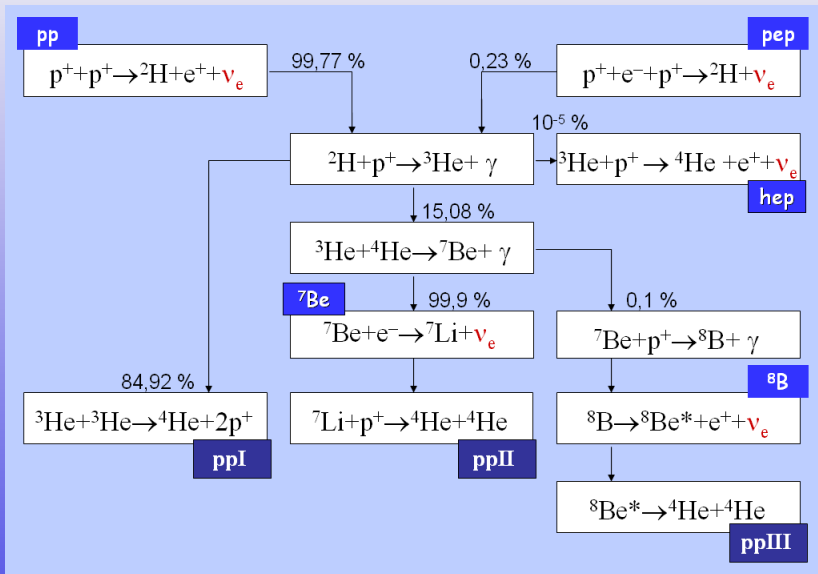
Wszystkie neutrino (w tym *pp* i *hep*) pochodzą z rozpadów  $\beta$  jąder. W Słońcu występują dwa typy takich reakcji, na przykład:

- 1 *ppII*: wychwytywanie elektronu (*neutrino berylowe, pep*)



- 2 *ppIII*: rozpad  $\beta^+$  (*neutrino borowe, pp, hep, CNO*)

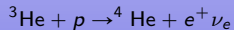




# Typy widma neutrinowego ze Słońca

|                      | ciągłe                              | liniowe                 |
|----------------------|-------------------------------------|-------------------------|
| rozpad $\beta^+$     | ${}^8\text{B}$ , $pp$ , $hep$ , CNO | —                       |
| wychwyt $\epsilon^-$ | —                                   | $pep$ , ${}^7\text{Be}$ |

- Reakcja  $hep$  jest analogiczna do  $pp$ :

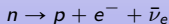


- W cyklu CNO pojawiają się neutrino z rozpadów  ${}^{13}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$  oraz  ${}^{17}\text{F}$ .

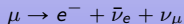


Funkcyjną postać widma neutrinowego można łatwo zrozumieć analizując rachunek dotyczący prostszych procesów, np:

- rozpad  $\beta$  neutronu:



- rozpad  $\beta$  mionu:



W ogólności prawdopodobieństwo rozpadu  $\beta$  wynosi:

$$\frac{2\pi}{\hbar} \int \langle in|H|out \rangle^2 \delta(E_{in} - E_{out}) dN_e dN_\nu dN_{out}$$

Z rozpadu  $\mu$  otrzymujemy wartość stałej sprzężenia oddziaływań słabych, stałą Fermiego  $G_F$ , natomiast z czasu rozpadu neutronu wartość  $\langle in|H|out \rangle^2$  dla procesów z udziałem protonów, neutronów, elektronów i neutrin. Dalej zakładam, że  $\langle in|H|out \rangle^2 \propto M^2$  jest znaną wielkością liczbową.

Zakładam, że proton i neutron spoczywa, czyli ilość stanów końcowych protonu wynosi 1. Pozostaje całkowanie po ilości stanów końcowych elektronów  $dN_e = d^3 p_e / h^3$  i neutrin  $dN_\nu = d^3 p_\nu / h^3$ :

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - E_\nu) d^3 p_e d^3 p_\nu.$$

Przechodzimy do układu sferycznego i całkując po wszystkich kierunkach elektronów i neutrin mamy:

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - E_\nu) 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu.$$

Dla elektronów  $E_e^2 - p_e^2 = m_e^2$ , dla neutrin  $E_\nu = p_\nu$  ( $c = 1$ ). Całkowanie delty Diraca sprowadza się do wyrugowania energii elektronu, bądź neutrina. W teorii rozpadu  $\beta$  na ogół ruguje się  $E_\nu$ , my robimy odwrotnie:

$$E_e = Q - E_\nu, \quad \text{gdzie: } Q = (m_n - m_p)c^2$$

czyli całkowite tempo rozpadu jest proporcjonalne do:

$$\lambda \propto \int_0^{Q-m_e} \sqrt{(Q - E_\nu)^2 - m_e^2} (Q - E_\nu) E_\nu^2 dE_\nu$$

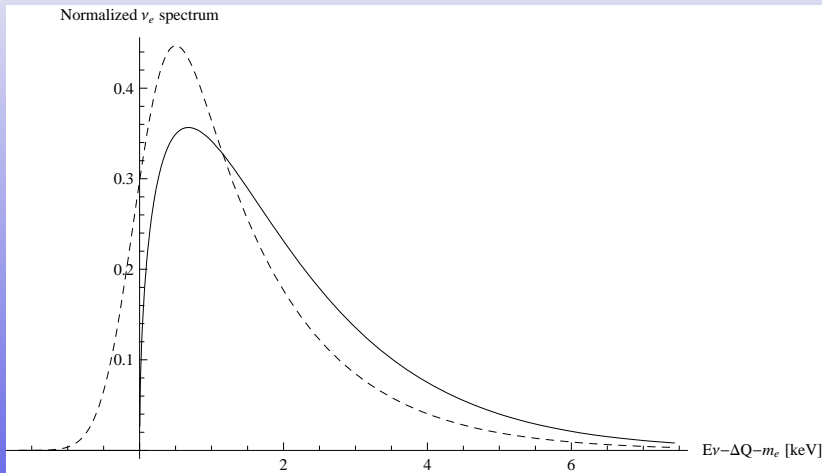
Wynik uogólniony na przypadek, gdy elektrony tworzą gaz Fermiego:  
Wychwył elektronu:

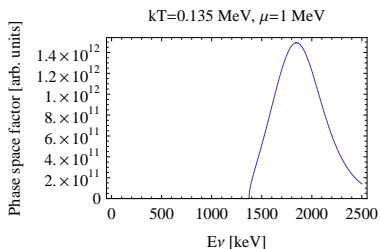
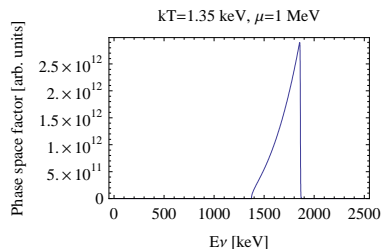
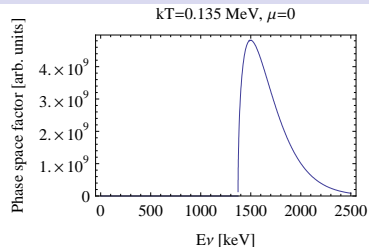
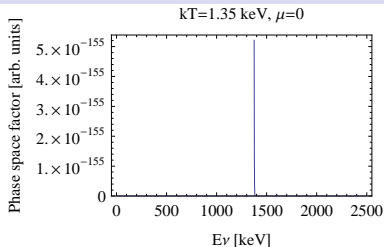
$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \frac{\varepsilon_\nu^2 (\varepsilon_\nu - \Delta Q) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp[(\varepsilon_\nu - \Delta Q - \mu)/kT]} \Theta(\varepsilon_\nu - \Delta Q - m_e) \quad (8)$$

Rozpad  $\beta^+$ :

$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \frac{\varepsilon_\nu^2 (\Delta Q - \varepsilon_\nu) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp(\varepsilon_\nu - \Delta Q + \mu)/kT} \Theta(\Delta Q - m_e - \varepsilon_\nu) \quad (9)$$

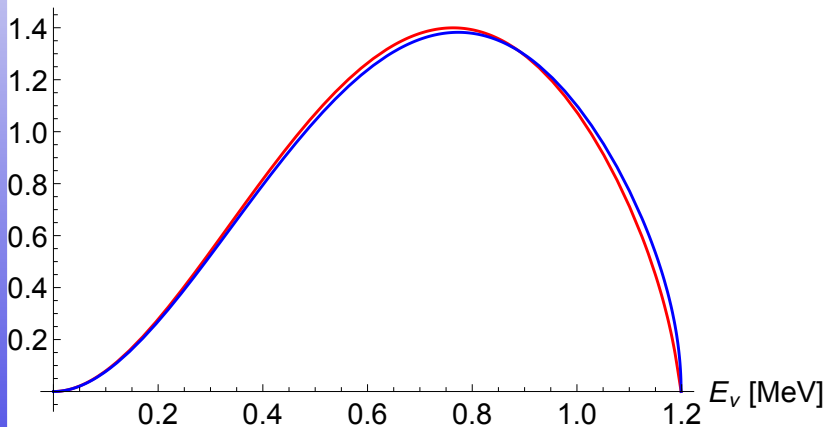
W przypadku Słońca gaz elektronowy jest niezdegenerowany ( $\mu = 0$ ), a jego temperatura znacznie niższa niż różnice mas jąder ( $\Delta Q \gg kT$ ). Powoduje to, że pierwsze widmo wygląda prawie jak  $\delta$  Diraca, natomiast drugie to prosta funkcja algebraiczna (licznik we wzorze powyżej).



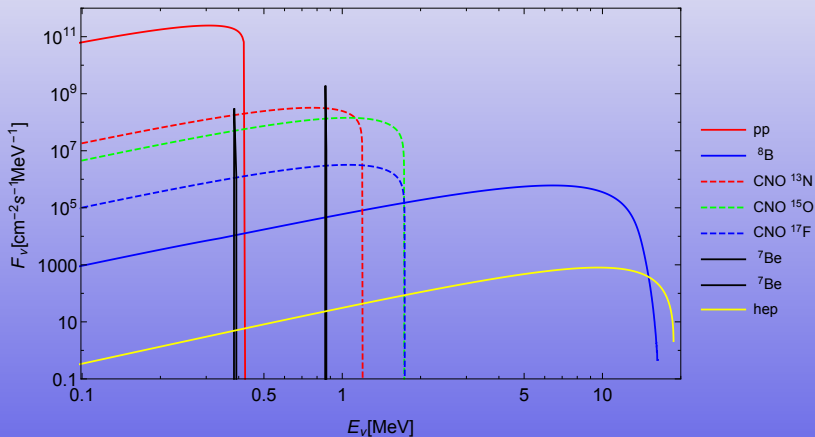


$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \varepsilon_\nu^2 (\Delta Q - \varepsilon_\nu) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}$$

Znormalizowane do 1 widmo  $\nu_e$  z rozpadu  $^{13}\text{N}$



# Kompletne (prawie) widmo neutrin słonecznych



Problemem neutrin słonecznych nazywamy duży (aż do 50%) deficyt neutrin obserwowanych na Ziemi w porównaniu z teorią budowy gwiazdy.

Współczesne wyjaśnienie:

- neutrina są produkowane zgodnie z modelem Słońca i znanymi sieciami reakcji termojądrowych
- neutrina posiadają masę
- produkowane są w stanie kwantowym  $\nu_e$ , który nie posiada dobrze określonej masy, a propagują się jako stany własne masy, czyli są superpozycją  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
- po drodze od centrum stany kwantowe ulegają mieszanii, zarówno w Słońcu (poprzez oddziaływanie z elektronami, tzw. oscylacje w materii), jak i w próżni, a także wewnątrz Ziemi
- część neutrin, które narodziły się jako elektronowe, staje się mionowymi/taonowymi i nie jest wykrywana w niektórych detektorach

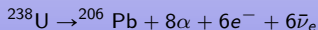
Obecnie uważa się, że problem neutrin słonecznych został (prawie) rozwiązany.



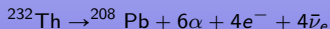
Podobnie jak Słońce emituje neutrina elektronowe  $\nu_e$  w rozpadach  $\beta^+$ , Ziemia emituje głównie **antyneutrino** elektronowe  $\bar{\nu}_e$  z rozpadów  $\beta^-$ . Strumień  $\nu_e$  jest mały, ale niezerowy.

Główne źródła:

- 1 szereg uranowy: kaskada rozpadów zaczynająca się od  $^{238}\text{U}$ :



- 2 szereg torowy: kaskada rozpadów zaczynająca się od  $^{232}\text{Th}$



- 3 rozpad potasu  $^{40}\text{K}$ :



# Geo-neutrinos



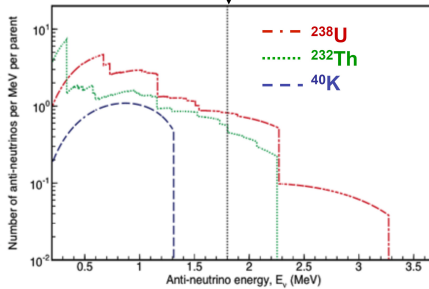
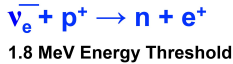
1 $\alpha$ , 1 $\beta$



5 $\alpha$ , 2 $\beta$



2 $\alpha$ , 3 $\beta$



1 $\beta$



1 $\alpha$ , 1 $\beta$



4 $\alpha$ , 2 $\beta$



1 $\alpha$ , 1 $\beta$



# Geoneutrino: widmo energetyczne

