

Poniżej znajduje się lista zadań, których rozwiązanie (jednego z nich) jest równoważne zdaniu egzaminu ustnego.

Nie są to typowe zadania podręcznikowe, wymagają sporej inwencji ze strony studenta lub/i biegłości w metodach numerycznych, MMF, czy innych dziedzinach. Część zadań ma charakter interdyscyplinarny.

Zadanie 1. MESA. Ewolucja gwiazdy $4M_{\odot}$ aż do czarnego karła.

Pomimo licznych prób nie udało się zmusić programu MESA (<http://mesa.sourceforge.net/>) aby doprowadził ewolucję aż do stadium stygnącego białego karła (Q limit). Posługując się przykładami dla mas o masach 0.25, 0.5, 1, 2, $8M_{\odot}$ z wykładu oraz test suite z programu MESA, znaleźć ustawienia, które naprawią sytuację. Problemy to m.in. wiatr gwiazdowy wolniejszy niż redukcja kroku czasowego obliczeń (nieskończenie długie obliczenia) lub/i niestabilność otoczki (zerowy krok czasowy).

Zadanie 2. Wyznaczenie ewolucji elementów orbity na podstawie rozwiązania numerycznego.

Za pomocą współczesnych metod numerycznych i oprogramowania bardzo łatwo rozwiązać zagadnienie N-ciał. Dla przykładu, na GPU możemy w czasie rzeczywistym symulować ruch milionów punktów materialnych, a Mathematica w wersji od 12.0 ma wbudowane polecenia **NBodySimulation** oraz **NBodySimulationData**. W szczególności problemy, w których orbita ma charakter eliptyczny z wolno zmieniającymi się parametrami, są łatwe do zasymulowania. Przykłady to układy typu Układ Słoneczny, planety okrążające ciasne układy podwójne, planeta której orbita jest zaburzona poprzez orbitę innej (zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz), ruch wewnątrz i na zewnątrz roju punktów materialnych symulujących gromadę kulistą gwiazd bądź galaktykę itp. itd.

Z drugiej strony, metody perturbacyjne rozwijane od XIX wieku. Ich szczytowym osiągnięciem było przewidzenie orbit Urana, Neptuna oraz Wulkana. Poskutkowało to odkryciem pierwszych dwóch. W przypadku Wulkana okazało się, że planeta nie istnieje, natomiast problem pokierował Einsteina, który odkrył lepszą teorię grawitacji, czyli OTW. Rachunki perturbacyjne pozwalają na wyznaczenie zależności od czasu **parametrów** orbity eliptycznej (nachylenie, wielka półoś, mimośród, moment przejścia przez peryhelium, długość węzła wstępującego), które traktujemy jako wolnozmiennne funkcje. Klasycznym przykładem takich obliczeń są Cykle Milankovica dla orbity Ziemi.

Projekt polega na zaproponowaniu i zademonstrowaniu skutecznych metod pozwalających na wyznaczenie ewolucji elementów orbity eliptycznej ($a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $T(t)$ itd.) w czasie. Parametry mają być wyznaczone na podstawie znalezionej wcześniej rozwiązania numerycznego problemu N-ciał lub trajektorii w potencjale różnym od $-GM/r$. W idealnym przypadku pożądanym byłoby porównanie tak wyznaczonych funkcji z rachunkiem perturbacyjnym lub rozwiązaniem analitycznym, aczkolwiek istnienie takowego jest mało prawdopodobne w większości

przypadków. Wyjątkiem są np. trajektorie wokół czarnych dziur, badane w moim Zakładzie, ZTWiA, wyrażone przez funkcje eliptyczne. Innym podobnym przypadkiem są newtonowskie „czarne dziury dla ubogich”, czyli ruch newtonowski w polu okręgu, płaskiego dysku, torusa itp.

Nie chcę jakoś specjalnie sugerować metod, ale widzę przynajmniej dwie drogi:

1. użycie wielkości zachowanych w problemie 2 ciał: wektor krętu, Rungego-Lenza, energia
2. fitowanie wzorów na elipsę do danych numerycznych

Stosowalność powyższych metod wypadłoby zbadać. W pewnym momencie, gdy zaburzenie stanie się zbyt silne, orbita w ogóle przestanie wyglądać jak elipsa, a wyznaczone z niej parametry typu a, e mogą stracić sens. Pomimo tego, metoda powinna dać jakąś sensowną odpowiedź.

Zadanie 3. Sprawdzenie zakresu stosowalności przybliżenia ruchu na orbicie okręgiem o zadanej gęstości liniowej.

W teorii perturbacji dowodzi się, że w pewnych sytuacjach szybko orbitującą masę zaburzającą m można z powodzeniem zastąpić przy pomocy gęstości liniowej masy rozłożonej na trajektorii eliptycznej. Jest to szczególnie proste w przypadku orbity kołowej, którą zastępujemy jednorodnym okręgiem. W ten sposób zastępujemy rozwiązanie problemu N -ciał ruchem w zadanym potencjale okręgu. Zadanie polega na numerycznej weryfikacji poprawności takiej metody.

Zadanie 4. Planeta utworzona z gazu Van der Waalsa.

Wyznaczyć zależność promień-masa dla kuli utworzonej z izotermicznego gazu Van der Waalsa. W obliczeniach uwzględnić możliwość skroplenia się gazu.

Zadanie 5. Model ruchu płyt tektonicznych

Niedawno opublikowano kontrowersyjną dla geologów hipotezę, że ruch płyt tektonicznych na Ziemi spowodowany jest przyciąganiem grawitacyjnym od Księżyca, a nie jak dotąd sądzono, konwekcją w płaszczu. Z badać uproszczony model takiego ruchu, przyjmując że:

1. Księżyc modelujemy jako masę punktową o masie m ,
2. Ziemię modelujemy jako sztywną sferę o masie $M_{\oplus}$ i promieniu $R_{\oplus}$,
3. płytę kontynentalną modelujemy jako masę punktową μ , która może ślizgać się po sferze reprezentującej Ziemię,
4. ruch masy μ stawia pewien opór, który w początkowej fazie rozwiązania można przyjąć za równy zero.

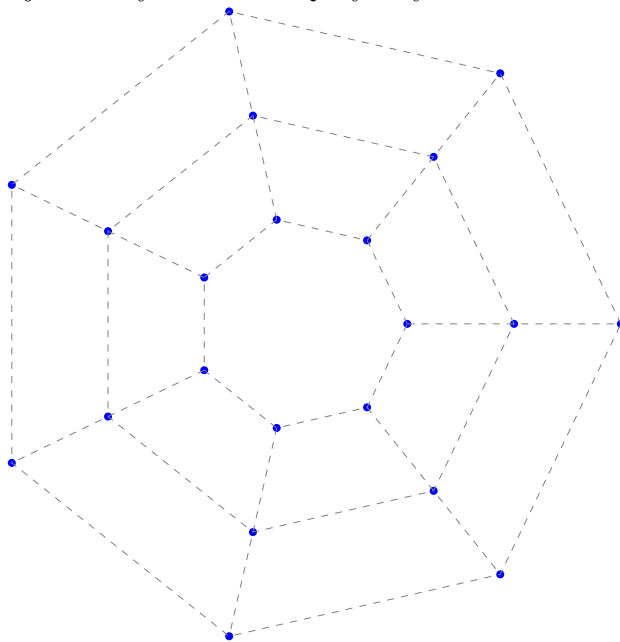
W zależności od wyników uzyskanych w uproszczonym modelu, można spróbować do urealnienia, np. zamieniając masę μ na zbiór bardziej realistycznych płyt, powiedzmy w formie koła lub wielokąta.

Zadanie 6. Ultragęsty materiał.

Podać przykład substancji lub zaproponować aparaturę, która pozwoli na uzyskanie w warunkach laboratoryjnych „zwartego” obiektu (kula, sześcián itp.) o średniej gęstości co najmniej dwa razy przekraczającej gęstość metali takich jak złoto, platyna, uran czy wolfram, t.j. około 20000 kg/m³. Masa i objętość aparatury powinna być wliczona do średniej. Celem jest zbudowanie źródła pola grawitacyjnego do laboratoryjnego pomiaru stałej grawitacyjnej. Wytworzenie materii o chwilowo dużej gęstości, np: poprzez kompresję nanosekundowymi impulsami lasera czy materiałami wybuchowymi, nie jest zadowalającym rozwiązaniem. Obiekt musi utrzymywać gęstość przez „długi” czas, wystarczający do wykonania pomiarów.

Zadanie 7. Układ N-ciał typu „sieć pajęcza”.

Jedną z zaskakujących propozycji rozwiązania problemu ciemnej materii w galaktykach spiralnych są układy N-ciał typu „sieć pajęcza”. Taki układ może obracać się ze stałą prędkością kątową, na dodatek niezależnie od masy punktów materialnych, z których się składa. Matematycy w tej sytuacji ogłosili, że problemu ciemnej materii nie ma, ponieważ z pomiaru prędkości kątowej Galaktyki nie da się wyliczyć rozkładu masy.



[1] Saari, D. G. (2015). Mathematics and the “Dark Matter” Puzzle. The American Mathematical Monthly, 122(5), 407–423. DOI, Link

[2] Anna Gierzkiewicz, Mathematics and the ‘Dark Matter’ Puzzle, PDF

Zadanie 8. Ustabilizowanie trójkątnego rozwiązania problemu 3 ciał.

Zbadać stabilność grawitującego układu czterech ciał, z których jedno umieszczono w środku masy układu, a pozostałe trzy poruszają się ze stałą prędkością kątową w wierzchołkach trójkąta równobocznego.

Zadanie 9. Pochodne funkcji Fermiego-Diraca.

UWAGA: zadania nikomu nie udało się jak dotąd rozwiązać. Jedyna niewypróbowana jeszcze metoda to *automatic differentiation*, https://en.wikipedia.org/wiki/Automatic_differentiation.

Kluczowa w obliczeniach równania stanu gazu elektronowego (np: supernowe, białe karły, rozbłyśki gamma) a także emisji neutrin z ciał niebieskich jest funkcja

$$F_k(\eta, \theta) = \int_0^\infty \sigma(\eta - x) x^k \sqrt{1 + \theta x/2} dx, \quad (1)$$

gdzie σ to funkcja znana w fizyce jako rozkład Fermiego a w badaniach sztucznej inteligencji jako logistic sigmoid

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}.$$

W przypadku skrajnie zdegenerowanym $\eta \rightarrow \infty$ funkcja σ może zostać zastąpiona skokiem jednostkowym

$$\sigma(\eta - x) \simeq \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \eta \\ 0 & \text{dla } x > \eta \end{cases}$$

a całka upraszcza się do

$$F_k(\eta, \theta) = \int_0^\eta x^k \sqrt{1 + \theta x/2} dx.$$

Powyższa całka wyraża się przez funkcję hipergeometryczną ${}_2F_1$, oblicza ją np: *Mathematica*

$$F_k(\eta, \theta) = \frac{\eta^{1+k}}{1+k} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, 1+k, 2+k, -\eta\theta/2\right). \quad (2)$$

Pełne rozwinięcie Sommerfelda dla $\eta \gg 1$ ma postać

$$\int_0^\infty f(x) \sigma(\eta - x) dx = \int_0^\eta f(x) dx + 2 \sum_{i=1}^\infty \zeta^*(2i) f^{(2i-1)}(\eta), \quad (3)$$

gdzie

$$f(x) = x^k \sqrt{1 + \frac{\theta x}{2}}, \quad (4)$$

natomiast $\zeta^*(2i)$ to funkcja eta Dirichleta eta (ang. *alternating zeta*, **DirichletEta** w programie *Mathematica*). Symbol $f^{(i)}$ oznacza operator i -tej pochodnej zastosowanej do funkcji jednej zmiennej $f(x)$ zdefiniowanej w (4).

Ogólna idea obliczania funkcji $F_k(\eta, \theta)$ polega na całkowaniu numerycznym (1) dla $\eta < \eta_s$ oraz użyciu wzoru typu (3) dla $\eta > \eta_s$, gdzie η_s to miejsce „przełączenia” algorytmów. W ogólności η_s nie jest stałą, ale zależy zarówno od tego którą pochodną obliczamy, jak i od parametrów k i θ . W praktyce $32 < \eta_s < 8192$. W większości przypadków oba podejścia przekrywają się (dają identyczne wyniki) w pewnym otoczeniu punktu η_s . Tak niestety nie jest dla drugiej i trzeciej pochodnej cząstkowej po η . Występuje dla nich „dziura” (patrz przykład niżej), gdzie żadna znana mi metoda nie daje poprawnych wyników. Znajomość pochodnych cząstkowych wysokiego rzędu (min. trzeciego) względem η i θ niezbędna jest **w celu gładkiej interpolacji** równania stanu (EOS) w gwiazdach, supernowych itp. Ponieważ interpolacja jest tu celem, jej zastosowanie do wyliczenia pochodnych ma charakter błędnego koła numerycznego, aczkolwiek wyniki powinny być spójne.

Celem projektu jest napisanie programu, który bezbłędnie, z dokładnością względną typu `double` ($2^{-52} \simeq 2.2 \times 10^{-16}$), obliczy minimum trzecie ($i \geq 3$) pochodne

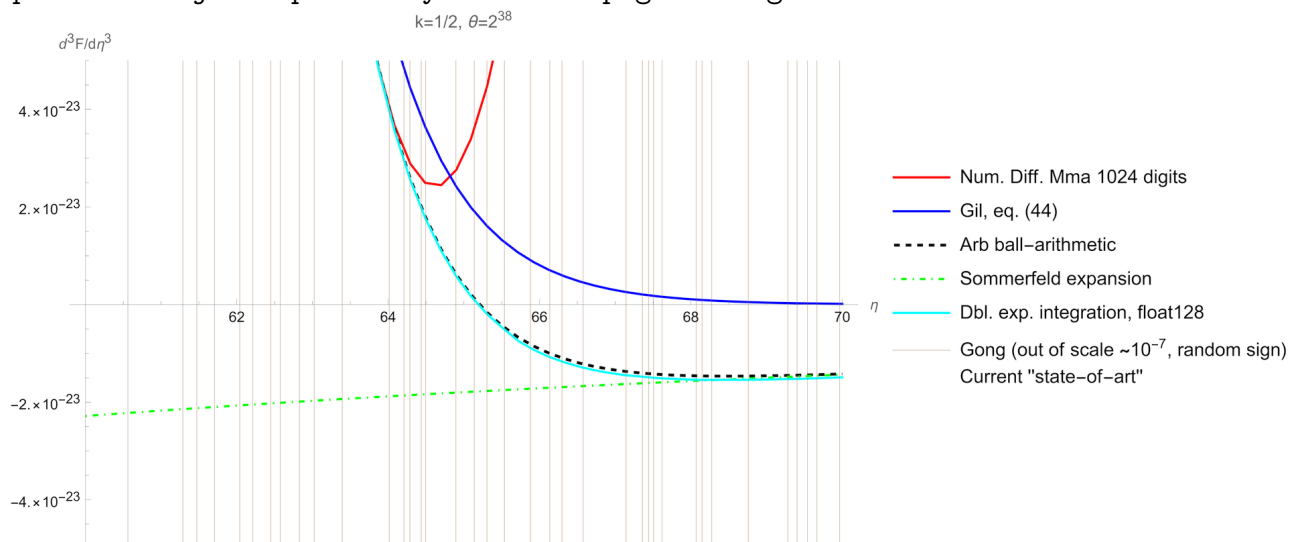
$$\frac{\partial^i}{\partial \eta^i} F_k(\eta, \theta).$$

W szczególności, dla skoncentrowania uwagi, nierozwiązanym problemem jest obliczenie trzeciej pochodnej

$$\frac{\partial^3 F_k(\eta, \theta)}{\partial \eta^3}$$

dla $k = 1/2$, $32 < \eta < 128$, $\theta = 2^{38}$. W tym obszarze zarówno całkowanie jak i rozwinięcie w szereg (Sommerfelda i inne) dają różne wyniki.

Poniższy wykres ilustruje fatalną sytuację, z którą mamy do czynienia. Nie jest jasne nawet jaki jest znak pochodnej. Pokazano sześć metod, każda daje inny wynik, i każda twierdzi, że jej wynik jest dobry. Bardziej szczegółowy opis algorytmów można znaleźć pod adresem <http://th.if.uj.edu.pl/~odrzywolek/homepage/weblog/20220313.html>



Bardzo użyteczne w wyjaśnieniu powyższego problemu mogą być tożsamości spełniane przez

pochodne. Dla $k \geq 0$ zachodzi

$$\frac{\partial^3 F_k}{\partial \eta^3} = \delta_k \sigma''(\eta) + k \frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial \eta^2} + \theta \frac{\partial^3 F_{k-1}}{\partial \eta^2 \partial \theta}, \quad (5)$$

gdzie δ_k to delta Kroneckera.

Inna znana tożsamość to dla trzeciej pochodnej

$$\frac{\partial^3 F_k}{\partial \eta^3} = k(k-1)(k-2)F_{k-3} + 3k(k-1)\theta \frac{\partial F_{k-3}}{\partial \theta} + 3k\theta^2 \frac{\partial^2 F_{k-3}}{\partial \theta^2} + \theta^3 \frac{\partial^3 F_{k-3}}{\partial \theta^3}, \quad (6)$$

w ogólności

$$\frac{\partial^n F_k}{\partial \eta^n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i+k-n+1)^{\underline{n-i}} \theta^i \frac{\partial^i F_{k-n}}{\partial \theta^i}. \quad (7)$$

Wyrażenie $(i+k-n+1)^{\underline{n-i}} = \Gamma(1+k)/\Gamma(1+k-n+i) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$ to tzw. silnia dolna (potęga krocząca), symbol **Pochhammer**-a w *Mathematica*.

Wyrowadzenie dotąd nieznanych tożsamości pomiędzy pochodnymi cząstkowymi także należy uznać za wykonanie projektu.

Zadanie 10. Czy ujemna masa musi zostać wyrzucona z układu mas dodatnich?

Zaproponować stabilny układ N-ciał w przypadku, gdy przynajmniej jedno z nich posiada ujemną masę grawitacyjną („ładunek grawitacyjny”).

Zadanie 11. Widmo neutrin w przeszłości/przyszłości.

Obliczyć kształt widma neutrin dla spalającej wodoru w cyklu *pp* lub/i CNO gwiazdy innej niż Słońce, ewentualnie Słońca na innym niż obecnie etapie ewolucji.

Zadanie 12. Samograwitujący piasek.

Zakładając, że ciało jest zbudowane z samograwitującego nieściśliwego materiału sypkiego („piasku”) o gęstości ρ i współczynniku tarcia μ wyznaczyć inne niż sferyczne symetryczne rozwiązania, lub pokazać, że nie istnieją. Rozwiązanie w intencji ma uogólniać usypany z piasku kopiec, o którym wiadomo, że w jednorodnym stałym polu grawitacyjnym o natężeniu $\mathbf{g}$ ma postać stożka nachylonego pod kątem $\arctg \mu$ do lokalnego kierunku $\mathbf{g}$.

Zadanie 13. MESA w układzie podwójnym gwiazd.

Zastosować moduł programu MESA umożliwiający równoczesną ewolucję 2 gwiazd w układzie podwójnym na wybranym przykładzie.

Zadanie 14. Realistyczny kolaps grawitacyjny.

Za pomocą programu GR1D <http://www.stellarcollapse.org/codes.html> obliczyć przebieg kolapsu grawitacyjnego z hybrydowym równaniem stanu dla $\Gamma = 2$ (tzw. „miękki” EOS) oraz dla $\Gamma = 4$ („twardy” EOS) w obszarze powyżej gęstości jądra atomowego. Porównać ruch wytworzonej fali uderzeniowej.

Zadanie 15. Oumuamua jako elipsoida Jacobiego

Międzygwiazdna planetoida Oumuamua okazała się obiektem skrajnie wydłużonym w stosunku 1:10. Zakładając, że początkowo była kroplą cieczy (elipsoidą Jacobiego) obliczyć jej prędkość kątową i sprawdzić niestabilność.

Zadanie 16. Realistyczny opis zjawisk w układzie 4 ciał.

W serialu 三体 („The Three Body Problem”) <https://www.imdb.com/title/tt20242042/> na podstawie powieści Cixin Liu akcja toczy się wokół „problemu trzech ciał” w fikcyjnej wersji układu potrójnego układu Alfa Centauri. W rzeczywistości układ ten nie wydaje się być niestabilny, ze względu na hierarchiczną budowę

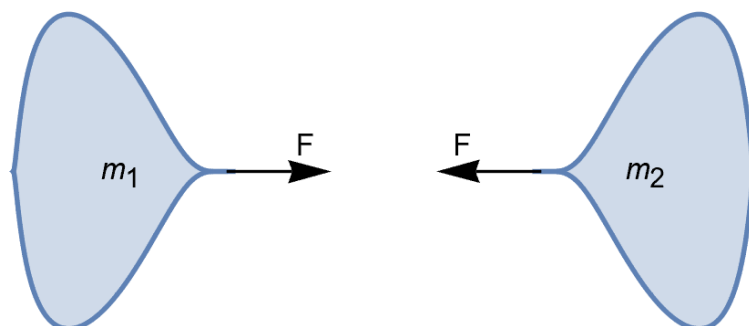
1. główny składnik: „ciasny” układ podwójny gwiazd typu Słońca α Cen A + α Cen B,
2. dodatkowy składnik: czerwony karzeł na orbicie dookoła głównego składnika *Proxima*,
3. hipotetyczna planeta: Proxima Centauri b.

Celem projektu jest sprawdzenie, poprzez rozwiązanie równań ruchu N-ciał i projekcję na sferę niebieską Proximy b, czy przedstawione efekty chaotyczne nie zostały przesadzone, lub wręcz zmyślane. Jak należałoby zmodyfikować układ, aby faktycznie występowały opisane w powieści/serialu ery „stabilności” i chaosu? Czy istniałyby takie zjawiska jak „latające gwiazdy” czy „dzień trzech słońc”?

Zadanie 17. Wrzątek w wodnym detektorze neutrin?

Hollywoodzki blockbaster katastroficzny „2012” rozpoczyna się kuriozalną sceną, w której na skutek wzrostu strumienia neutrin słonecznych woda w detektorze neutrin typu Super-Kamiokande zagotowała się. Tymczasem wiadomo, że neutrina oddziałują z materią tak słabo, że samo ich wykrycie jest bardzo trudne. Celem zadania jest obliczenie jak duży musiałby być strumień i energia antyneutrin elektronowych lub innych, aby doprowadzić do zagotowania się oceanów. Czy taka sytuacja występuje gdziekolwiek we Wszechświecie?

Zadanie 18. Maksymalna grawitacja.



Dysponujemy pewną masą M nieściśliwego materiału o gęstości ρ . W jaki sposób należy podzielić jego objętość $V = M/\rho$ na dwie części o masach $m_1 + m_2 = M$ tak, aby newtonowska siła grawitacyjnego przyciągania $\mathbf{F}$ pomiędzy nimi była największa?

Zadanie 19. Maksymalne nasłonecznienie.

Stawiamy panele słoneczne na dachu, nachylonym do pionu pod kątem λ . Dach jest skierowany w kierunku o azymucie α i znajduje się na szerokości geograficznej φ . Teoretyczna moc panelu przy idealnym (prostopadłym) ustawieniu wynosi P . Obliczyć zależność generowanej mocy od czasu w zależności od pory dnia i roku, stosując modele (A) ruch kołowy ze stałą prędkością kołową i Słońcem jako punktowe źródło promieniowania; (B) poprawny ruch orbitalny i obrotowy (efemerydy); (C) dodać absorpcję światła w atmosferze. W szczególności odpowiedzieć na poniższe pytania.

- (1) Kiedy i czy w ogóle Słońce oświetla panel prostopadle.
- (2) Jeżeli (1) nie zachodzi, kiedy generowana moc jest maksymalna?
- (3) Jak wygląda średnia dzienna, miesięczna i roczna moc?

Podać konkretne przykłady, np: $\varphi = 50^\circ$ N, $\alpha = 115^\circ$, $\lambda = 30^\circ$ $P = 400$ W. Zaproponować kilka schematów optymalizacji ustawienia.

Zadanie 20. Rzeki podczas epoki lodowej.

W maksimum zlodowacenia poziom morza obniżył się o 200 m, a w rejonie dzisiejszych Indochin i Indonezji wyłonił się spory subkontynent określany jako Sundaland. Rzeki, które

obecnie uchodzą do Zatoki Syjamskiej (np: Menam, Mekong), musiały płynąć dalej. Wyznaczyć ich przebieg, np: poprzez największy gradient w numerycznym modelu dna morskiego lub symulację przepływu.

[1] Zatopienie Sundalandu, YouTube

Zadanie 21. Tether o przekroju trójkąta równobocznego

Idea windy kosmicznej wymaga opuszczenia z orbity geostacjonarnej na powierzchnię Ziemi (Marsa) „liny” (ang. *space tether*). Jednym z problemów inżynierskich jest wybór przekroju poprzecznego. Zakładamy, że ma on postać trójkąta równobocznego. Celem zadania jest obliczenie sił aerodynamicznych jakie będzie wywierał wiejący prostopadle to liny wiatr. W szczególności interesuje nas odpowiedź na pytanie, czy na takim przekroju powstaje siła nośna (w kierunku prostopadłym do wiatru i liny) oraz czy będzie na linę działał **moment siły** skutkujący jej skręcaniem.

Schemat rozwiązania jest dowolny, ale nasuwającym się sposobem jest użycie przybliżenia cieczy idealnej i sprowadzenie problemu do znalezienia zespolonego potencjału prędkości przekształcając znane rozwiązanie (np. dla walca) do trójkąta równobocznego korzystając ze wzorów Schwarza-Christoffela.

Zadanie 22. Generatory RTG w kosmosie.

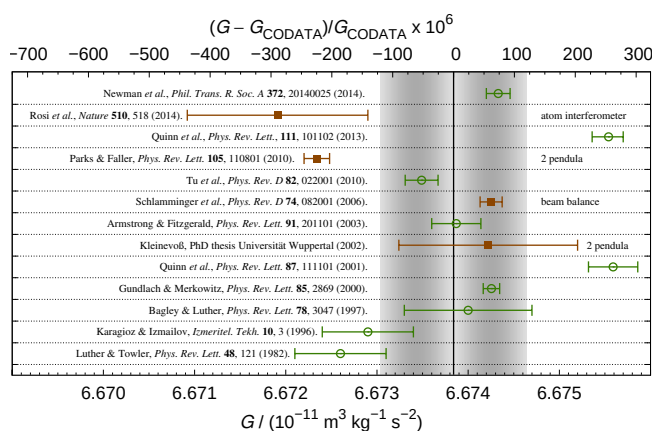
Ludzkość wystrzeliła w Układ Słoneczny dziesiątki generatorów radioizotopowych (RTG), większość w zewnętrzne jego obszary, gdzie brakuje energii z paneli fotowoltaicznych. Jednym z nielicznych wyjątków, jest Ulisses, poruszający się blisko Słońca, ale na orbicie prostopadłej do ekliptyki. Istnieje wiele eksperymentów pokazujących wpływ „pór roku” na rozpady promieniotwórcze (np. DAMA), a tłumaczy się je zakłóceniami pochodzącymi od strumienia ciemnej materii w którym porusza się Ziemia. Celem zadania jest zgromadzenie danych na temat wystrzelonych generatorów RTG oraz historii generowanych przez nie mocy w zależności od czasu i pozycji w Układzie Słonecznym, a następnie poszukiwanie korelacji w takich danych. Modnym współcześnie podejściem jest użycie szeroko rozumianych metod sztucznej inteligencji, ale ze względu na spodziewaną niewielką ilość danych bardziej liczę na inwencję studentów. Zadanie jest skierowane do osób, które mają umiejętność „wyciągania” danych z różnych niestandardowych źródeł, typu raporty techniczne NASA.

Zadanie 23. Pomiary G .

Zadanie jest przeznaczone dla osób posiadających benedyktyńską cierpliwość, gdyż polega ono na przejrzaniu i uporządkowaniu ponad 100 pomiarów stałej grawitacyjnej G , rozszaniach w literaturze naukowej ostatnich 225 lat, zaczynając od eksperymentu Cavendisha z 1798 roku. O ile zbiorcze zestawienia pokazujące zmianę wartości G na przestrzeni lat istnieją w różnych artykułach, to już ewolucja dokładności czy użytych materiałów (ołów, miedź, rtęć, woda, żelazo, ...) jest trudna do odtworzenia. Celem zadania jest zebranie i uporządkowanie, w formie tabeli czy bazy danych, wszelkich informacji o pomiarach G . W szczególności interesuje nas miejsce wykonania eksperymentu, data, instytucja, użyte materiały, kształt źródła i masy próbnej, metoda (waga skręceń, ważenie) itp. itd.

Aby nie zaczynać od zera, poniżej podaję listę i kilka odnośników do źródeł informacji o wynikach pomiarów G .

H. Cavendish	1798	torsion balance (deflection)	6.754
J.H. Poynting	1891	common balance	6.698
C.V. Boys	1895	torsion balance (deflection)	6.658
C. Braun	1897	torsion balance (deflection, period)	6.658
P.R. Heyl	1930	torsion balance (period)	6.669
J. Zahradnick	1932	torsion balance (resonance)	6.659
P. Heyl, P. Chrzanowski	1942	torsion balance (period)	6.672
C. Pontikis	1972	torsion balance (resonance)	6.6714
G.G. Luther and W.R. Towler	1982	torsion balance (period)	6.6726
H. de Boer	1987	mercury flotation (deflection)	6.667
W. Michaelis et al.	1996	flotation (null deflection)	6.7164
C.H. Bagley and G.G. Luther	1997	torsion balance (period)	6.6740
O.V. Karagioz et al.	1998	torsion balance (period)	6.6729
J. Luo et al.	1999	torsion balance (period)	6.6699
M.P.Fitzgerald, T.R. Armstrong	1999	torsion balance (null deflection)	6.6742
F.Nolting et al.	1999	common balance	6.6754
U. Kleinvoß et al.	1999	pendulum deflection	6.6735
J.H. Gundlach, S.M. Merkowitz	2000	torsion balance (acceleration)	6.67422
T.J.Quinn et al.	2001	torsion balance (servo, deflection)	6.67553



Jednym ze sposobów rozpoczęcia wydobywania informacji z obszernej literatury na temat pomiarów G , jest rekursywne przeglądanie publikacji ze startowej listy referencji poniżej, cofając się powoli w czasie. Najnowszych wyników najlepiej szukać w internecie, materiałach konferencyjnych i arxiv.org.

[1] Recent measurements of the gravitational constant as a function of time S. Schlamminger, J.H. Gundlach, and R.D. Newman Phys. Rev. D 91, 121101 Published 11 June 2015

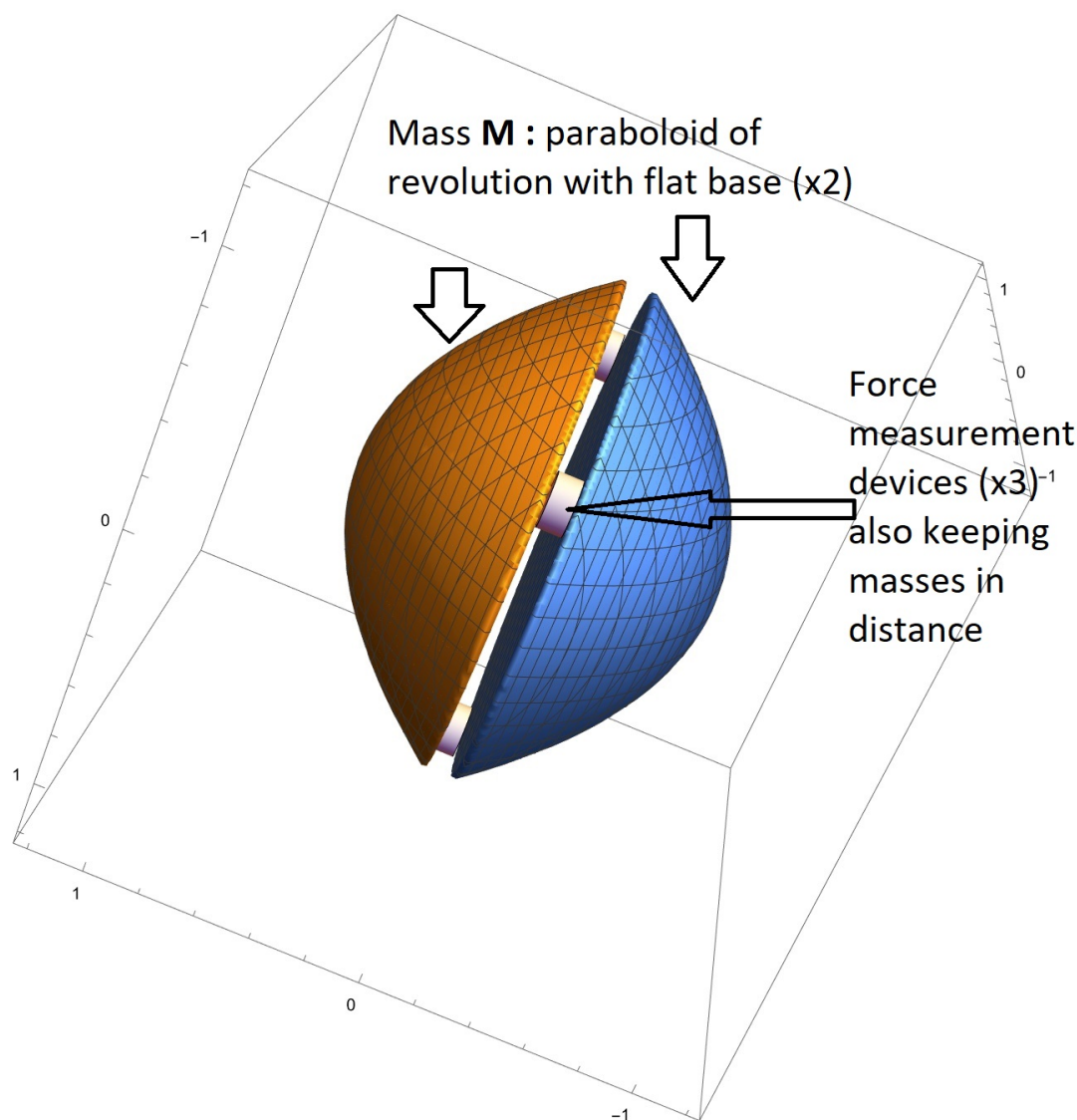
[2] Rapport BIPM-1983/01: The Newtonian gravitational constant - An index of measurements (1983 edition), George T. Gillies

[3] Precision measurement of the Newtonian gravitational constant Natl Sci Rev. 2020 Dec; 7(12): 1803–1817. Published online 2020 Jul 22. doi: 10.1093/nsr/nwaa165

[4] Tabela 1 w pracy C. Mercier, Journal of Modern Physics, 2020, 11, 1428-1465.

Zadanie 24. Nowatorski eksperyment pomiaru G .

Zadanie jest powiązane z wynikiem Zad. 18 *Maksymalna grawitacja*. Jednym ze znanych **przybliżonych** rozwiązań są 2 paraboloidy obrotowe, stykające się płaskimi podstawami.



Na rysunku znajduje się szkic eksperymentu z dwoma paraboloidami obrotowymi o płaskich podstawach, które przyciągają się wyłącznie grawitacyjnie. Pomiedzy nimi znajdują się trzy urządzenia pomiarowe utrzymujące stały dystans i mierzące siłę. Celem eksperymentu jest sprawdzenie, czy siła grawitacyjna między paraboloidami zgodnie z wzorem

$$F \simeq 64M^{4/3}\rho_{20}^{2/3},$$

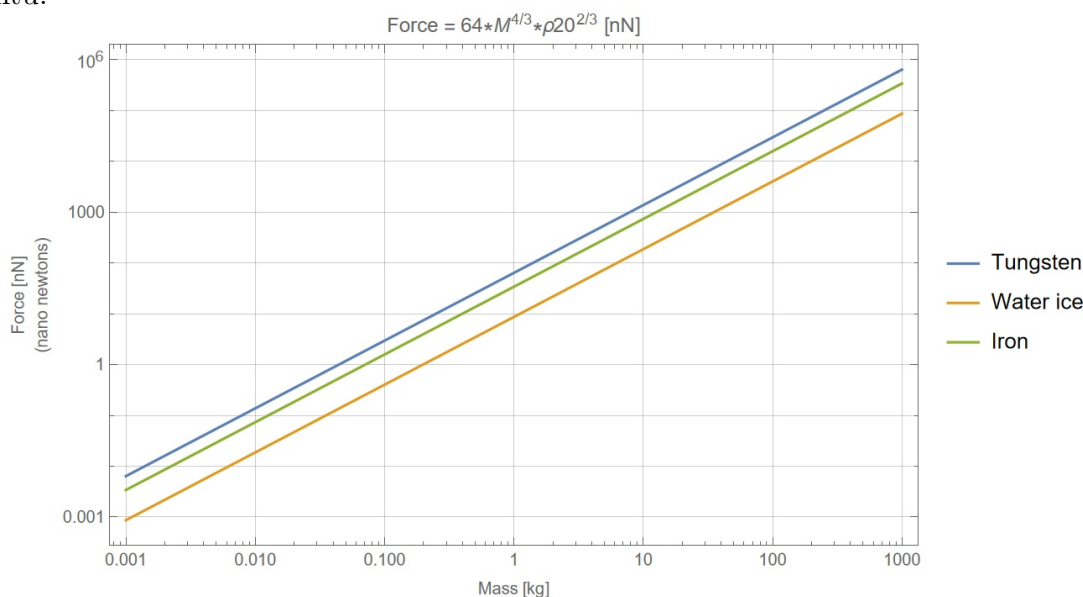
gdzie F wyraża się w nanonewtonach, M w kilogramach, a ρ_{20} jest gęstością relatywną do wolframu ($\rho \simeq 20$ g/cc). Wynik prawdopodobnie nie zależy od odległości pomiędzy paraboloidami dla bardzo wąskiej szczeliny.

Czy wykonanie eksperymentu jest możliwe i wykonalne w warunkach nieważkości (mikro-grawitacji) poza LAB, np. na Międzynarodowej Stacji Kosmicznej lub jako CubeSAT? Jakie siły działają i jakie metody są w stanie je zmierzyć?

Zadanie polega na przeanalizowaniu teoretycznych warunków wykonania eksperymentu, a następnie ocenie jego wykonalności w praktyce. W odpowiedzi należy uwzględnić:

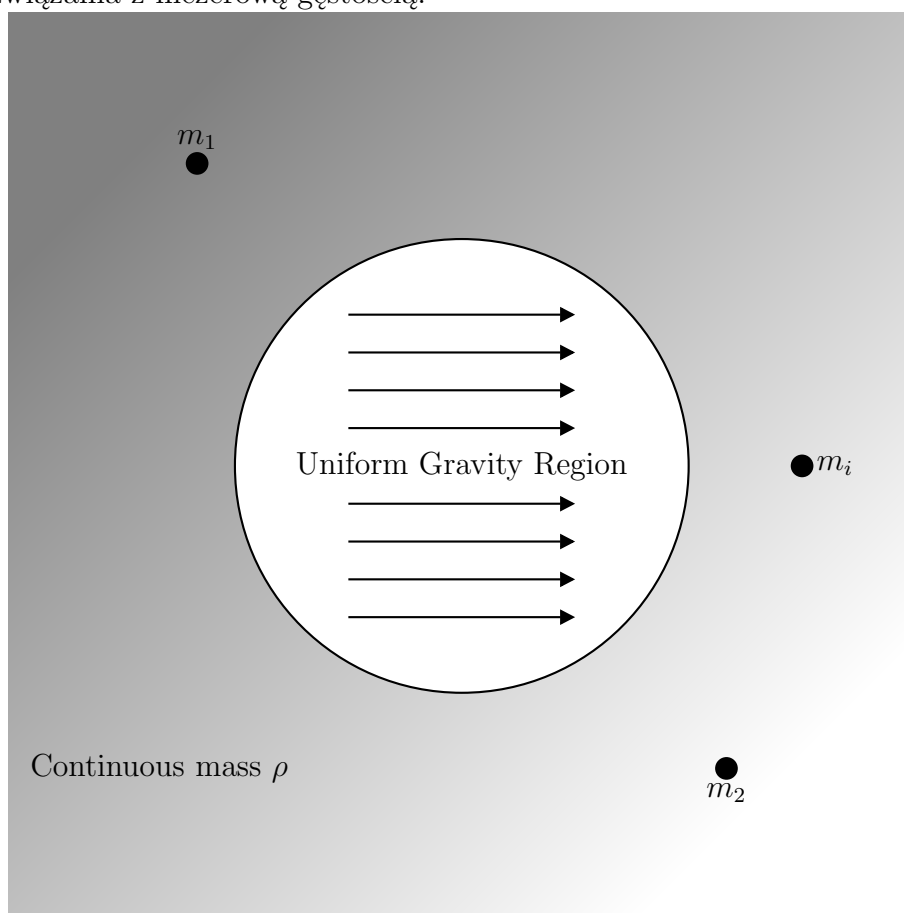
1. Obliczenia siły dla paraboloid.
2. Propozycje metody pomiarowej oraz techniczne aspekty wykonania eksperymentu.
3. Warunki realizacji eksperymentu w warunkach nieważkości poza LAB, np. na Międzynarodowej Stacji Kosmicznej lub jako CubeSAT.
4. Możliwe błędy pomiarowe oraz sposoby ich minimalizacji.
5. Wnioski dotyczące wykonalności eksperymentu.

Dodatkowo, można przedstawić rozważania na temat wpływu ewentualnych czynników zewnętrznych, takich jak pole magnetyczne lub promieniowanie słoneczne, na wyniki eksperymentu.



Zadanie 25. Jednorodne pole grawitacyjne.

Zasada równoważności Einsteina mówi, że pole grawitacyjne o natężeniu $\mathbf{g}$ można „usunąć” w każdym punkcie czasoprzestrzeni. Na ogół taka konstrukcja nie jest możliwa w całej przestrzeni, co pozwala na odróżnienie prawdziwej siły grawitacyjnej od sił pozornych, np. w jednostajnie przyspieszonym układzie odniesienia. Czy jest jednak możliwe wyprodukowanie **dokładnie jednorodnego** pola grawitacyjnego w **skończonym** obszarze? Tak, aby eksperymentator nie był w stanie w żaden sposób stwierdzić, czy znajduje się w tego typu polu czy też w przyspieszającym układzie. Zadanie można wykonać w ramach grawitacji newtonowskiej, a rozkład mas punktowych m_i czy też ciągłej masy ρ użyty do osiągnięcia celu jest dowolny. Układ nie musi być stabilny ani nawet stacjonarny/statyczny, wystarczy chwilowe pole jednorodne. Najlepiej gdyby obszar jednorodnego $\mathbf{g}$ znajdował się w próżni, ale interesujące są też rozwiązania z niezerową gęstością.



Zadanie 25. Wołowina i klucz na orbicie.

W Podróży siódmej Dzienników gwiazdowych Stanisława Lema autor opisuje sytuację, w której Ijon Tichy najpierw gubi klucz, a następnie wyrzuca za burzę spaloną wołowinę. Okazuje się, że oba ciała pozostały na orbicie, a wołowina co 11 minut i 4 sekundy wywoływała krótkotrwałe zaćmienie Słońca. Następnie obliczył orbity i wyszło mu, że przez 6 milionów lat wołowina będzie wyprzedzała klucz na orbicie kołowej.

Projekt polega na realistycznym zasymulowaniu powyższej sytuacji. Bardziej ogólne pytanie, które przy okazji sobie stawiamy, to czy zaburzenia orbit eliptycznych widoczne „gołym okiem” (precesja rzędu kilkunastu stopni/orbitę) są możliwe poza rejonami bliskimi gwiazd neutronowych czy czarnych dziur. Rozważyć można zarówno naturalne źródła pola grawitacyjnego istotnie różnego od $\frac{1}{r}$, np. kontaktowe układy podwójne, planetoidy o dziwnych kształtach (Oumuamua, Arrokoth, ...) jak i źródła sztuczne, typu stacje kosmiczne czy wręcz celowo tworzone dziwne obiekty, np: sztywny torus.