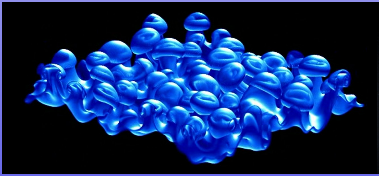
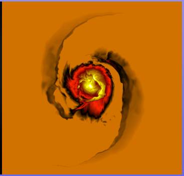
Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

7 czerwca 2016





Model mechaniczny i jego porażka

Failed supernova

1. wytworzona podczas kolapsu fala uderzeniowa porusza się „pod prąd" spadającej do środka materii
2. aby doszło do eksplozji jej prędkość musi być większa niż prędkość spadającej materii
3. w rzeczywistości front fali efektywnie zatrzymuje się w miejscu
4. energia (skok) fali uderzeniowej tracona jest m.in. na podgrzewanie materii za frontem, dysocjację jąder atomowych i produkcję neutrin
5. w efekcie nie dochodzi do eksplozji, co jest sprzeczne z obserwacjami

Niemożność uzyskania energii eksplozji przekraczającej energię wiązania grawitacyjnego gwiazdy określamy jako **problem modelowania supernowej**, w domyśle typu implozyjnego (ang: core-collapse supernova).

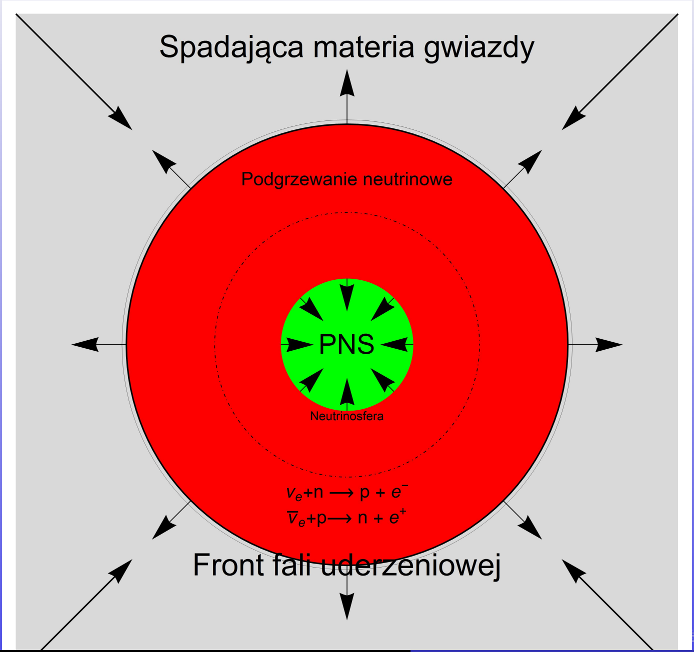
Protogwiazda neutronowa (ang. protoneutron star)

W centrum eksplozji narodziła się młoda gwiazda neutronowa. Jej cechy to:

- promień rzędu kilkudziesięciu km
- uwięzione w środku neutrina
- powolne (w porównaniu do czasu kolapsu!) kurczenie się do $R \simeq 10$ km i stygnięcie poprzez emisję neutrin na skali czasowej rzędu 1 sekundy
- 99% energii grawitacyjnej wyzwolonej w kolapsie jest wypromieniowane w tej fazie w postaci ν i $\bar{\nu}$ wszystkich typów

Powierzchnię z której emitowane są neutrina nazywamy *neutrinosferą*. Istnieją trzy neutrinosfery, dla ν_e, ν_μ oraz ν_τ.

Model neutrinowy i jego porażka



Modele 2D i 3D

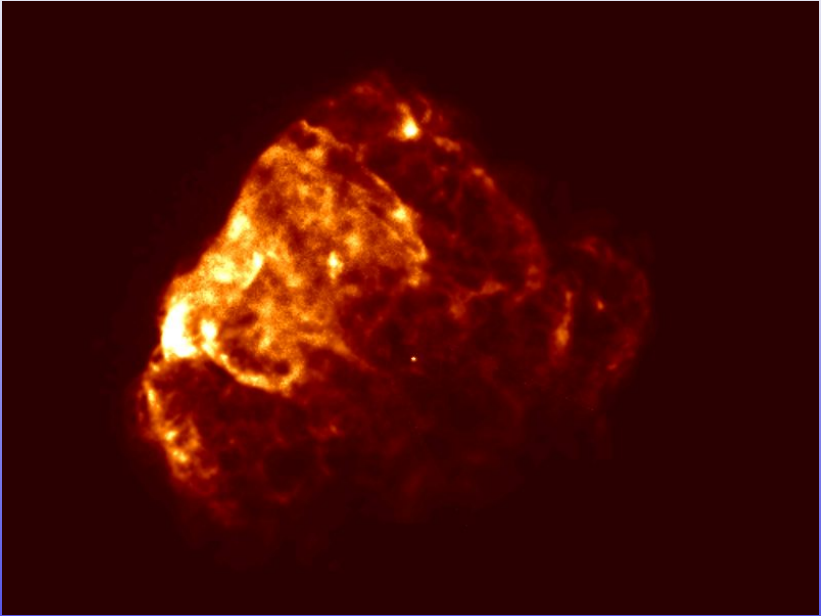
Podstawową techniką zwiększenia energii eksplozji sterowanej neutrinowo jest zwiększenie czasu napromieniowania materii neutrinami poprzez intensywne mieszanie materii za frontem fali uderzeniowej.

- proces mieszania nie zachodzi w symetrii sferycznej (tzw. symulacja 1D)
- w 1D droga cząstki do centrum jest najkrótsza możliwa (linia prosta wzdłuż promienia)
- w 2D można uchwycić kluczowe zjawiska, ale kosztem wzbudzenia potencjalnie niefizycznych niestabilności (SASI, odwrócona kaskada turbulentna, bardzo silne mody drgań o małym L)
- przykład symulacji 3D w modelu „light bulb" animacje: [entropia], [prędkość radialna]

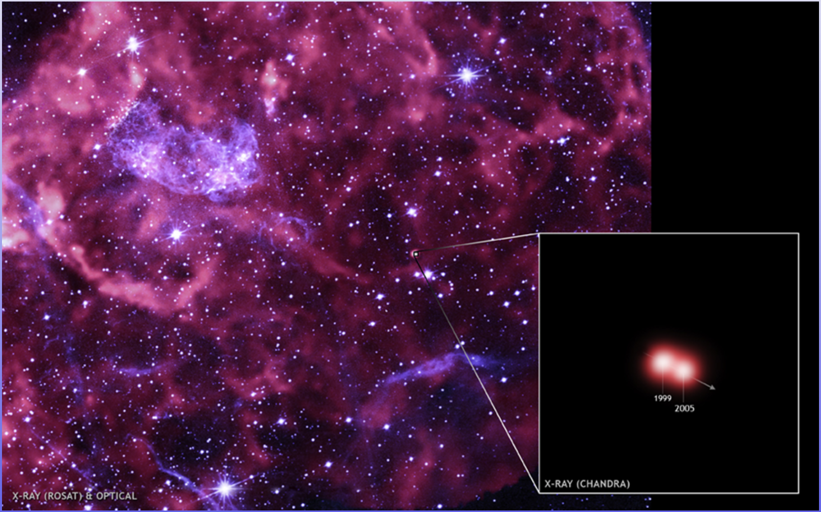
Przejście do fazy mgławicowej

- mechanizm wybuchu operuje na skali czasowej kilku sekund
- dotarcie fali uderzeniowej do powierzchni zajmuje godziny [YouTube]
- osiągnięcie maksimum blasku następuje po kilku - kilkunastu dniach
- supernowa zanika na skali czasowej kilku lat
- przejście do fazy mgławicowej i pozostałości po supernowej to kolejne dziesiątki i setki lat
- pozostałość ulega rozproszeniu w ciągu tysięcy lat

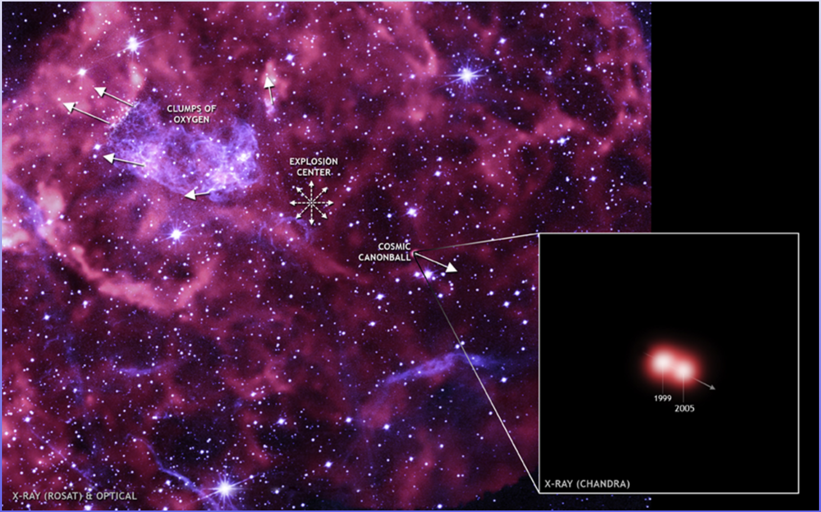
Asymetria eksplozji i wyrzuty gwiazd neutronowych

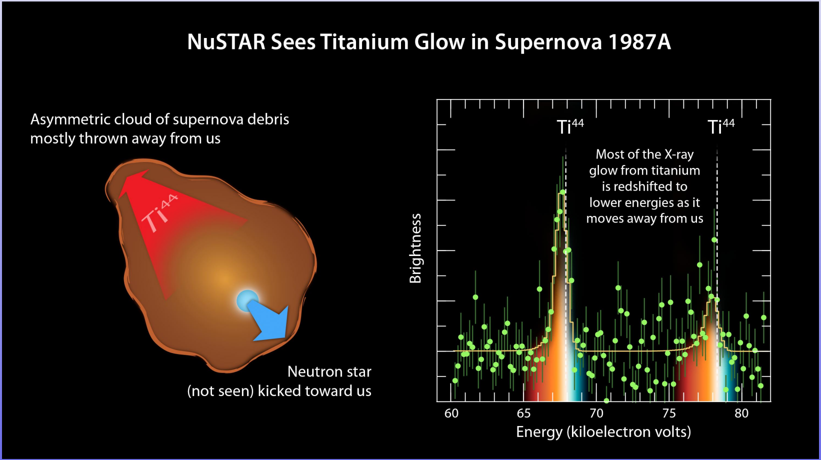


Asymetria eksplozji i wyrzuty gwiazd neutronowych

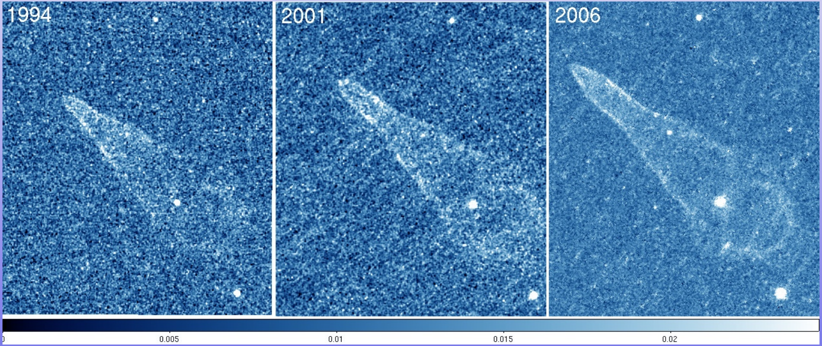


Asymetria eksplozji i wyrzuty gwiazd neutronowych




NuSTAR Sees Titanium Glow in Supernova 1987A
Asymmetric cloud of supernova debris mostly thrown away from us
Ti44
Neutron star (not seen) kicked toward us
Ti44
Ti44
Most of the X-ray glow from titanium is redshifted to lower energies as it moves away from us
Brightness
60
65
70
75
80
Energy (kiloelectron volts)

Asymetria eksplozji i wyrzuty gwiazd neutronowych



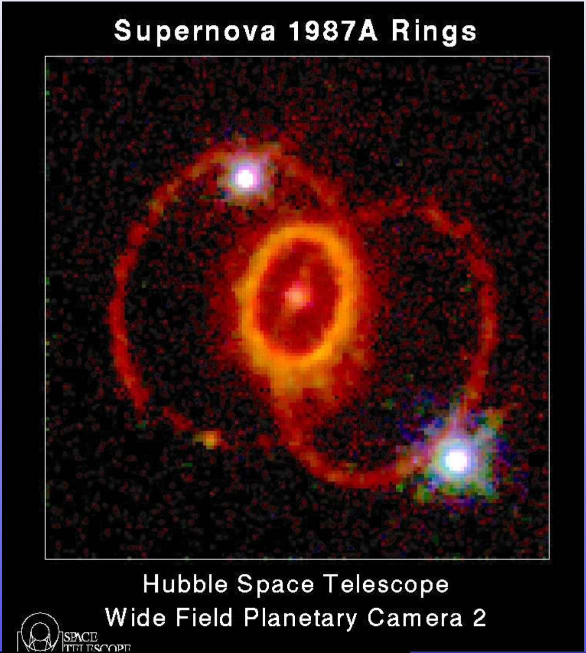
Prędkości pulsarów

Mechanizm wyrzutu z prędkościami do $v_{NS} = 2000$ km/s.

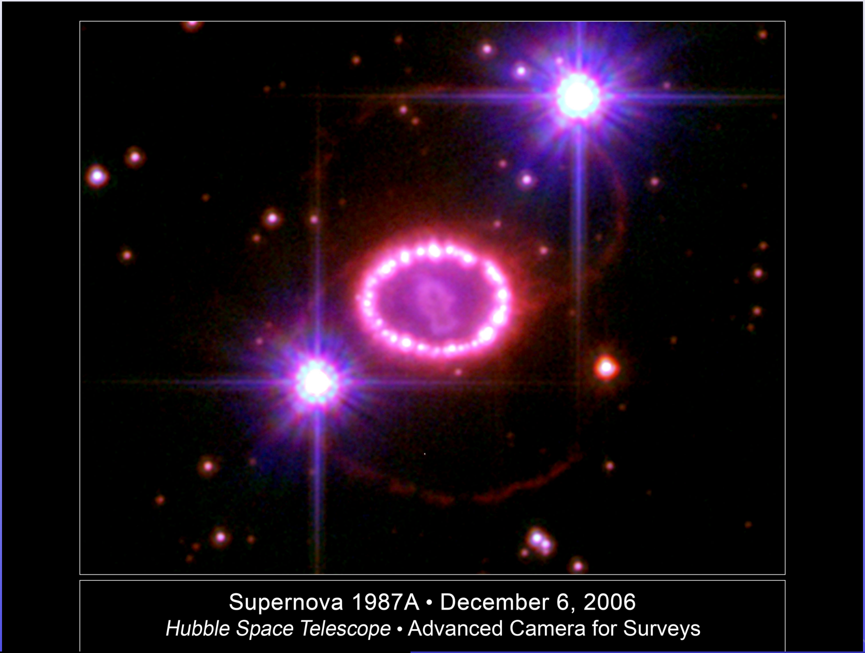
1. zasada zachowania pędu układu gwiazda neutronowa ($M \simeq 1 - 2M_\odot$) - otoczka ($M \gg 10M_\odot$) [animacja]
2. zasada zachowania pędu układu gwiazda neutronowa - strumień neutrin; asymetria $\delta = 0.025$ emisji wystarcza do nadania obserwowanej prędkości)

$$\delta = \frac{M_\odot v_{NS}}{E_{SN}/c} \simeq 0.025$$

dla $E_{SN} = 3 \times 10^{53} erg$.


Supernova 1987A Rings
Hubble Space Telescope
Wide Field Planetary Camera 2
SPACE
TELESCOPE

SN1987A



Supernova 1987A • December 6, 2006
Hubble Space Telescope • Advanced Camera for Surveys

GRB, hipernowe, czarne dziury, cichy kolaps

Wybuch supernowej prowadzący do powstania gwiazdy neutronowej nie jest jedynym możliwym skutkiem kolapsu.

- natychmiast lub z opóźnieniem (poprzez deleptonizację lub akrecję) może powstać czarna dziura
- obecnie jasne jest, że długie rozbłyski gamma (ang: **G**amma **R**ay **B**urst) to także supernowe, obserwowane wzdłuż osi obrotu
- trudno obecnie wykluczyć możliwość, że mechanizm supernowej faktycznie czasem zawodzi, i niektóre masywne gwiazdy po prostu gasną pochłonięte przez czarną dziurę, która powstała w ich w centrum

Hipernowe

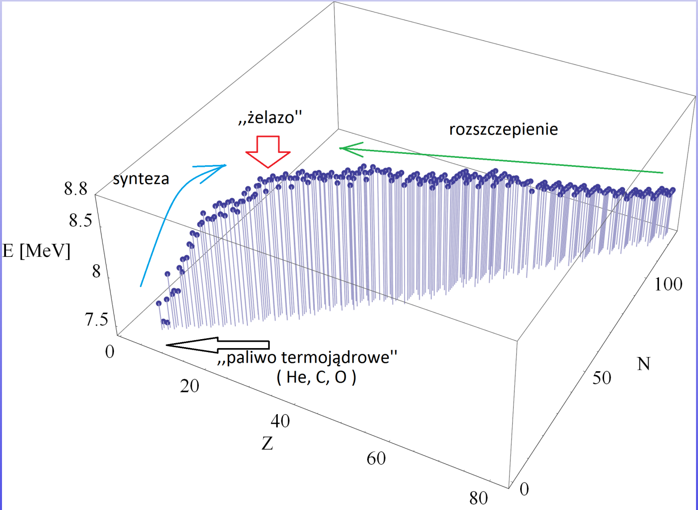
Wszystkie anomalnie jasne przypadki supernowych i ich modele zbiorczo określa się mianem hipernowych. Zwykle wiąże się je z:

- powstaniem czarnej dziury w centrum
- bardzo szybką rotacją
- polami magnetycznymi
- asymetrią eksplozji obserwowanej pod uprzywilejowanym kątem
- produkcją jet-ów

Teoria supernowych termojądrowych (ang. thermonuclear supernova)

Upraszczając, SN Ia to po prostu gigantyczna bomba termojądrowa. Aby doszło do wybuchu potrzebujemy:

1. materiał wybuchowy w ilości rzędu 1 $M_\odot$
2. zapalnik, działający z opóźnieniem wielu miliardów lat



Supernowe termojądrowe (typ Ia) są odmiennym od implozyjnych zjawiskiem astrofizycznym, przy ich modelowaniu nie natrafiono na fundamentalne trudności. Z powodu zastosowania w kosmologii jako indykatorów odległości, od teorii oczekujemy konkretnych i precyzyjnych informacji.

Pytanie I: co wybucha jako SN typu Ia?

1. akreujący biały karzeł w układzie podwójnym ze zwykłą gwiazdą (mechanizm opóźniający: akrecja)
2. układ podwójny **dwóch** białych karłów (mechanizm opóźniający: fale grawitacyjne)
3. pojedynczy, np: szybko rotujący, biały karzeł lub samozapłon w wyniku niestandardowych procesów fizycznych (mechanizm opóźniający: spowolnienie obrotu, małe prawdopodobieństwo)

Pytanie II: w jaki sposób przebiega wybuch?

1. deflagracja (płomień termojądrowy)
2. detonacja (zapłon na froncie fali uderzeniowej)

Kluczowe fakty wynikające z teorii ewolucji gwiazd pojedynczych:

- w układzie podwójnym, bardziej masywny składnik ewoluuje szybciej
- w związku z powyższym, pierwszy staje się czerwonym olbrzymem i wypełnia powierzchnię Roche'a
- dochodzi do transferu masy, zmian orbity i zmian w rozmiarze strefy Roche'a

Gromadzenie się wodoru na powierzchni białego karła na ogół prowadzi do kwazi-okresowych eksplozji, które obserwujemy jako *gwiazdy nowe*. W wyniku tego, biały karzeł może zyskiwać na masie na masie, co może doprowadzić do osiągnięcia *masy zapłonu*. Masa ta jest na ogół **różna** od masy Chandrasekhara. Dla białych karłów He jest niska ($M=0.7M_{\odot}$), a dla białego karła C/O:

$$M_{CO} = 1.38 M_{\odot} < M_{Ch} = 1.45 M_{\odot}$$

Masa zapłonu i smouldering

$\diamond$	M_{ZAMS} $[M_\odot]$	M_{WD} $[M_\odot]$	M_{expl} $[M_\odot]$	M_{Ch}
He	0.08 ... 2.25	0.45	0.7	1.440
C+O	2.25 ... 10	0.6 ... 1.2	1.39	1.412
O+Ne+Mg	8 ... 11.5	1.15 ... 1.3	1.39	1.405

- dla białych karłów He oraz C/O zapłon zachodzi dla masy bezpiecznie niższej od M_{Ch}
- w przypadku ONeMg sprawa jest dyskusyjna (kolaps czy wybuch?)

Przez $\sim$1000 lat przed wybuchem w centrum materia „tli się” (ang: smouldering, simmering), chłodzona neutrinowym rozpadem plazmonu i konwekcją. W momencie gdy tempo produkcji energii staje się zbyt duże pojawia się powierzchnia nieciągłości: **płomień termojądrowy** (ang. flame).

Model W7

Aby dopasować produkcję pierwiastków do obserwacji wykonano serię obliczeń z różnymi prędkościami spalania v_s. Najlepszy okazał się model W7 Nomoto dla którego:

$$v_s \simeq 0.3 c_s$$

gdzie c_s to prędkość dźwięku. Fizyka/chemia zna dwa mechanizmy spalania:

- deflagracja, $v_s \ll c_s$
- detonacja, $v_s \simeq c_s$

W obu przypadkach mamy do czynienia z przemieszczającą się powierzchnią nieciągłości. Różnica polega na produkcji dodatkowej energii za frontem.

Deflagracja

- płomień rozchodzący się poprzez przewodnictwo cieplne
- prędkość na poziomie $v_s \simeq 0.01 c_s$
- gaz rozpręża się w trakcie palenia
- spalanie częściowe
- produkowane wszystkie pierwiastki pomiędzy C/O a Fe

Detonacja

- zapłon na froncie fali uderzeniowej
- naddźwiękowa prędkość czoła fali $v_s \geqslant c_s$
- materia „nie wie”, że zbliża się fala detonacyjna
- spalanie całkowite
- produkowane głównie Fe

Deflagracja

- płomień rozchodzący się poprzez przewodnictwo cieplne
- prędkość na poziomie $v_s \simeq 0.01 c_s$
- gaz rozpręża się w trakcie palenia
- spalanie częściowe
- produkowane wszystkie pierwiastki pomiędzy C/O a Fe

Detonacja

- zapłon na froncie fali uderzeniowej
- naddźwiękowa prędkość czoła fali $v_s \geqslant c_s$
- materia „nie wie”, że zbliża się fala detonacyjna
- spalanie całkowite
- produkowane głównie Fe

Deflagracja

- płomień rozchodzący się poprzez przewodnictwo cieplne
- prędkość na poziomie $v_s \simeq 0.01 c_s$
- gaz rozpręża się w trakcie palenia
- spalanie częściowe
- produkowane wszystkie pierwiastki pomiędzy C/O a Fe

Detonacja

- zapłon na froncie fali uderzeniowej
- naddźwiękowa prędkość czoła fali $v_s \geqslant c_s$
- materia „nie wie”, że zbliża się fala detonacyjna
- spalanie całkowite
- produkowane głównie Fe

Deflagracja

- płomień rozchodzący się poprzez przewodnictwo cieplne
- prędkość na poziomie $v_s \simeq 0.01 c_s$
- gaz rozpręża się w trakcie palenia
- spalanie częściowe
- produkowane wszystkie pierwiastki pomiędzy C/O a Fe

Detonacja

- zapłon na froncie fali uderzeniowej
- naddźwiękowa prędkość czoła fali $v_s \geqslant c_s$
- materia „nie wie", że zbliża się fala detonacyjna
- spalanie całkowite
- produkowane głównie Fe

Deflagracja

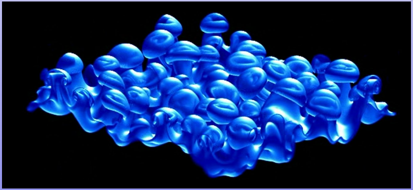
- płomień rozchodzący się poprzez przewodnictwo cieplne
- prędkość na poziomie $v_s \simeq 0.01 c_s$
- gaz rozpręża się w trakcie palenia
- spalanie częściowe
- produkowane wszystkie pierwiastki pomiędzy C/O a Fe

Detonacja

- zapłon na froncie fali uderzeniowej
- naddźwiękowa prędkość czoła fali $v_s \geqslant c_s$
- materia „nie wie”, że zbliża się fala detonacyjna
- spalanie całkowite
- produkowane głównie Fe

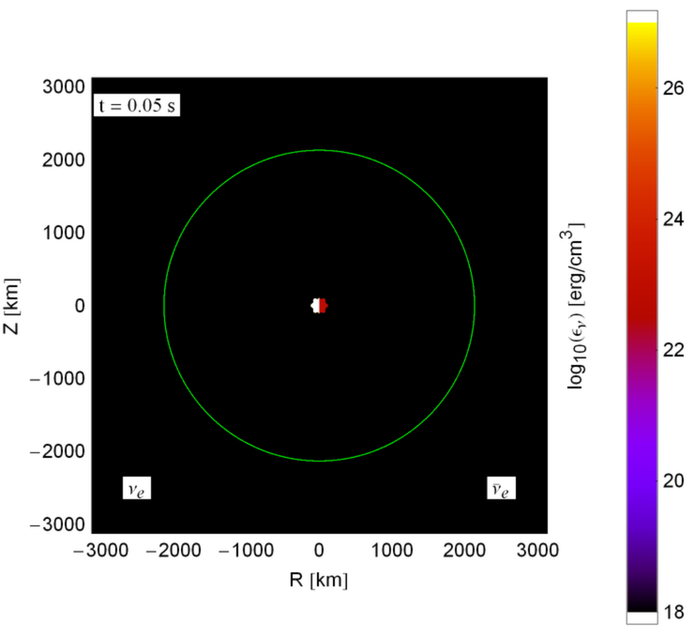
Próby uzgodnienia z fizycznymi procesami spalania

- zwiększenie efektywności spalania przez pofałdowanie płomienia [YouTube]

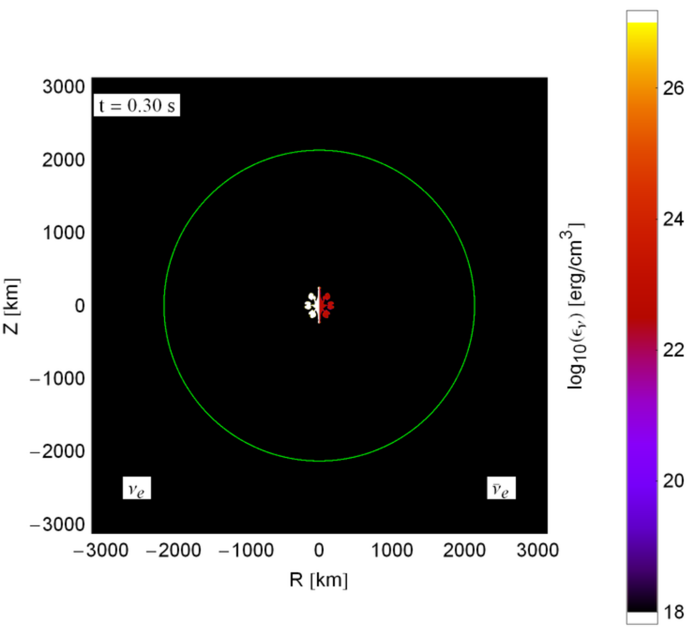
  [YouTube]

- zwiększenie liczby punktów zapłonu
- przejście spalania w detonację

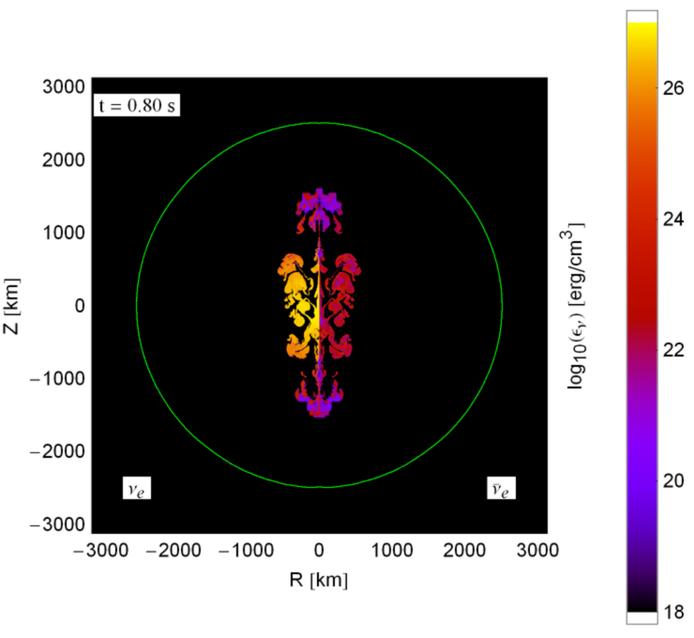
Przykład modelu deflagracji



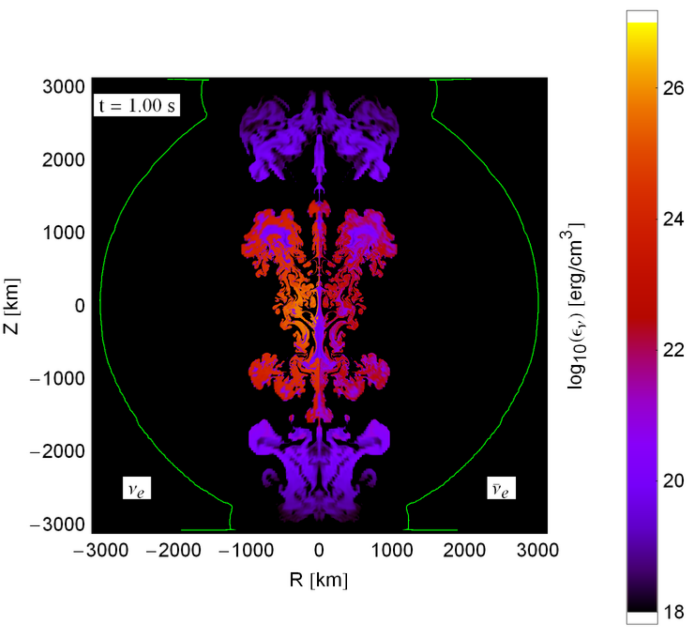
Przykład modelu deflagracji



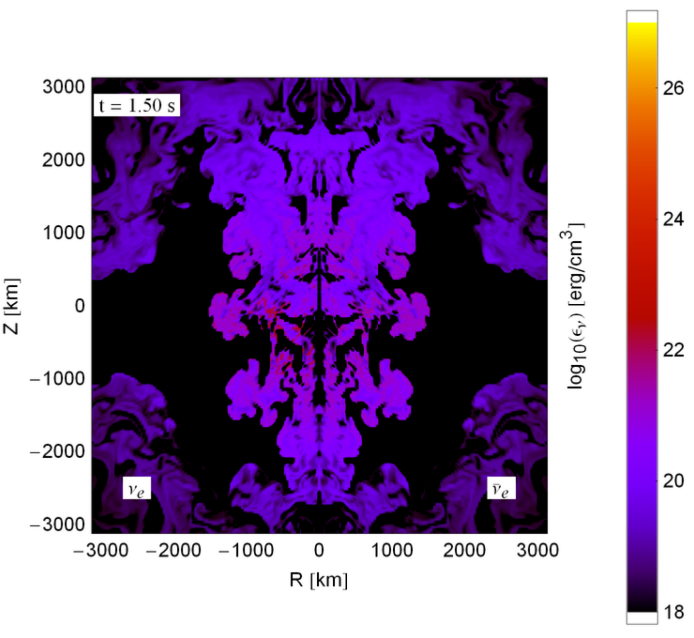
Przykład modelu deflagracji



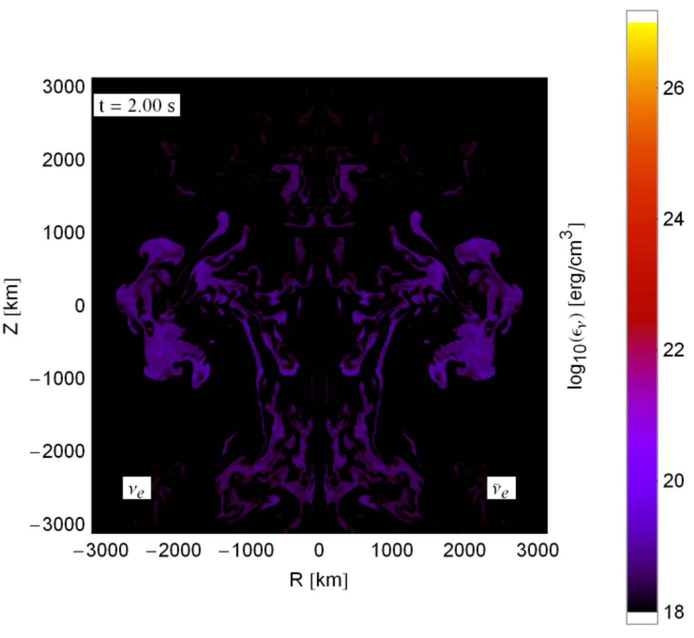
Przykład modelu deflagracji



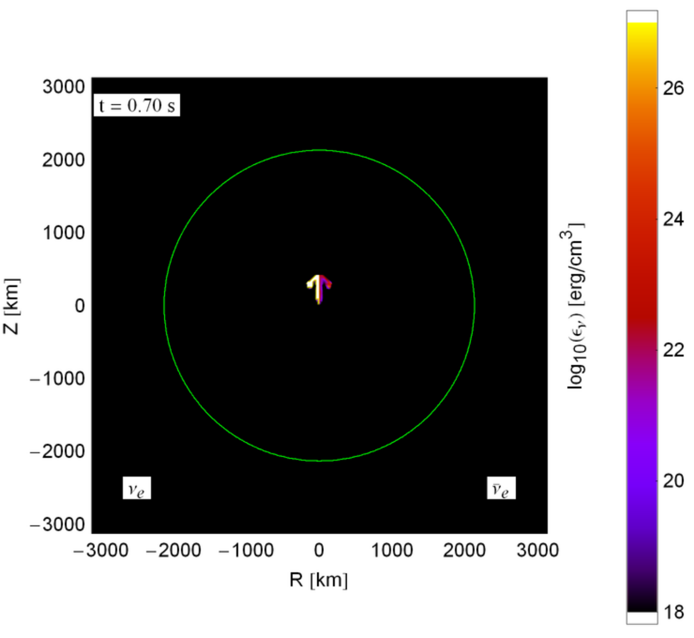
Przykład modelu deflagracji



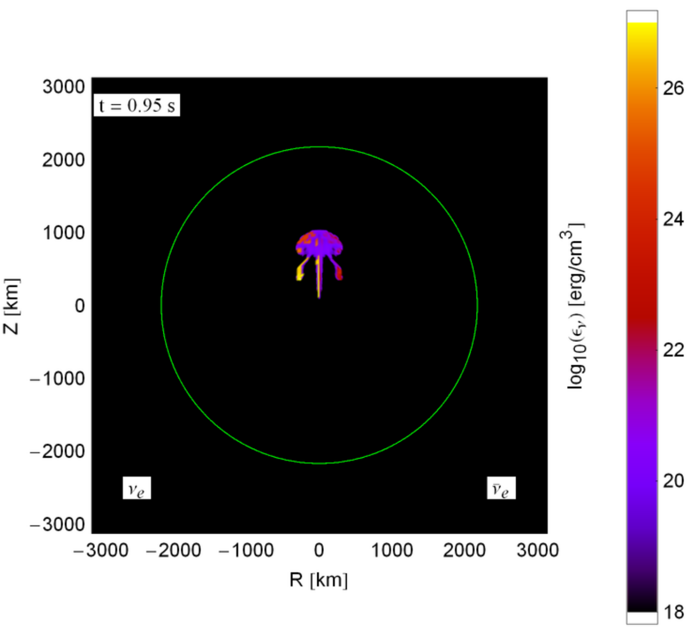
Przykład modelu deflagracji



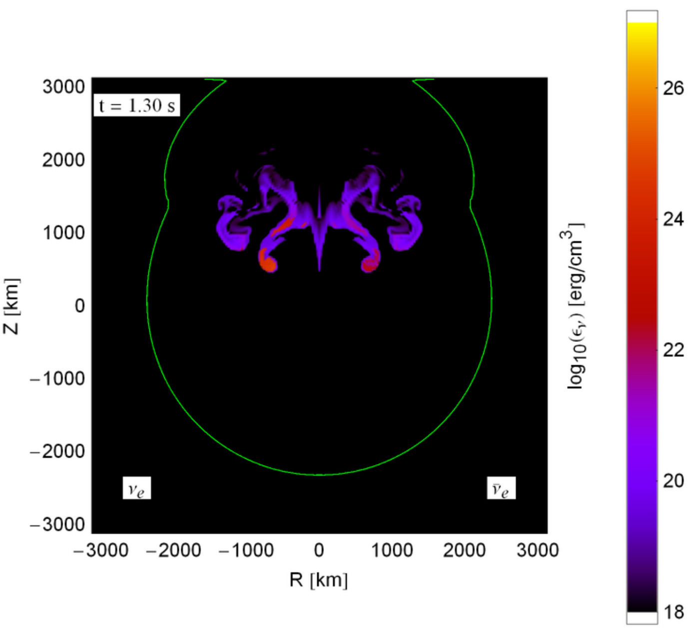
Przykład modelu z opóźnioną detonacją



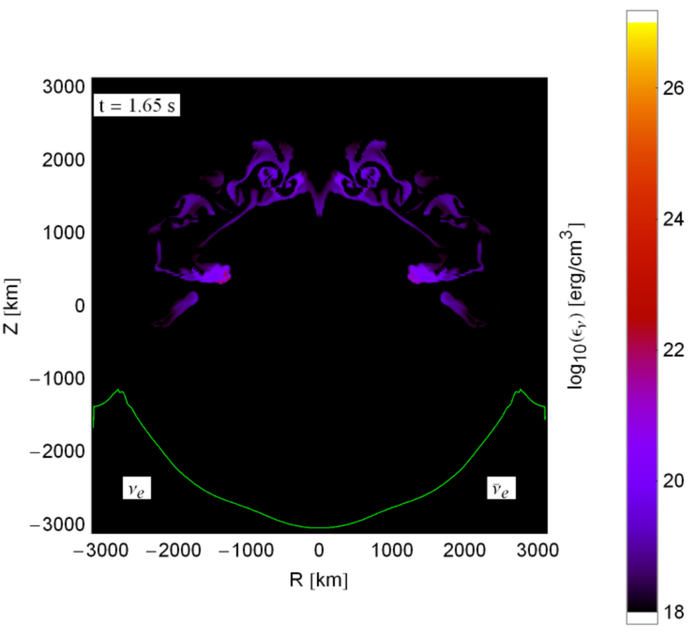
Przykład modelu z opóźnioną detonacją



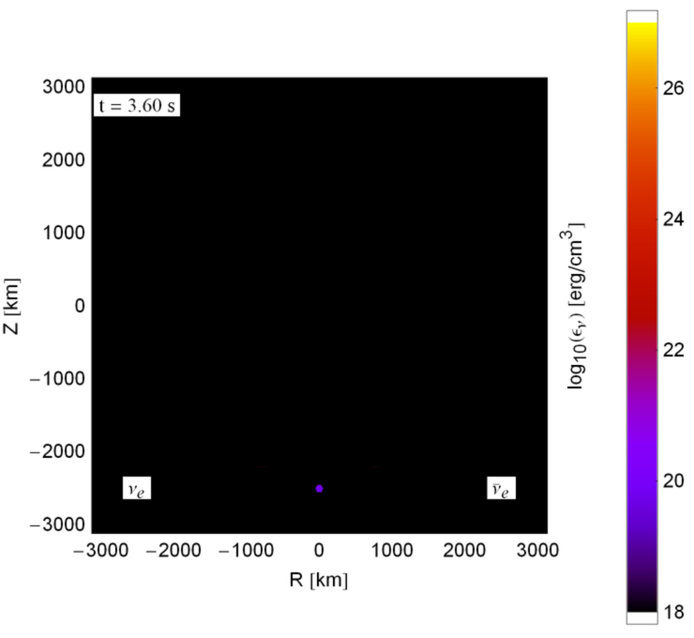
Przykład modelu z opóźnioną detonacją



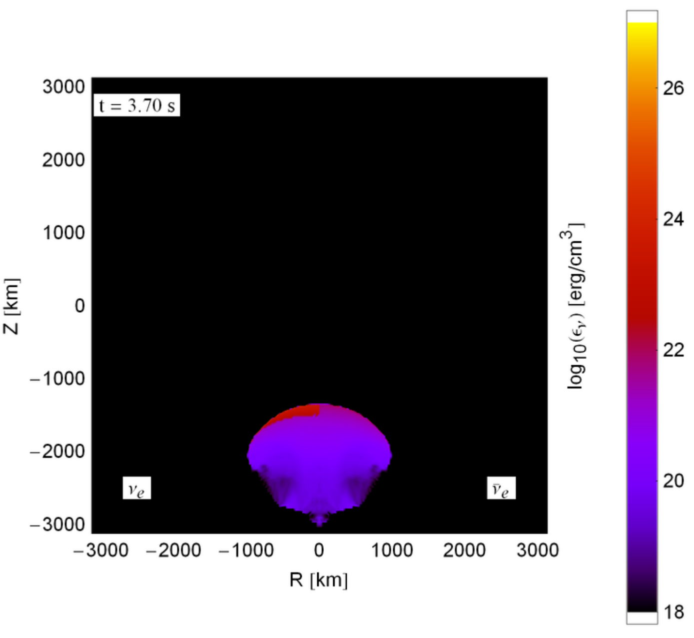
Przykład modelu z opóźnioną detonacją



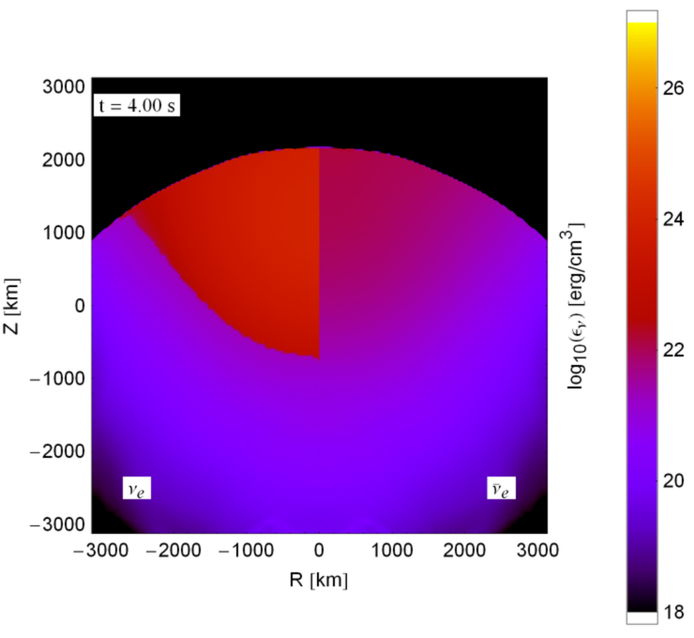
Przykład modelu z opóźnioną detonacją



Przykład modelu z opóźnioną detonacją



Przykład modelu z opóźnioną detonacją



Animacje w czasie rzeczywistym:

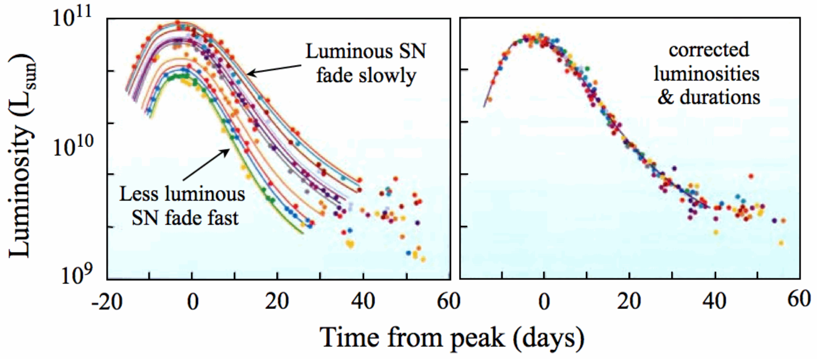
- [n7]
- [y12]

Bardziej efektowna wizualizacja: [YouTube]

Obserwacje pobliskich supernowych wykluczyły zarówno istnienie drugiego składnika typu czerwonego olbrzyma, jak i mgławicy po wcześniejszych eksplozjach nowych. Wyniki są konsystentne z eksplozją białego karła w ośrodku międzygwiazdowym. Brak śladów H, a nawet He w widmie.

SN Ia jako świece standardowe

1. w „zerowym” przybliżeniu każda supernowa termojądrowa jest identyczna: masa zapłonu $M \simeq M_{Ch}$ wynika bezpośrednio z praw fizyki (gaz fermionowy, fizyka jądrowa, OTW), skład jest stały: 50% C + 50 % O
2. obecnie jest jasne, że rozrzut występuje
3. około 85% supernowych to tzw. Branch-normals, reszta to przypadki anomalne
4. normalne przypadki wykazują bardzo silną korelację pomiędzy czasem świecenia a jasnością absolutną



- UWAGA 1: obserwowany z dużej odległości czas wybuchu, podlega *kosmologicznej dylatacji czasu*; dla przesunięcia ku czerwieni z wybuch oglądamy w tempie zwolnionym $1 + z$ razy
- UWAGA 2: korelacja jest czysto obserwacyjna; jej fizyczne przyczyny są nieznane a proponowane wyjaśnienia mają charakter spekulacyjny

Dla gwiazd o masie kilkudziesięciu $M_\odot$ i większej, pojawiają się przynajmniej dwa istotne efekty fizyczne:

1. ciśnienie promieniowania zaczyna dominować, co powoduje, że musimy uwzględnić OTW
2. temperatury zbliżają się do $kT \sim m_e c^2$, co powoduje produkcję stale utrzymującej się pewnej liczby par $e^+ e^-$

Rozkłady Fermiego-Diraca dla elektronów i pozytonów to:

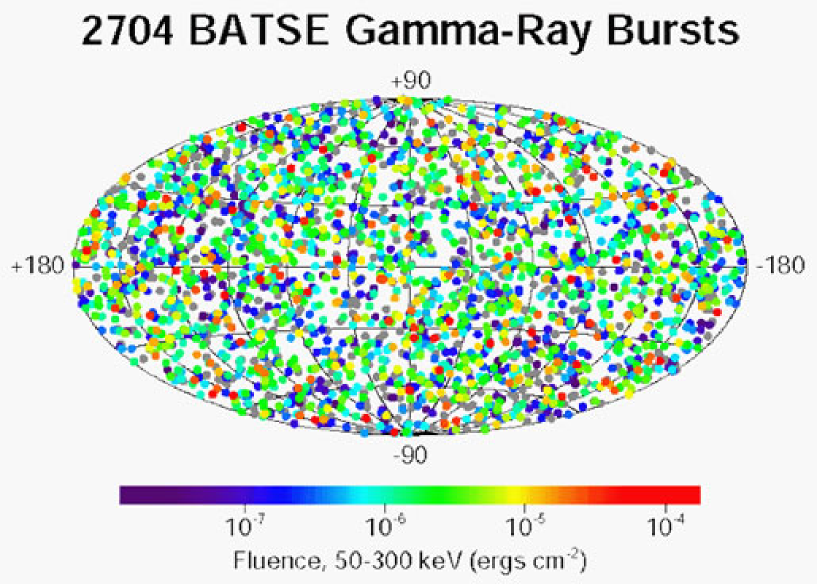
$$e^+ + e^- \leftrightarrow 2\gamma \rightarrow \mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 0 \rightarrow f_{e\pm} = \frac{1}{1 + e^{\frac{E \mp \mu}{kT}}}, \quad n_e = n_{e^-} - n_{e^+}$$

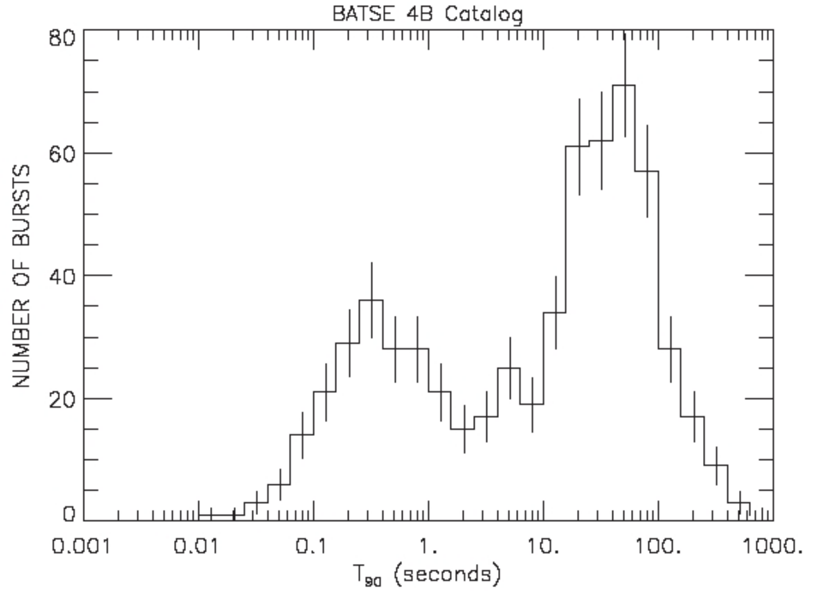
W efekcie równanie stanu zmienia się tak, że $n > 3$, co skutkuje kolapsem grawitacyjnym, prawdopodobnie zatrzymanym przez wybuchowe spalanie w jądrze C/O o masie kilkudziesięciu $M_\odot$. Byłby to brakujący czwarty typ supernowej: termojądrowa wewnątrz masywnej otoczki H/He. Potencjalny (ale wątpliwy) przypadek to SN2007bi

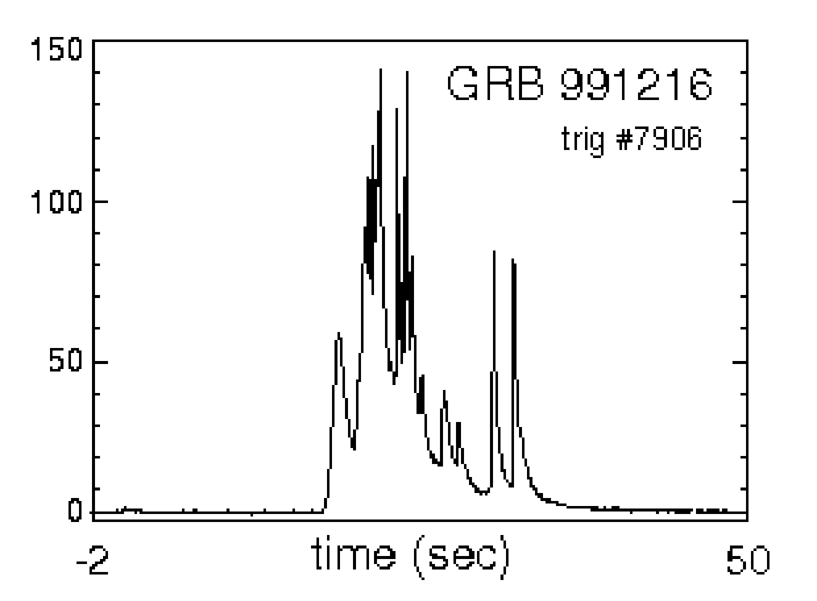
Impulsy promieniowania gamma i rentgenowskiego, pochodzenia kosmicznego, cechowane:

1. losowym rozkładem na niebie
2. częstością występowania 1/dzień
3. dwie klasy: krótkie (t <2s) i długie $t > 2s$ (do kilku minut)
4. pojawiają się na odległościach „kosmologicznych"
5. przy założeniu izotropowej emisji sumaryczna energia eksplozji to nawet 1000 foe (100x hipernowa, $\sim 1 M_{\odot} c^2$!)

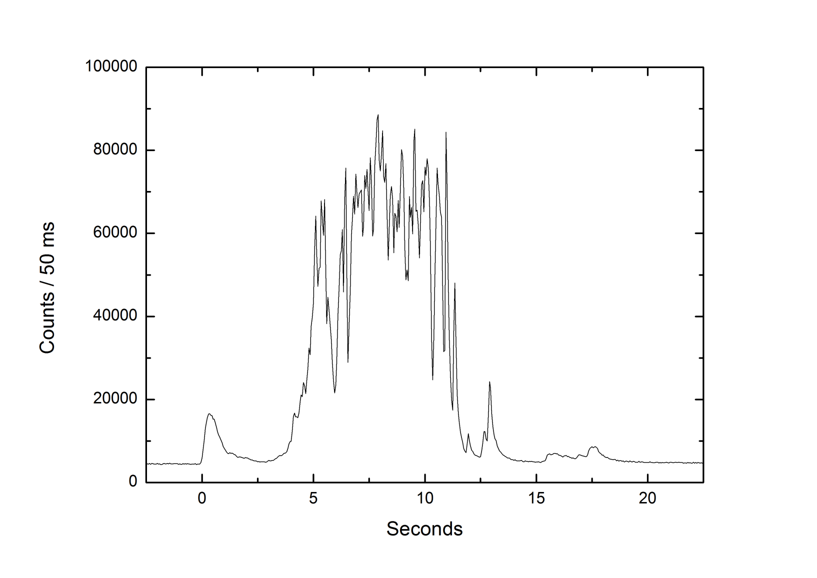
Rozbłyski gamma




BATSE 4B Catalog
NUMBER OF BURSTS
0
20
40
60
80
0.001
0.01
0.1
1.
10.
100.
1000.
T90 (seconds)


150
100
50
0
GRB 991216
trig #7906
-2
time (sec)
50

Rozbłyski gamma



Krótkie rozbłyski gamma

- proponowany mechanizm to *merger* (zlanie się) 2 gwiazd neutronowych (NS+NS) lub układu NS+BH
- układ podwójny zmniejsza rozmiary orbitalne na skutek emisji fal grawitacyjnych (*inspiral*)
- efektem pośrednim jest czarna dziura otoczona dyskiem akrecyjnym
- wzdłuż osi obrotu wytwarzany jest tzw. dżet (*jet*), czyli silnie zogniskowany strumień promieniowania i materii

Długie rozbłyski gamma

- krzywa „blasku” ma postać serii krótkich impulsów — ich liczba i cechy wydają się być zupełnie losowe (nie ma 2 identycznych)
- obecnie jest jasne, że występują w galaktykach, w rejonach formowania się gwiazd
- w wielu przypadkach wykryto opóźnioną poświatę optyczną, często wyglądającą jak supernowa
- obecnie twierdzi się, że strumień fotonów γ jest emitowany w stożku o kącie rozwarcia rzędu $4\pi/100$, co redukuje wymaganą energię do poziomu 10 foe, czyli hipernowej
- materia emitującą fotony porusza się z prędkościami bliskimi c, a czynnik Lorentza $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ jest rzędu kilkuset
- pregenitorami są prawdopodobnie gwiazdy Wolfa-Rayeta, czyli pozbawione H a nawet He jądra masywnych gwiazd — są to więc typy Ib/c ale obserwowane wzdłuż osi rotacji

Wybuch supernowej prowadzący do powstania gwiazdy neutronowej nie jest jedynym możliwym skutkiem kolapsu.

- natychmiast lub z opóźnieniem (poprzez deleptonizację lub akrecję) może powstać czarna dziura
- obecnie jasne jest, że długie rozbłyski gamma (ang: **G**amma **R**ay **B**urst) to także supernowe, obserwowane wzdłuż osi obrotu
- trudno obecnie wykluczyć możliwość, że mechanizm supernowej faktycznie czasem zawodzi, i niektóre masywne gwiazdy po prostu gasną pochłonięte przez czarną dziurę, która powstała w ich w centrum

Hipernowe

Wszystkie anomalnie jasne przypadki supernowych i ich modele zbiorczo określa się mianem hipernowych. Zwykle wiąże się je z:

- powstaniem czarnej dziury w centrum
- bardzo szybką rotacją
- polami magnetycznymi
- asymetrią eksplozji obserwowanej pod uprzywilejowanym kątem
- produkcją jet-ów

Teoria rotujących ciał: rotacja sztywna

Zagadnienie struktury i ewolucji stacjonarnych (niezależnych od czasu, ale z niezerową prędkością), w szczególności „rotujących" samograwitujących ciał będziemy rozpatrywać zaczynając od dwóch skrajnych przypadków:

1. obiekty o stałej gęstości (klasyczna teoria figur równowagi)
2. obiekty nieważkie, o średniej gęstości dążącej do zera, poruszające się w polu masy punktowej (model Roche'a)

Można pokazać, że w przypadku rotacji ze stałą prędkością kątową, ciała o rozkładzie gęstości danym funkcjami Lane-Emdena (politropy) zachowują się jakościowo podobnie do powyższych modeli gdy:

- $n < 0.8$ ($\gamma = 1 + \frac{1}{n} > 2.25$) – jak ciało o stałej gęstości
- jak model Roche'a w przeciwnym przypadku

Wartość $n \simeq 1$ i mniej odpowiada materii z której zbudowane są np: planety lub gwiazdy neutronowe.

Kształt powierzchni obracającego się ciała o stałej gęstości jest w zasadzie nieznany. Okazuję się, że zakładając rotację „sztywną" (jednorodną)

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = const$$

z przyspieszeniem odśrodkowym $\vec{a}$ o potencjale odśrodkowym (centryfugalnym) Φ_c

$$\vec{a} = \Omega^2 \, r \, \vec{e}_r, \qquad \Phi_c = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$$

jednym z rozwiązań jest elipsoida, dla której znany jest wzór na potencjał grawitacyjny (wewnątrz)

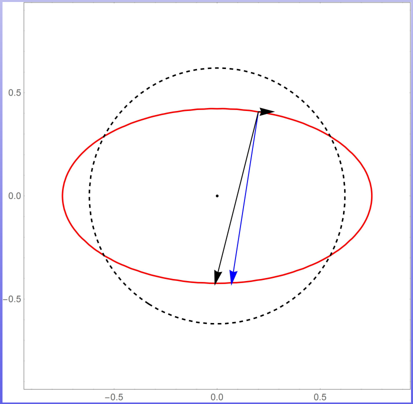
$$\Phi_g = \pi G \rho \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{a}_i^2 - r_i^2) A_i$$

gdzie $\mathbf{a} = \{a, b, c\}$ to półosie elipsoidy, $r = \{x, y, z\}$ oraz

$$A_i = abc \int_0^\infty \frac{du}{(\mathbf{a}_i^2 + u)\sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}}.$$

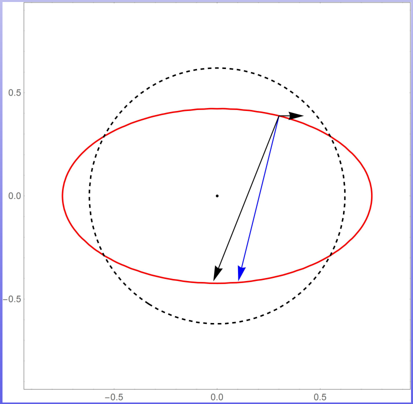
Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona"

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\;\vec{e_r} \parallel \nabla P$$



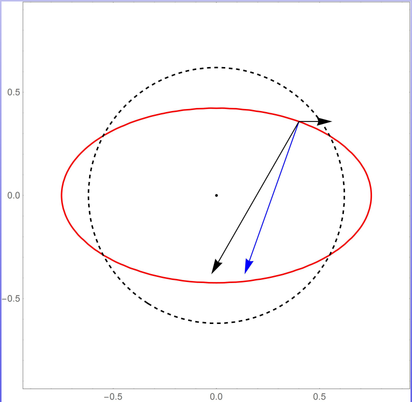
Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\ \vec{e_r} \parallel \nabla P$$



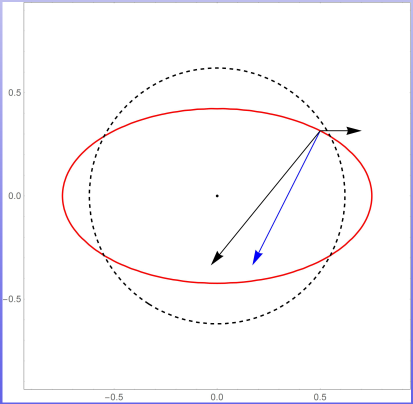
Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona"

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \parallel \nabla P$$



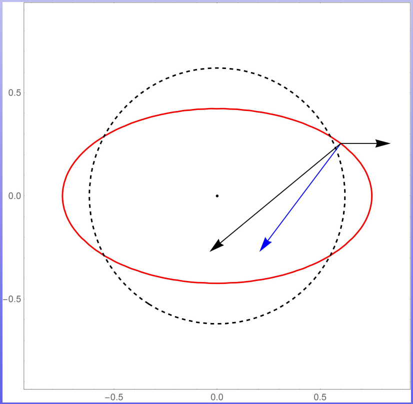
Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\;\vec{e_r} \parallel \nabla P$$



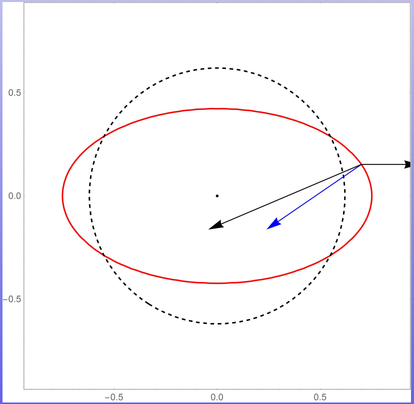
Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \parallel \nabla P$$



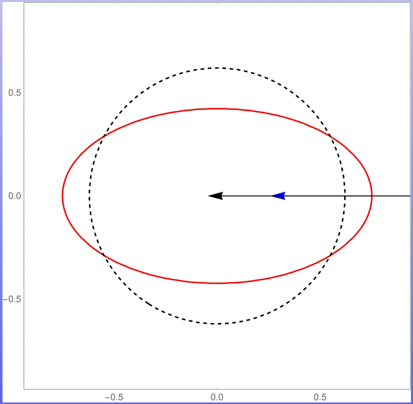
Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e}_r \parallel \nabla P$$



Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r\,\Omega^2\,\vec{e_r} \parallel \nabla P$$



Okazuje się, że równanie równowagi można przepisać w postaci równania elipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdzie:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_x - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_y - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{4}{3}\pi abc = M$$

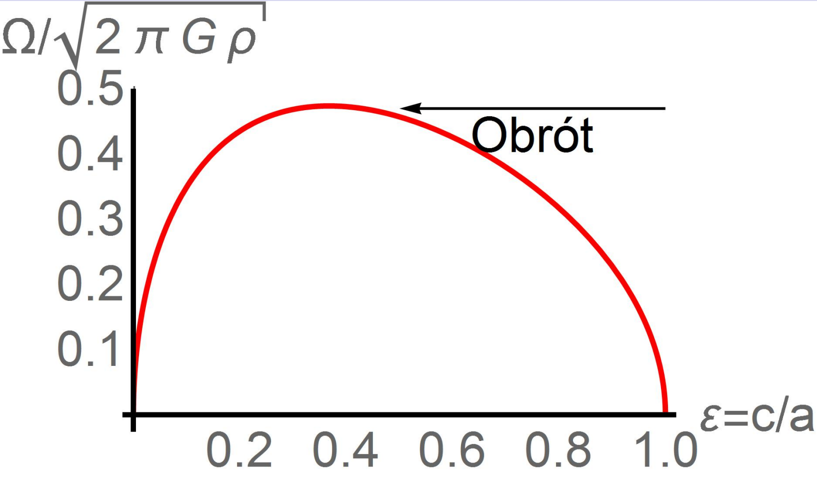
Rozwiązanie powyższego układu dla $a = b$ w zależności od bezwymiarowego parametru

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$$

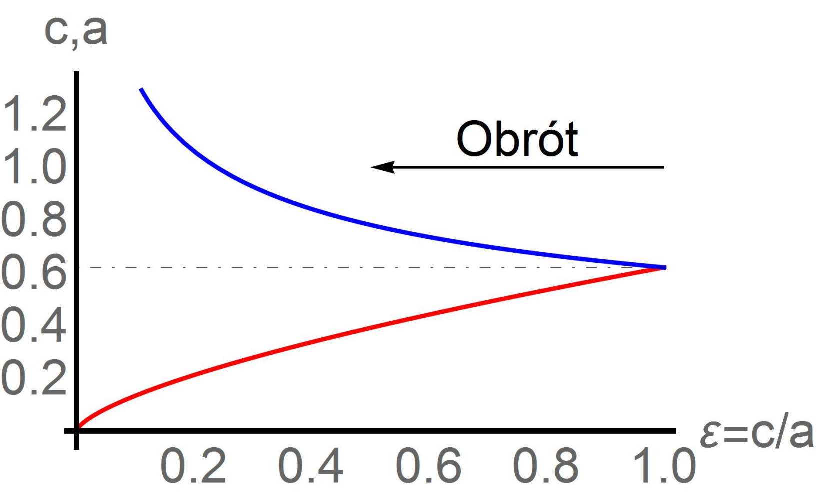
nazywamy *elipsoidą Maclaurina*. Oznaczając spłaszczenie przez $\varepsilon = c/a$ otrzymujemy:

$$\chi = \frac{\varepsilon\left(2\varepsilon^2 + 1\right) \arccos\varepsilon - 3\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

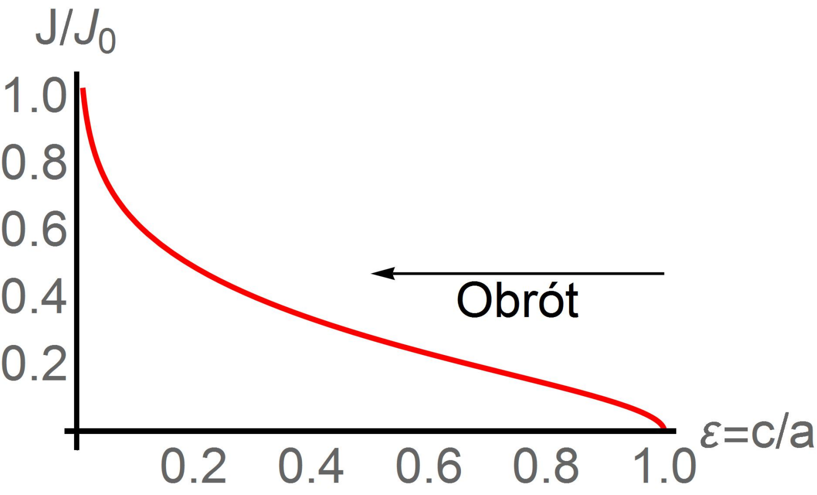
Elipsoida Maclaurina: Ω, wymiary, moment pędu



Elipsoida Maclaurina: Ω, wymiary, moment pędu



Elipsoida Maclaurina: Ω, wymiary, moment pędu



Elipsoidy Maclaurina tworzą ciąg obracających się elipsoid **obrotowych** o stale rosnącym **momencie pędu** J.

- dla $J = 0$ figurą równowagi jest kula
- dla $J < J_c$ prędkość kątowa elipsoidy rośnie, i ulega ona spłaszczeniu
- dla $J = J_c$ elipsoida Maclaurina osiąga maksymalną możliwą prędkość kątową (dla Ziemi, $\rho \simeq 5$ g/cc, $T_{obr} \simeq 15$ minut)

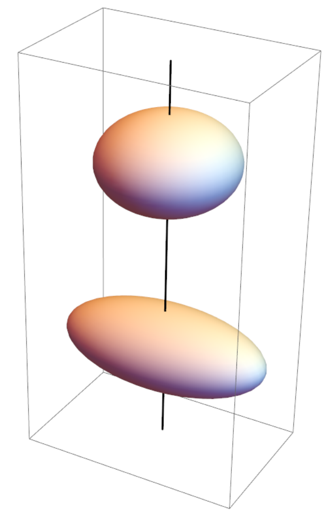
$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \simeq 0.22, \quad \varepsilon \simeq 0.36767$$

- dalsze zwiększanie momentu pędu powoduje jeszcze większe spłaszczenie, ale od tego miejsca prędkość kątowa Ω **maleje**
- dla $J \to \infty$ elipsoida Maclaurina degeneruje się do nieskończenie cienkiego „placka" który praktycznie pozostaje w spoczynku

Zanim jeszcze elipsoida Maclaurina osiągnie maksymalną prędkość kątową dochodzi do *bifurkacji* (spontanicznego złamania symetrii) w kierunku trójosiowej *elipsoidy Jacobiego*.

Powyżej punktu bifurkacji istnieją 2 rozwiązania o tym samym momencie pędu.

Ciekawa wizualizacja bifurkacji: Jos Leys/Etienne Ghys, The shape of Planet Earth



Limity stabilności rotacyjnej

Używa się kilku miar stopnia rotacji układów samograwitujących:

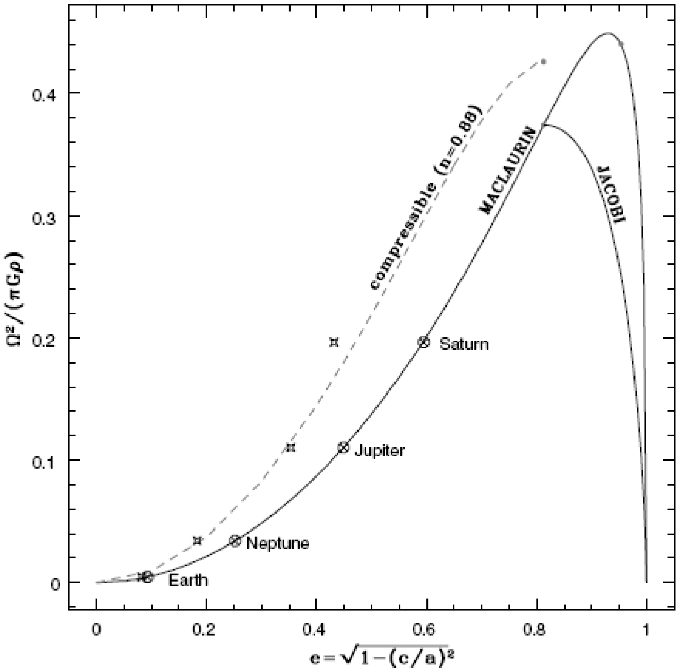
- bezwymiarowa prędkość kątowa

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho}$$

- moment pędu J
- stosunek rotacyjnej energii kinetycznej E_k do grawitacyjnej energii wiązania E_g

$$\beta = \frac{E_k}{|E_g|}$$

  Z twierdzenia wirialnego $0 \leqslant \beta < 0.5$. Punkt bifurkacji do elipsoidy Jacobiego pojawia się dla $\chi = 0.187, \beta = 0.1375$, niestabilność dynamiczna elipsoidy Jacobiego $\beta \simeq 0.16$, Maclaurina $\beta \simeq 0.27$.



0.4
0.3
0.2
0.1
0
$\Omega^2/(\pi G\rho)$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$e=\sqrt{1-(c/a)^2}$
compressible (n=0.88)
MACLAURIN
JACOBI
Saturn
Jupiter
Neptune
Earth

Analogia z modelem kroplowym jąder atomowych

Warto przy okazji wspomnieć o równolegle rozwijanej analogicznej teorii rotującej cieczy z napięciem powierzchniowym.

- motywacją model kroplowy jądra atomowego
- odpychanie elektrostatyczne zamiast przyciągania
- napięcie powierzchniowe daje energię wiązania

Przyrównując energię napięcia powierzchniowego do grawitacyjnej dla jednorodnej kuli mamy

$$4\pi R^2 \sigma = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \quad \rightarrow \quad M = \frac{5\sigma}{G\rho}$$

Dla wody napięcie powierzchniowe $\sigma \simeq 0.072 N/m$ co daje przewagę sił samograwitacji już dla $M > 1000$ ton ($R > 10$ metrów). Dla materii jądrowej $\sigma \sim 1.25$ MeV/fm^2, czyli $M > 10^{10}$ kg (masa małej asteroidy).

Pole prędkości $\mathbf{v}$ (v_x, v_y, v_z): $v_x = -q\,\zeta\,y$, $v_y = (1-q)\,\zeta\,x$, $v_z = 0$,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \zeta\,\mathbf{e}_z$$

Z równania elipsoidy wynika wektor normalny

$$G(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = \nabla G = (2\,x/a^2, 2\,y/b^2, 2\,z/c^2)$$

Warunek, że ciecz „nie wypływa" z elipsoidy, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, daje

$$q = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \qquad 1-q = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy"– linii prądu:

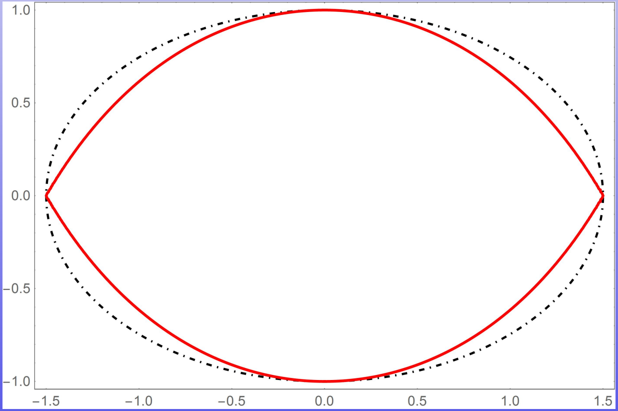
$$\begin{aligned} v_x &= \tfrac{dx}{dt} = -q\,\zeta\,y \\ v_y &= \tfrac{dy}{dt} = (1-q)\,\zeta\,x \end{aligned}$$

Podstawienie $x = A\,e^{i\Omega t}$, $y = B\,e^{i\Omega t}$ daje związek pomiędzy wirowością ζ `elipsoidy Dedekinda` a prędkością kątową $\mathbf{\Omega}$ *elipsoidy Jacobiego*

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q\,\zeta \\ (1-q)\,\zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \qquad \zeta = \frac{a^2+b^2}{a\,b}\,\Omega$$

Zakładając, że cała masa rotującego obiektu jest skupiona w centrum, otrzymujemy równanie powierzchni:

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = const = \frac{GM}{R_p}$$



Fragmentacja kolapsujących obiektów

Scieżka Maclaurina

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzą na:
  - - ścieżkę Roche'a
  - - ścieżkę Maclaurina

Scieżka Roche'a

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro lub obiekty dysku wchodzą na:
  - - ścieżkę Roche'a
  - - ścieżkę Maclaurina

Rotacja różniczkowa

Równania Eulera

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{g} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \tag{1b}$$

- interesują nas rozwiązania, dla których prędkość $\vec{v}$ jest funkcją wyłącznie współrzędnych (nie zależy od czasu)

Pochodna substancjonalna (operator $v\vec{\nabla}$)

$$\frac{d\vec{v}(t, x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v}$$

Równanie „Bernouliego” (Gromeki-Lamba)

Korzystając z tożsamości

$$(v\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

równanie Eulera w przypadku stacjonarnym można przepisać jako:

$$\nabla(h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Jeżeli wyraz po prawej jest równy zeru lub jest gradientem pewnej funkcji, otrzymujemy **równanie Bernouliego**

$$h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2 = const.$$

Jednym z przypadków, kiedy można wprowadzić równanie Bernouliego jest tzw. „czysta rotacja”:

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z) r \ \vec{e}_\phi .$$

W ogólności stacjonarne pole prędkości $\vec{v}$ musi spełniać równanie

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})) = 0.$$

Podstawienie czystej rotacji do powyższego równania daje:

$$2r\Omega(r, z)\frac{\partial \Omega(r, z)}{\partial z} = 0.$$

Przykład pola prędkości, które **nie jest** rotacją, a spełnia powyższe równanie, znajdujemy w elipsoidach Dedekinda.

Grawitacja powierzchniowa (ang. effective gravity) **G** to suma natężenia pola grawitacyjnego $\vec{g}$ i przyspieszenia odśrodkowego

$$\vec{G} = \vec{g} + r\,\Omega(r,z)^2\,\vec{e}_r. \tag{2}$$

Dla samograwitującego ciała w stanie stacjonarnym o czystej rotacji poniższe zdania są równoważne:

(i) *Rotacja jest cylindryczna:* $\Omega = \Omega(r)$*.*

(ii) *Powierzchnie* $\rho = const$ *and* $p = const$ *pokrywają się.*

(iii) *Grawitacja powierzchniowa* $\vec{G}$ *ma potencjał*

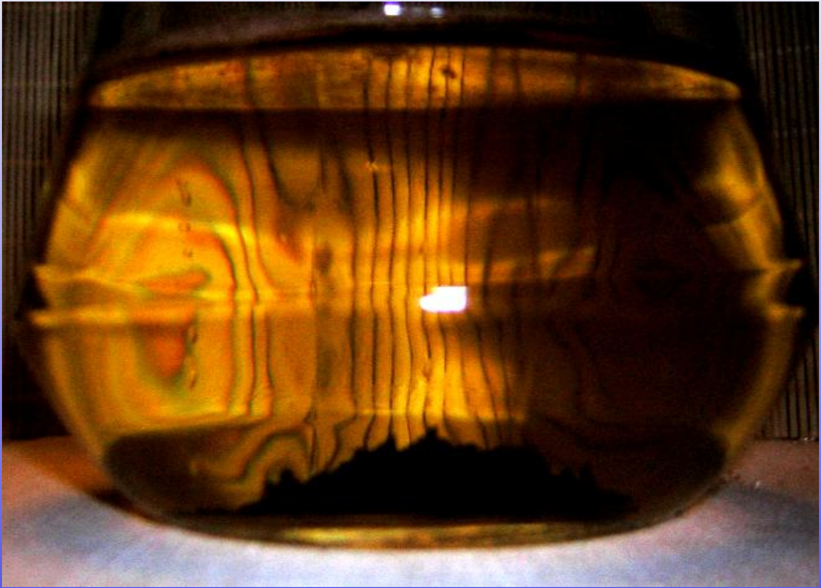
(iv) *Wektor* $\vec{G}$ *jest prostopadły do izobar* $P = const$ *(w szczególności do powierzchni* $P = \rho = 0$ *).*

Obiekt spełniający powyższe założenia nazywamy *barotropą*. Spełnia ona równanie

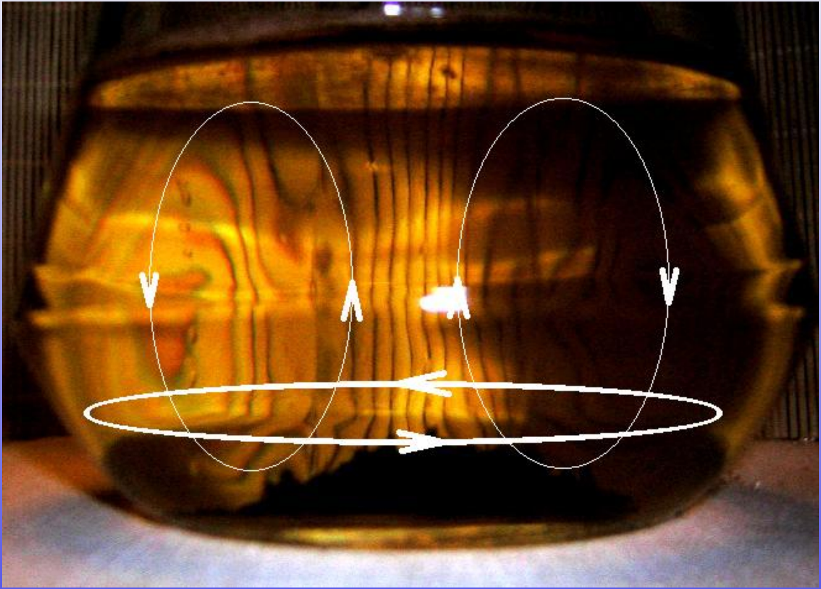
$$h(r,z) + \Phi_g + \Phi_c = C,$$

gdzie $\Phi_g = \int \Omega^2 r dr$ to *potencjał odśrodkowy.*

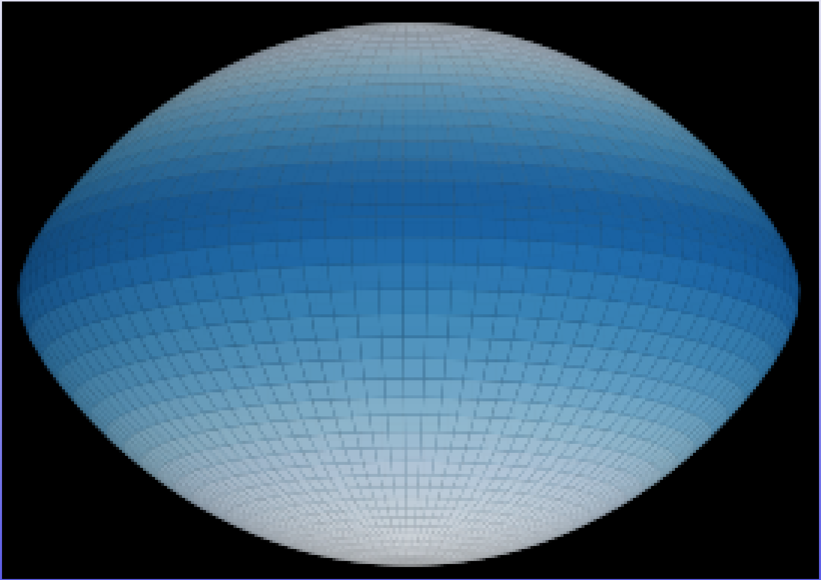
Cyrkulacja południkowa



Cyrkulacja południkowa



Cyrkulacja południkowa



Paradoks von Zeipela, rotacja 1D

Dołączenie do opisu równowagi hydrostacjonarnej barotropy, równania na transport energii daje układ równań który jest sprzeczny. Sytuację określamy jako *paradoks von Zeipela*.
Sytuacja ta jest powszechnie ignorowana w astrofizyce, i modelowanie rotujących „gwiazd” rozbija się na 2 kategorie:

- rotujące barotropy z $\Omega = \Omega(r)$, które są w równowadze hydrostatycznej, ale nie termicznej
- obiekty z rotacją powłokową (ang: shellular rotation, 1D) z $\Omega = \Omega(m) \equiv \Omega(\sqrt{r^2 + z^2})$, które nie są w równowadze mechanicznej, ale są w równowadze termicznej

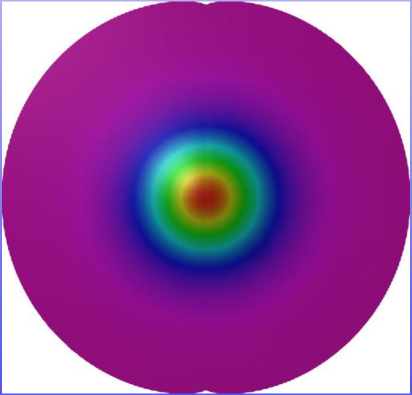
Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r,z) = h_0(\sqrt{r^2+z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

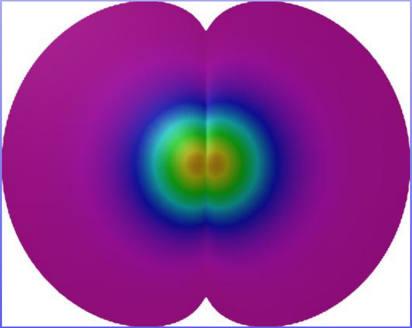


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r,z) = h_0(\sqrt{r^2+z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

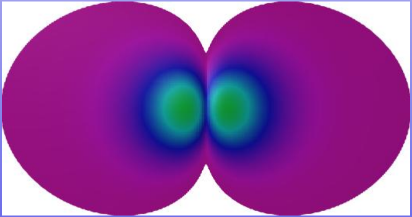


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

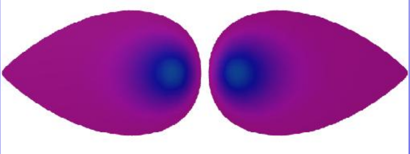


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

1. topologia typu torusa
2. punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
3. inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r,z) = h_0(\sqrt{r^2+z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



Struktura białych karłów i gwiazd neutronowych

Gaz Fermiego dla $T \to 0$

Aby w sposób nie budzący wątpliwości wyznaczyć równanie stanu (EOS) wychodzimy od potencjału Ω (energii swobodnej Landaua):

$$\Omega(T, V, \mu) = -kT \frac{V}{h^3} g \int_0^\infty 4\pi p^2 \ln\left(1 + e^{\frac{\mu - E}{kT}}\right) dp$$

Ponieważ $\Omega = -PV$ powyższa całka daje ciśnienie w dowolnej temperaturze. Wynik wyraża się przez funkcje specjalne: uogólnione całki Fermiego-Diraca. Jeżeli $T \to 0$, to rozkład Fermiego-Diraca przyjmuje postać funkcji Heaviside'a (skoku jednostkowego), natomiast wielka funkcja rozdziału upraszcza się do:

$$\ln\left(1 + e^{\frac{\mu - E}{kT}}\right) \simeq \begin{cases} \frac{\mu - E}{kT} & \text{dla} \quad E < \mu \\ 0 & \text{dla} \quad E > \mu \end{cases}$$

Teraz widać, że kT się skraca, a ciśnienie P nie zależy od temperatury.

Ciśnienie P dla $T \to 0$ wyraża się całką

$$P = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 (\mu - E)\, dp$$

gdzie $E^2 = p^2 + m^2$, $\mu^2 = p_F^2 + m^2$. Całkę da się obliczyć

$$P = \frac{8\pi m^4 c^5}{h^3} f\left(\frac{p_F}{mc}\right)/24, \quad f(x) = (2x^3 - 3x)\sqrt{x^2+1} + 3\, arsinh\, x$$

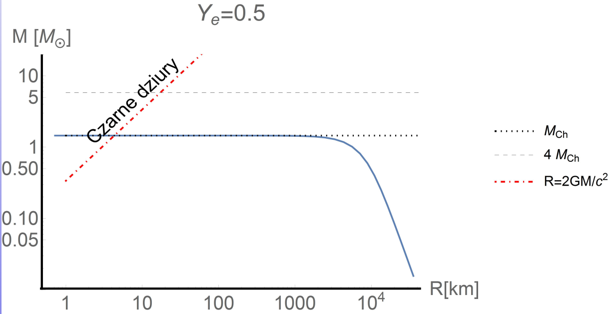
Analogicznie, gęstość energii (wliczając mc^2 !) to

$$\varepsilon = \frac{8\pi m^4 c^5}{h^3} g(x)/8, \quad g(x) = (2x^3 + x)\sqrt{x^2+1} - arsinh\, x$$

Gęstość cząstek jest najłatwiejsza do obliczenia:

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3}\frac{p_F^3}{3}, \qquad n_e = n_B Y_e \simeq \frac{\rho Y_e}{m_p}$$

Równanie stanu zdegenerowanego gazu elektronowego pozwala rozwiązać newtonowskie równania struktury, gdyż pęd Fermiego w trywialny sposób zależy od gęstości. Zależność promień- masa wygląda następująco:

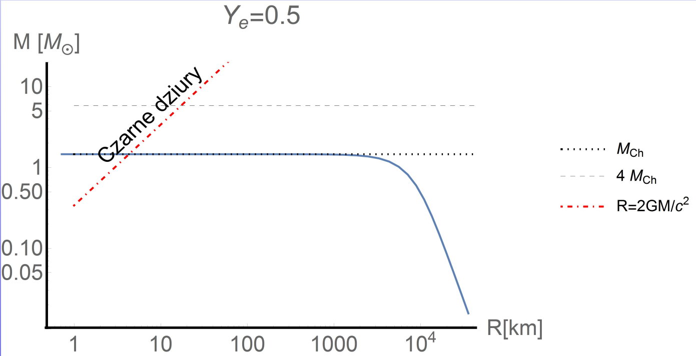


Ponieważ dla $x \to \infty$ $f(x) \to 2x^4$, otrzymujemy model politropowy z $n = 3$, dla którego:

$$M_{Ch} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}(-w_3'(z_3)z_3^2)\,Y_e^2\,\frac{m_P^3}{m_p^2} \simeq 1.46 M_\odot\ (2Y_e)^2$$

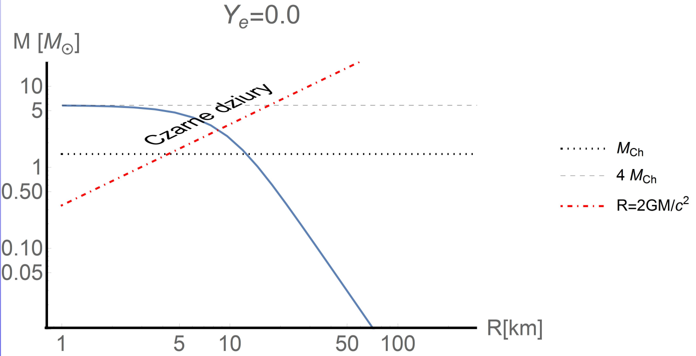
gdzie w nawiasie mamy zero i nachylenie w zerze f. Lane-Emdena, $m_P = \sqrt{\hbar c/G}$ to masa Plancka, a m_p – masa protonu (dokładniej: atomowa jednostka masy).

Ze wzoru ma M_{Ch} wynika, iż nie zależy ona od typu fermionów o spinie $1/2$ wytwarzających ciśnienie (elektrony, neutrony, neutrina). Np: masa graniczna kuli zbudowanej z neutronów to po prostu $4M_{Ch}$, ale tylko z tego powodu, iż neutronów jest 2 razy więcej.



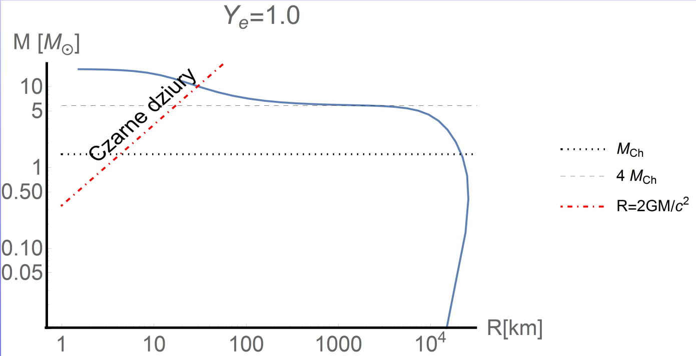
Powyższe wyniki są błędne i stanowią jedynie ilustrację, uzasadniającą użycie Ogólnej Teorii Względności (OTW).

Ze wzoru ma M_{Ch} wynika, iż nie zależy ona od typu fermionów o spinie 1/2 wytwarzających ciśnienie (elektrony, neutrony, neutrina). Np: masa graniczna kuli zbudowanej z neutronów to po prostu $4M_{Ch}$, ale tylko z tego powodu, iż neutronów jest 2 razy więcej.



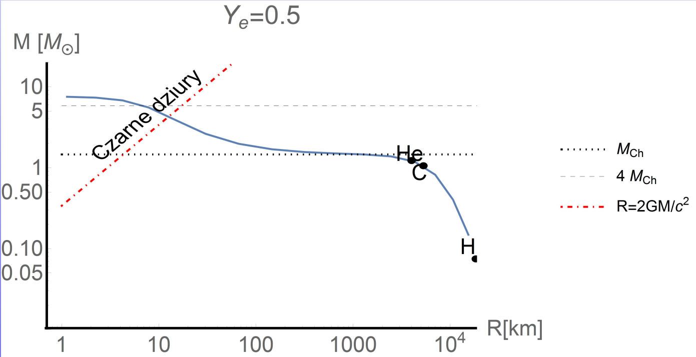
Powyższe wyniki są błędne i stanowią jedynie ilustrację, uzasadniającą użycie Ogólnej Teorii Względności (OTW).

Ze wzoru ma M_{Ch} wynika, iż nie zależy ona od typu fermionów o spinie $1/2$ wytwarzających ciśnienie (elektrony, neutrony, neutrina). Np: masa graniczna kuli zbudowanej z neutronów to po prostu $4M_{Ch}$, ale tylko z tego powodu, iż neutronów jest 2 razy więcej.



Powyższe wyniki są błędne i stanowią jedynie ilustrację, uzasadniającą użycie Ogólnej Teorii Względności (OTW).

Ze wzoru na M_{Ch} wynika, iż nie zależy ona od typu fermionów o spinie $1/2$ wytwarzających ciśnienie (elektrony, neutrony, neutrina). Np: masa graniczna kuli zbudowanej z neutronów to po prostu $4M_{Ch}$, ale tylko z tego powodu, iż neutronów jest 2 razy więcej.



Powyższe wyniki są błędne i stanowią jedynie ilustrację, uzasadniającą użycie Ogólnej Teorii Względności (OTW).

Metryka czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej:

$$ds^2 = g_{tt}(r)c^2dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + R(r)^2 \left(sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right)$$

Wybór funkcji $R(r)$ definiuje sposób mierzenia współrzędnej radialnej. Dla $R = r$ wzory na obwód okręgu i pole sfery o środku w centrum są identyczne jak w płaskiej przestrzeni.
Funkcje g_{tt} i g_{rr} muszą zostać wyliczone z równań Einsteina. Znając z góry wynik, możemy ułatwić sobie życie przedefiniowaniem

$$g_{tt} = -\left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right), \qquad g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2\ r}}.$$

Funkcja Φ to odpowiednik newtonowskiego potencjału grawitacyjnego, natomiast $m(r)$ masy zawartej wewnątrz sfery promieniu r.

Równania Einsteina można zapisać w niewiele mówiącej studentowi formie:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\; T_{\mu\nu}$$

Tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$ wyliczamy z metryki $g_{\mu\nu}$, a tensor energii-pędu $T_{\mu\nu}$ płynu to:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}.$$

W gwieździe materia spoczywa, co daje np: z warunku normalizacji $U^\mu U_\mu = -1$ czteroprędkość U_μ

$$U_\mu = \{\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}, 0, 0, 0\}.$$

Obliczenie tensora $G_{\mu\nu}$ jest pracochłonne, i można wykonać je np: pakietem **ccgrg**, Copernicus Center General Relativity Package,
http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/8848/

Równania TOV

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(m + \mathbf{4\pi r^3 P/c^2})(\rho + \mathbf{P/c^2})}{r(r - \frac{\mathbf{2Gm}}{\mathbf{c^2}})} \tag{3a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \qquad \varepsilon \equiv \rho c^2, \; \rho \neq m_p n_B \tag{3b}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G(m + \mathbf{4\pi r^3 P/c^2})(1 + \mathbf{2\Phi/c^2})}{r(r - \frac{\mathbf{2Gm}}{\mathbf{c^2}})} \tag{3c}$$

Dla porównania wersja newtonowska ($c \to \infty$):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \tag{4a}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{4b}$$

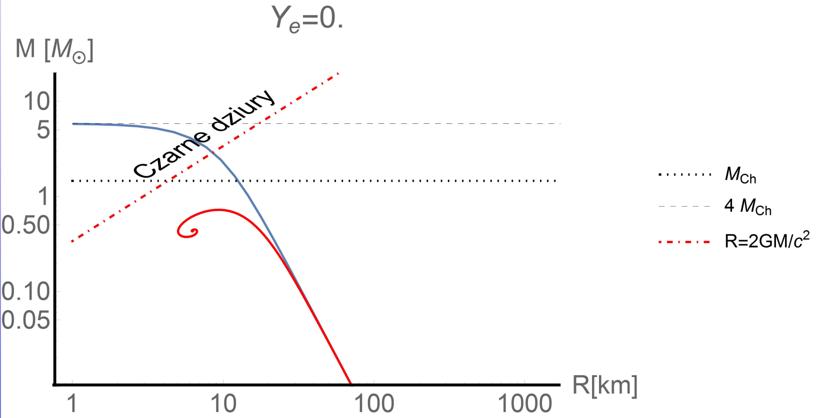
$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \tag{4c}$$

- w przyciąganiu grawitacyjnym bierze udział całkowita energia ε, włączając m.in: masę „spoczynkową" (barionową) i energię kinetyczną
- ciśnienie powoduje dodatkowe przyciąganie
- grawitacja wpływa na geometrię, co istotnie zmienia opis gdy $r \sim \frac{2GM}{c^2}$

OTW **musimy** wziąć pod uwagę dla:

1. gwiazd neutronowych
2. supernowych implozyjnych
3. w kosmologii
4. w ewolucji gwiazd o masach $M \sim 100 M_\odot$ i większych, gdzie ciśnienie promieniowania dominuje
5. soczewkowaniu grawitacyjnym
6. emisji fal grawitacyjnych
7. **czarnych dziur** i procesów zachodzących w ich pobliżu

TOV dla gazu neutronowego



Dla mas obiektów zwartych $M \gg 2M_\odot$ nie są znane siły zdolne utrzymać równowagę hydrostatyczną. Musi powstać *czarna dziura*:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2\ r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2\ r}} dr^2 + r^2 \left(sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right)$$

Wielkość $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ nazywamy promieniem Schwarzchilda lub grawitacyjnym. Powierzchnia określona jako $r = r_g$ to *horyzont zdarzeń*. W astrofizyce spotykamy je w formie:

- o masach gwiazdowych, kilka-kilkanaście $M_\odot$; powstają w kolapsie i zderzeniach gwiazd neutronowych
- supermasywne, o masach milionów $\mathrm{M}_\odot$ i więcej; występują w centrach galaktyk

Proces pochłaniania materii przez cz. dz. jest efektywnym mechanizmem konwersji masy w energię, z wydajnością do $\sim$10%.