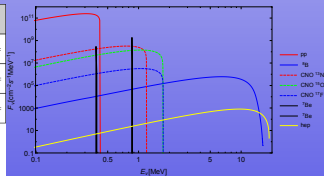
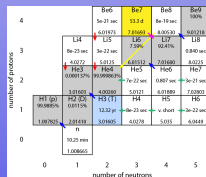
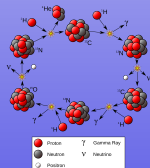


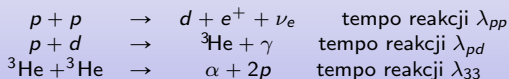
# Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki UJ

17 maja 2016





Obliczamy tempo zmian ilości protonów  $n_p$ , deuteronów  $n_d$ , jąder helu-3  $n_3$  oraz cząstek alfa  $n_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d + 2\lambda_{33}n_3^2 \\
 \dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d \\
 \dot{n}_3 &= +\lambda_{pd}n_p n_d - 2\lambda_{33}n_3^2 \\
 \dot{n}_\alpha &= \lambda_{33}n_3^2
 \end{aligned}$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

$$\sum_{i=1}^4 A_i n_i = n_p + 2n_d + 3n_3 + 4n_\alpha = \text{const},$$

lub równoważnie:

$$\dot{n}_p + 2\dot{n}_d + 3\dot{n}_3 + 4\dot{n}_\alpha = 0.$$

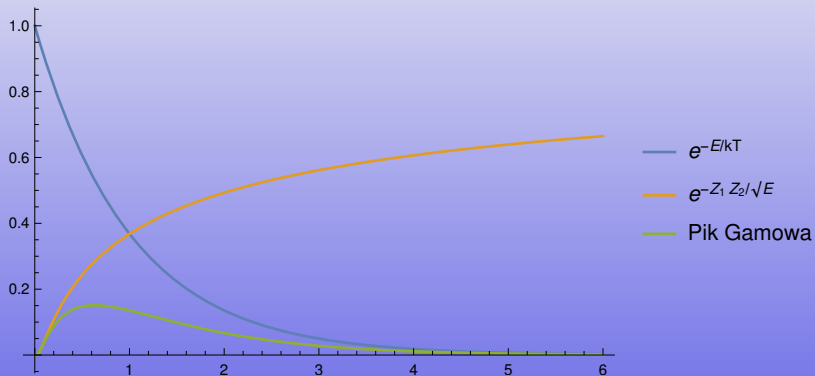
Wyznaczenie współczynników określających szybkość reakcji wymaga wykonania kilku kroków:

- 1 obliczenie lub zmierzenie przekroju czynnego na reakcję, np:  $\sigma_{pp}$
- 2 uwzględnienie poprawek „kulombowskich”
- 3 uśrednienie w warunkach równowagi termicznej: gazu doskonałego

W obliczeniach tempa reakcji często decydujące są dwa przeciwstawnie działające wyrazy, zależne od energii  $E = Mv^2/2$  zderzających się jąder w układzie środka masy:

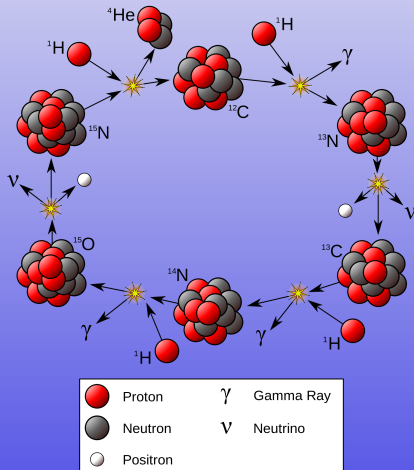
$$\lambda \propto \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} \sigma(E) E dE = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} S(E) e^{-\frac{2\pi}{\hbar} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{2E/M}}} dE$$

- rozkład Boltzmann  $e^{-\frac{E}{kT}}$ : ilość cząstek o dużych energiach maleje wykładniczo (tzw: ogon termiczny)
- odpychanie elektrostatyczne:  $e^{-\text{const} \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{E}}}$  – im większa energia, tym większe prawdopodobieństwo tunelowania i zajścia reakcji



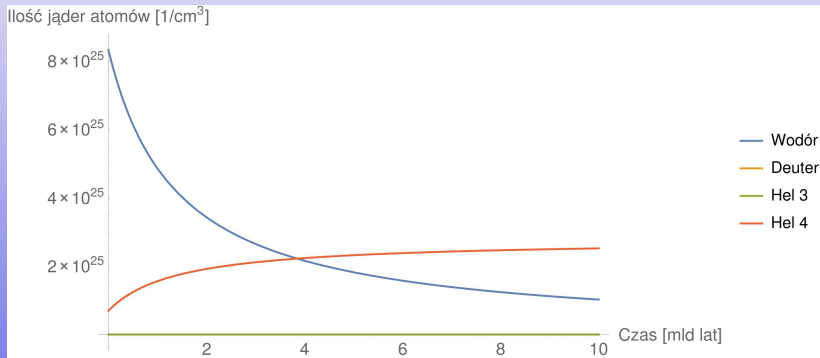
Zupełnie odmiennym od opisanego wcześniej mechanizmem spalania wodoru jest cykl katalityczny CNO. Dominuje w gwiazdach o masie większej niż słoneczna.

## Cykl CNO



- Gdyby jedyną rolą reakcji termojądrowych było produkowanie energii, to wystarczyłoby obliczyć jej wydajność.
- Reakcje jądrowe zmieniają także powoli skład izotopowy/chemiczny materii
- powyższe tak naprawdę decyduje o ewolucji gwiazdy w długiej skali czasowej: życia i śmierci gwiazdy.
- Także wszystkie neutrino emitowane przez Słońce są pochodzenia nuklearnego.

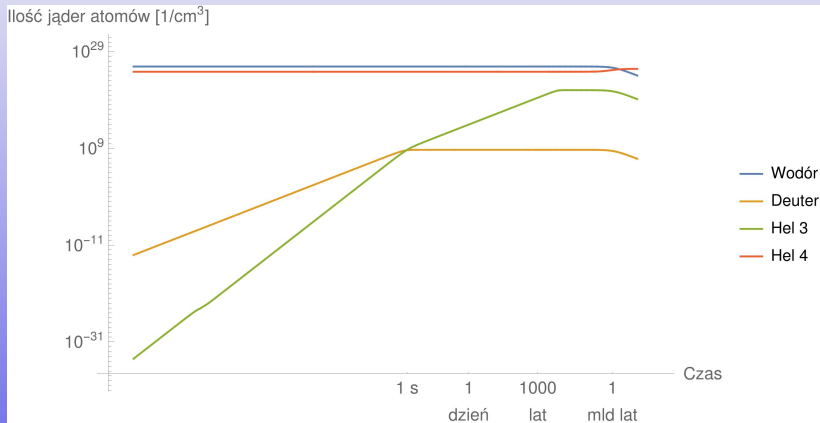
# Spalanie wodoru w cyklu ppI



$T = 15 \times 10^6 \text{ K}$ ,  $\rho = 150 \text{ g/cc}$ , tempo reakcji

<http://download.nucastro.org/astro/reaclib/>

# Spalanie wodoru w cyklu p-p



$T = 15 \times 10^6$  K,  $\rho = 150$  g/cc, tempo reakcji  
<http://download.nucastro.org/astro/reaclib/>



Obliczenie widma energetycznego neutrin słonecznych wymaga bardzo szczegółowego rozpatrzenia spalania wodoru:

- cykl *ppI*
- cykl *ppII*
- cykl *ppIII*
- cykl CNO

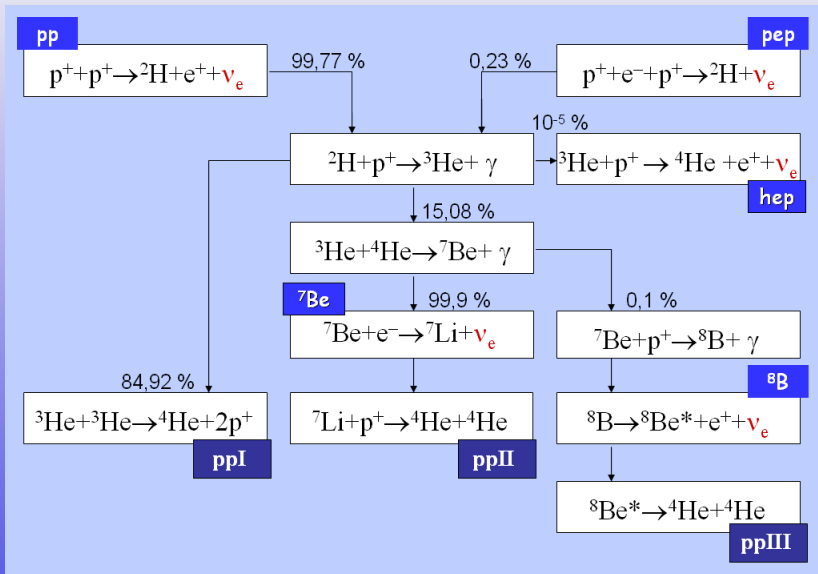
Wszystkie neutrino (w tym *pp* i *hep*) pochodzą z rozpadów  $\beta$  jąder. W Słońcu występują dwa typy takich reakcji, na przykład:

- 1 *ppII*: wychwytywanie elektronu (*neutrino berylowe, pep*)



- 2 *ppIII*: rozpad  $\beta^+$  (*neutrino borowe, pp, hep, CNO*)

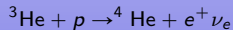




# Typy widma neutrinowego ze Słońca

	ciągłe	liniowe
rozpad $\beta^+$	${}^8\text{B}$ , $pp$ , $hep$ , CNO	—
wychwyt $\epsilon^-$	—	$pep$ , ${}^7\text{Be}$

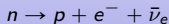
- Reakcja  $hep$  jest analogiczna do  $pp$ :



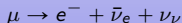
- W cyklu CNO pojawiają się neutrino z rozpadów  ${}^{13}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$  oraz  ${}^{17}\text{F}$ .

Funkcyjną postać widma neutrinowego można łatwo zrozumieć analizując rachunek dotyczący prostszych procesów, np:

- rozpad  $\beta$  neutronu:



- rozpad  $\beta$  mionu:



W ogólności prawdopodobieństwo rozpadu  $\beta$  wynosi:

$$\frac{2\pi}{\hbar} \int \langle in|H|out \rangle^2 \delta(E_{in} - E_{out}) dN_e dN_\nu dN_{out}$$

Z rozpadu  $\mu$  otrzymujemy wartość stałej sprzężenia oddziaływań słabych, stałą Fermiego  $G_F$ , natomiast z czasu rozpadu neutronu wartość  $\langle in|H|out \rangle^2$  dla procesów z udziałem protonów, neutronów, elektronów i neutrin. Dalej zakładam, że  $\langle in|H|out \rangle^2 \propto M^2$  jest znaną wielkością liczbową.

Zakładam, że proton i neutron spoczywa, czyli ilość stanów końcowych protonu wynosi 1. Pozostaje całkowanie po ilości stanów końcowych elektronów  $dN_e = d^3 p_e / h^3$  i neutrin  $dN_\nu = d^3 p_\nu / h^3$ :

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - E_\nu) d^3 p_e d^3 p_\nu.$$

Przechodzimy do układu sferycznego i całkując po wszystkich kierunkach elektronów i neutrin mamy:

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - E_\nu) 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu.$$

Dla elektronów  $E_e^2 - p_e^2 = m_e^2$ , dla neutrin  $E_\nu = p_\nu$  ( $c = 1$ ). Całkowanie delty Diraca sprowadza się do wyrugowania energii elektronu, bądź neutrina. W teorii rozpadu  $\beta$  na ogół ruguje się  $E_\nu$ , my robimy odwrotnie:

$$E_e = Q - E_\nu, \quad \text{gdzie: } Q = (m_n - m_p)c^2$$

czyli całkowite tempo rozpadu jest proporcjonalne do:

$$\lambda \propto \int_0^{Q-m_e} \sqrt{(Q - E_\nu)^2 - m_e^2} (Q - E_\nu) E_\nu^2 dE_\nu$$

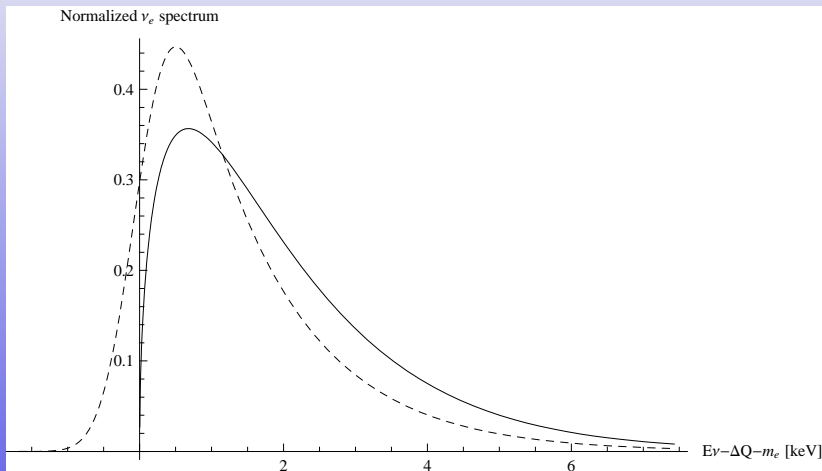
Wynik uogólniony na przypadek, gdy elektrony tworzą gaz Fermiego:  
Wychwył elektronu:

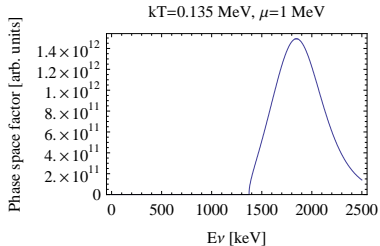
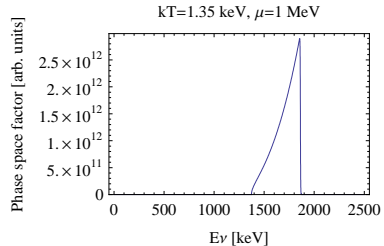
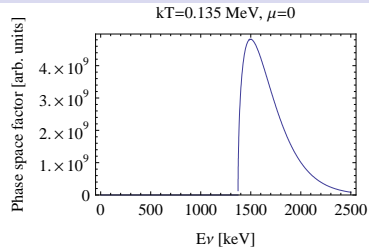
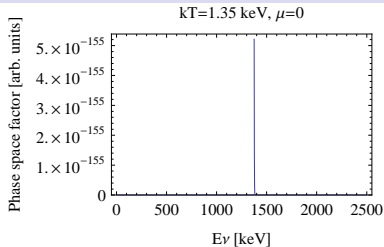
$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \frac{\varepsilon_\nu^2 (\varepsilon_\nu - \Delta Q) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp[(\varepsilon_\nu - \Delta Q - \mu)/kT]} \Theta(\varepsilon_\nu - \Delta Q - m_e) \quad (1)$$

Rozpad  $\beta^+$ :

$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \frac{\varepsilon_\nu^2 (\Delta Q - \varepsilon_\nu) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp(\varepsilon_\nu - \Delta Q + \mu)/kT} \Theta(\Delta Q - m_e - \varepsilon_\nu) \quad (2)$$

W przypadku Słońca gaz elektronowy jest niezdegenerowany ( $\mu = 0$ ), a jego temperatura znacznie niższa niż różnice mas jąder ( $\Delta Q \gg kT$ ). Powoduje to, że pierwsze widmo wygląda prawie jak  $\delta$  Diraca, natomiast drugie to prosta funkcja algebraiczna (licznik we wzorze powyżej).

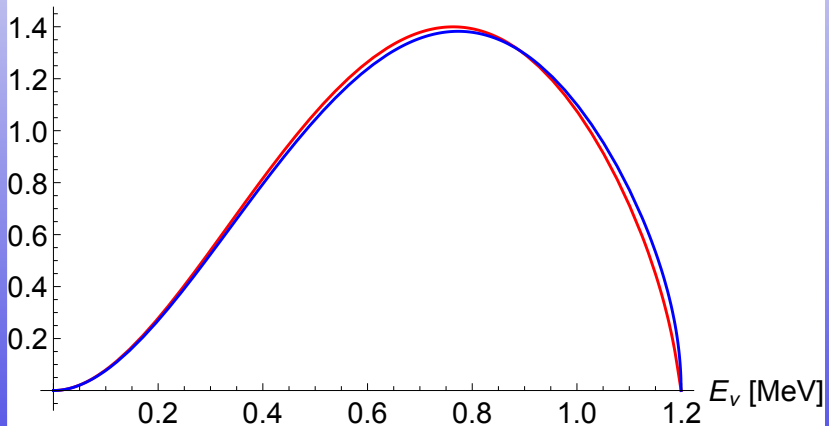




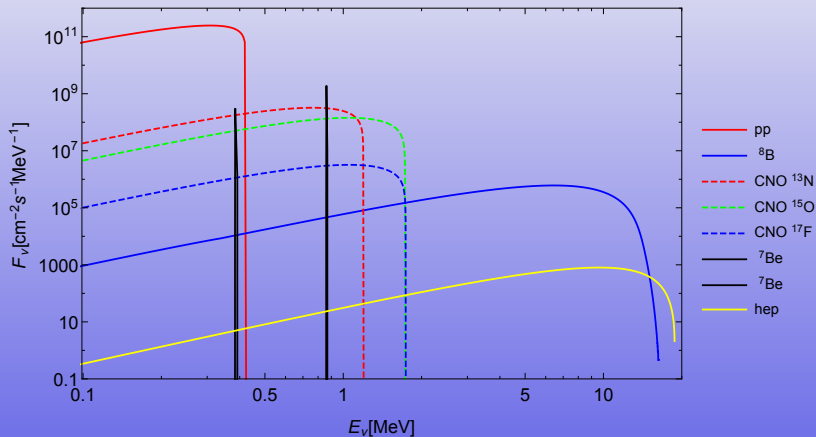


$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \varepsilon_\nu^2 (\Delta Q - \varepsilon_\nu) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}$$

Znormalizowane do 1 widmo  $\nu_e$  z rozpadu  $^{13}\text{N}$



# Kompletne (prawie) widmo neutrin słonecznych



Problemem neutrin słonecznych nazywamy duży (aż do 50%) deficyt neutrin obserwowanych na Ziemi w porównaniu z teorią budowy gwiazdy.

Współczesne wyjaśnienie:

- neutrina są produkowane zgodnie z modelem Słońca i znanymi sieciami reakcji termojądrowych
- neutrina posiadają masę
- produkowane są w stanie kwantowym  $\nu_e$ , który nie posiada dobrze określonej masy, a propagują się jako stany własne masy, czyli są superpozycją  $\nu_e, \nu_\nu, \nu_\tau$
- po drodze od centrum stany kwantowe ulegają mieszanii, zarówno w Słońcu (poprzez oddziaływanie z elektronami, tzw. oscylacje w materii), jak i w próżni, a także wewnątrz Ziemi
- część neutrin, które narodziły się jako elektronowe, staje się mionowymi/taonowymi i nie jest wykrywana w niektórych detektorach

Obecnie uważa się, że problem neutrin słonecznych został (prawie) rozwiązany.

- 1 neutrina są produkowane i wykrywane jako  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
- 2 neutrina poruszają się jako stany własne masy:  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$
- 3 człon kinetyczny w funkcji Lagrange'a ma postać odpowiednio:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

lub:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Macierz  $3 \times 3$  opisującą przejście od stanów o określonej masie do stanów o określonym zapachu nazywamy *macierzą mieszania neutrin*.

Aby nie zaciemniać opisu, ograniczymy się do mieszania  $\nu_e$  i  $\nu_\mu$ :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Ponieważ neutrina są skrajnie relatywistyczne, możemy uprościć zależność:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = p \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \simeq p \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p^2} \right) = p + \frac{m^2}{2p}, \quad E \simeq p$$

Neutrina o masie  $m_1$  i  $m_2$  propagują się niezależnie, a funkcja falowa mnożona jest przez fazę. Zakładając, że pędy obu neutrin są identyczne, otrzymujemy wynik:

$$e^{-i \frac{(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}} \simeq e^{-i \frac{m^2}{2p} r/c}$$

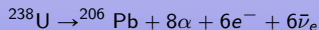
Różnica fazy jest proporcjonalna do  $r/L$  gdzie,  $r$  - odległość od Słońca, *długość mieszania neutrin*  $L = hc \frac{2\varepsilon_\nu}{\Delta m^2}$ , natomiast  $\Delta m^2$  jest **różnicą** kwadratów mas neutrin.

Przyjmując, że  $\Delta m_{12} = 10^{-2}$  eV,  $\varepsilon_\nu = 1$  MeV otrzymujemy  $L \simeq 10$  km.

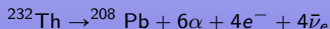
Podobnie jak Słońce emituje neutrina elektronowe  $\nu_e$  w rozpadach  $\beta^+$ , Ziemia emituje głównie **antyneutrino** elektronowe  $\bar{\nu}_e$  z rozpadów  $\beta^-$ . Strumień  $\nu_e$  jest mały, ale niezerowy.

Główne źródła:

- 1 szereg uranowy: kaskada rozpadów zaczynająca się od  $^{238}\text{U}$ :



- 2 szereg torowy: kaskada rozpadów zaczynająca się od  $^{232}\text{Th}$



- 3 rozpad potasu  $^{40}\text{K}$ :



# Geo-neutrinos



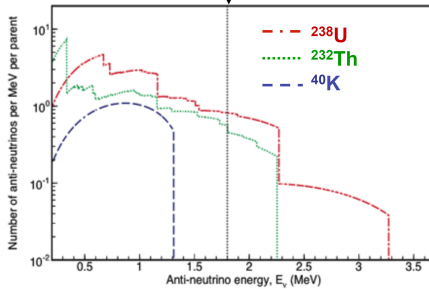
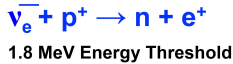
1 $\alpha$ , 1 $\beta$



5 $\alpha$ , 2 $\beta$



2 $\alpha$ , 3 $\beta$



1 $\beta$



1 $\alpha$ , 1 $\beta$



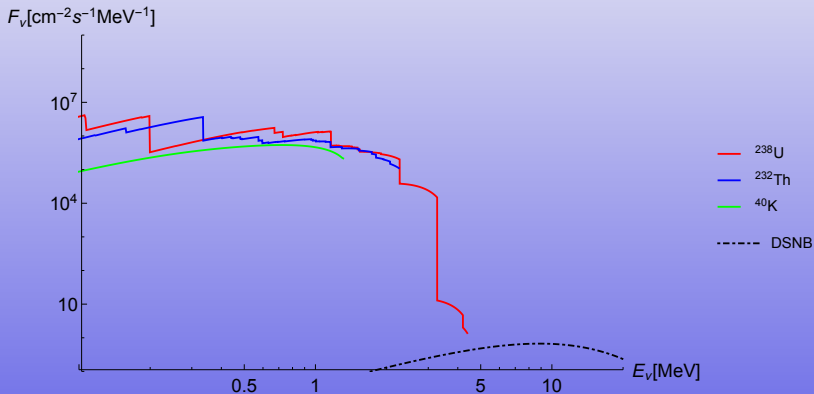
4 $\alpha$ , 2 $\beta$



1 $\alpha$ , 1 $\beta$



# Geoneutrino: widmo energetyczne





Dosyć szczegółowo omówiliśmy zasady na jakich oparty jest model Słońca. Jak wygląda ono na tle innych gwiazd?

## Definicja gwiazdy

Obiekt, który przez większość życia spala wodór w reakcjach termojądrowych.

Minimalna masa kuli „wodorowej” powodująca zapłon reakcji spalania wodoru:

$$M_* > 0.08M_{\odot} \simeq 84M_J$$

Minimalna masa pozwalająca na spalanie deuteru:

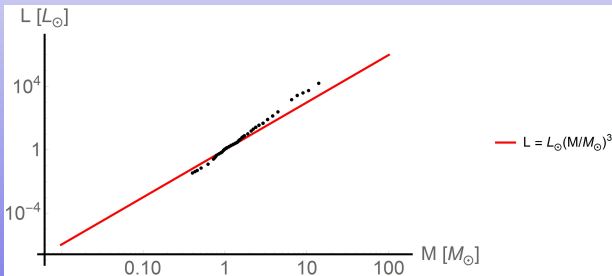
$$M_b > 0.01M_{\odot} \simeq 13M_J$$

Obiektu o masie  $0.01M_{\odot} < M < 0.08M_{\odot}$  ( $13M_J < M < 80M_J$ ) nie zaliczamy do gwiazd. Określany jest jako *brązowy karzeł*. Jeszcze lżejsze obiekty gazowe zaliczamy do planet typu Jowisza (ang. *Jupiters*). Granice te nie są ostro zdefiniowane.

Maksymalna obserwowana masa gwiazd to około  $100 M_{\odot}$ .

Charakterystyczną cechą gwiazd jest szybki wzrost jasności  $L$  z masą  $M$ :

$$L \propto M^3$$



Jasność krytyczną, przy której przyspieszenie nadawane materii przez pochłonięte promieniowanie jest równe przyspieszeniu grawitacyjnemu nazywamy *jasnością Eddingtona*:

$$g_{\text{grav}} = g_{\text{rad}}, \quad g_{\text{grav}} = \frac{GM}{R^2}, \quad g_{\text{rad}} = \frac{\kappa}{c} \frac{L}{4\pi R^2}$$

Ponieważ ilość dostępnego paliwa jest ułamkiem rzędu 0.1 masy  $M$ , czas życia gwiazdy masywniejszej jest krótszy:

$$t = \frac{10^{10}}{(M/M_{\odot})^2} \text{ [lat]}$$

np:

- $M = 0.1M_{\odot}$ ,  $t = 1$  bilion lat (znacznie więcej od wieku Wszechświata 14 mld lat)
- $M = 1M_{\odot}$ ,  $t = 10$  mld lat
- $M = 10M_{\odot}$ ,  $t = 100$  mln lat
- $M = 100M_{\odot}$ ,  $t = 1$  mln lat

Masywne gwiazdy stosują się do maksy: żyj szybko, umieraj młodo!

- Prawdopodobieństwo powstania gwiazdy o masie w zadanym przedziale, np:  $1M_{\odot} < M < 2M_{\odot}$  określa funkcja IMF (*initial mass function*).
- Masę gwiazdy w momencie narodzin określamy jako masę ZAMS (Zero Age Main Sequence)

Konkretna postać IMF powinna wynikać z teorii powstawania gwiazd. W praktyce stosuje się rozkłady potęgowe:

$$\frac{dN}{dM} \propto m^{\alpha}$$

- $\alpha = -2.35$  dla  $m > M_{\odot}$  (tzw. IMF Salpetera)
- $\alpha = -1.3$  dla  $m < M_{\odot}$

Ilość gwiazd gwałtownie maleje z masą. Całkując IMF od 1 do  $100 M_{\odot}$ , dostajemy że: 60% gwiazd ma masę od 1 do  $2 M_{\odot}$ , 96% poniżej  $10 M_{\odot}$  i tylko 4% powyżej  $10 M_{\odot}$ .

Sposobem na uporządkowanie zbioru gwiazd jest *klasyfikacja widmowa*.

Jest ona technicznym określeniem na przypisanie oznaczeń literowo-liczbowych temperaturze gwiazdy

Zapamiętanie sekwencji ułatwia zdanie:

Oh

Be

A

Fine

Girl

Kiss

Me

**Table 6.1.** Relationship between spectral class and surface  $T_{\text{ef}}$  (K) for the main sequence stars (ms), giants (g) and supergiants (sg)

Spectral Class	$T_{\text{ef}}$ ms	$T_{\text{ef}}$ g	$T_{\text{ef}}$ sg
O3	52 500	50 000	47 300
O6	41 000	39 500	39 000
O9	33 000	32 000	32 600
B0	30 000	29 000	26 000
B2	22 000	20 300	18 500
B5	15 400	15 000	13 600
B7	13 000	13 200	12 200
B9	10 500	11 000	10 300
A0	9 520	10 100	9 730
A3	8 720	8 600	8 770
A8	7 580	7 450	7 950
F0	7 200	7 150	7 700
F2	6 890	6 870	7 350
F8	6 200	6 150	6 100
G0	6 030	5 850	5 550
G2	5 860	5 450	5 200
G8	5 570	4 900	4 600
K0	5 250	4 750	4 420
K2	4 900	4 420	4 250
K5	4 350	3 950	3 850
K7	4 060	3 850	3 700
M0	3 850	3 800	3 650
M3	3 470	3 530	3 200
M6	3 050	3 240	2 600
M8	2 640	-	-