

Statyczny model kosmologicznych pustek

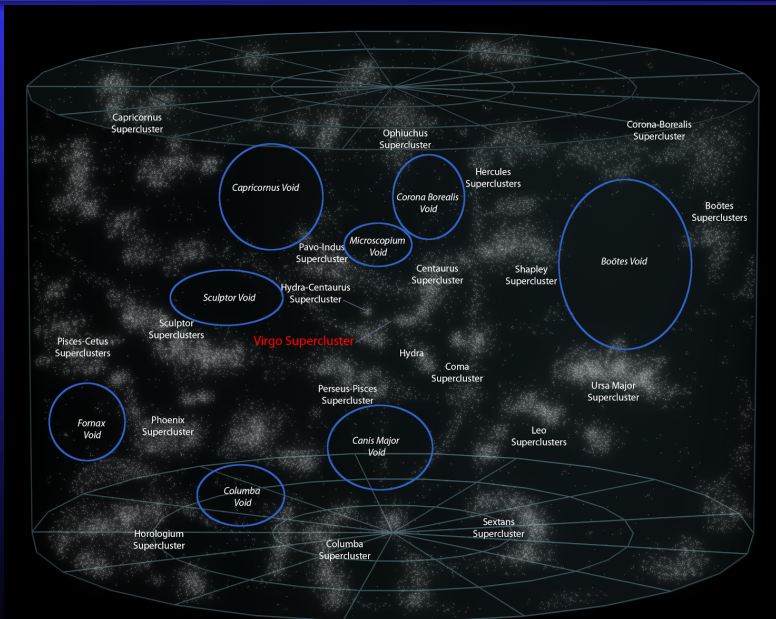
Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki
Uniwersytet Jagielloński, Kraków

Środa, 17 grudnia 2025, 16:00

Pustka kosmologiczna

Pustka kosmologiczna



Odkrycie pustki Bootes

- 1981: Kirshner et. al. ApJ **248** L57 sugerują istnienie obszaru o objętości 10^6 Mpc pozbawionego całkowicie galaktyk
- w kolejnej pracy z 1987 (ApJ **314** 493) istnienie pustki zostaje potwierdzone: *We confirm the existence of a large, roughly spherical void, of radius 62 Mpc ...*
- pustka ta pozostaje do dziś jedną z największych; obecnie określa się ją jako „superpustka” (ang. *supervoid*)
- wewnątrz pustki odkryte zostały nieliczne (niespotykanego gdzie indziej typu) galaktyki
- w przypisie 3, Kirshner zaleca stosowanie nazwy „pustka” (and. *void*) pomimo, że faktycznie jest to jedynie obszar o bardzo małej gęstości; zostało to powszechnie przyjęte

Podstawowe trudności

- w pustkach, jak sama nazwa wskazuje, nie ma nic do obserwowania (poza ciemną materią i energią ...)
- jak odróżnić pustkę od statystycznej (ujemnej) fluktuacji gęstości?

Istniejące dane obserwacyjne

- granice pustek: promień, kształt
- uśredniony profil gęstości, zależność ρ_c-D
- absorpcja światła z dalszych obiektów
- obserwacje (nielicznych) galaktyk wewnątrz pustek
- katalogi pustek, np: Cosmic Void Catalog of SDSS DR12 (Mao et al 2017 ApJ 835 161)

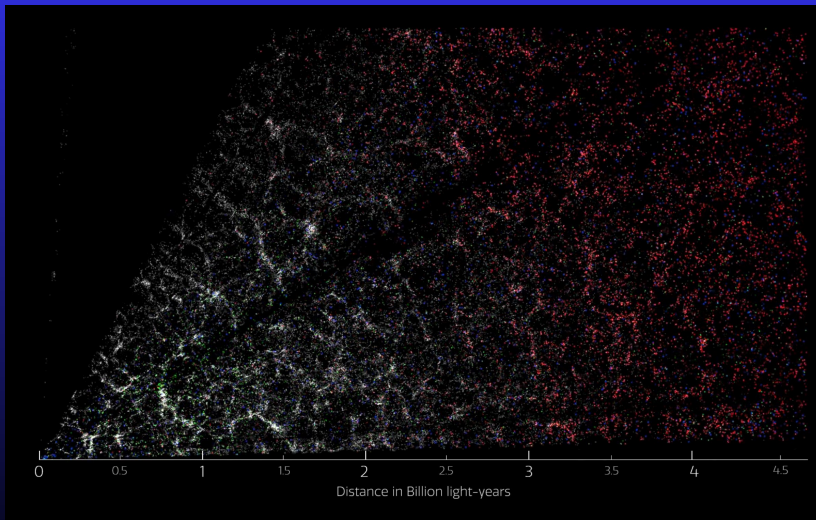
Trudności teoretyczne

- powstanie pustki Bootes wymaga kontrastu gęstości na poziomie -0.2 dla $z=1000$; nie ma to odzwierciedlenia w promieniowaniu tła
- symulacje N-ciałowe CDM produkują bardzo dużą ilość małych galaktyk wewnątrz pustek; nic takiego się nie obserwuje
- oznacza to że: (1) formowanie galaktyk w pustkach zachodzi inaczej niż w pozostałej części kosmosu lub (2) pustki zostały opróżnione z materii (barionowej?) [Peebles, ApJ **557** 495 2001] (tzw. *void phenomenon*)

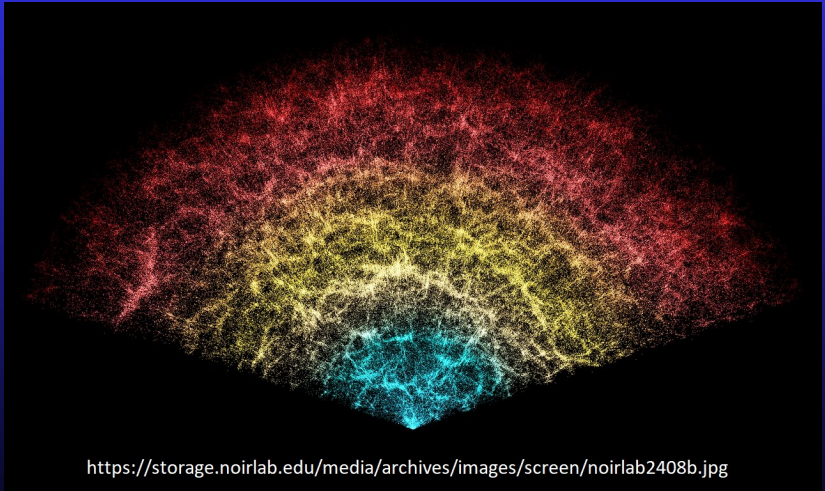
Co nowego w pustce po 20 latach?

- Ze współczesnego punktu widzenia na strukturę wielkoskalową Wszechświata rozróżniamy:
 - 1 super(gromady) galaktyk (punkty, zero-D)
 - 2 włókna(filamenty) (linie, 1D)
 - 3 ściany domenowe (powierzchnie, 2D)
 - reszta, czyli większość objętości (3D) stanowią pustki
-
- Współcześnie dysponujemy licznymi
 - 1 katalogami pustek (DESI, Euclid)
 - 2 algorytmami detekcji pustek
 - 3 symulacjami powstawania struktur (Illustris)

Cosmic Web



Cosmic Web

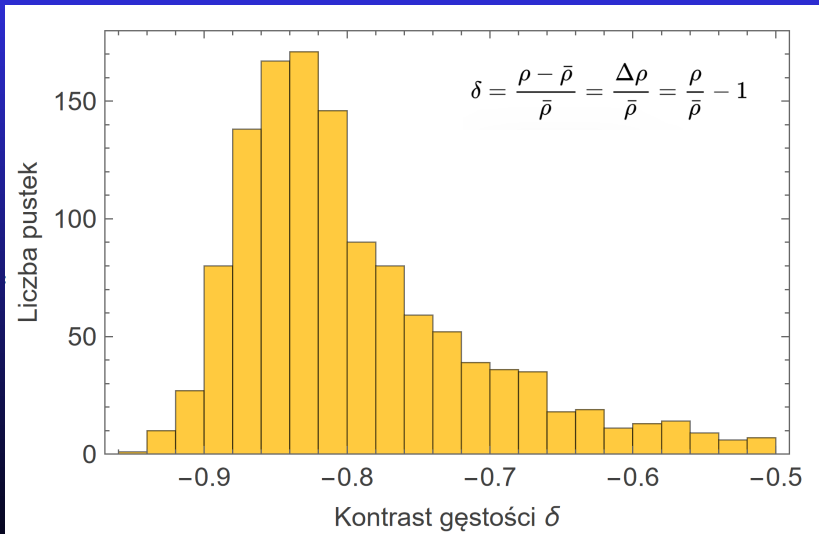


Cosmic Web

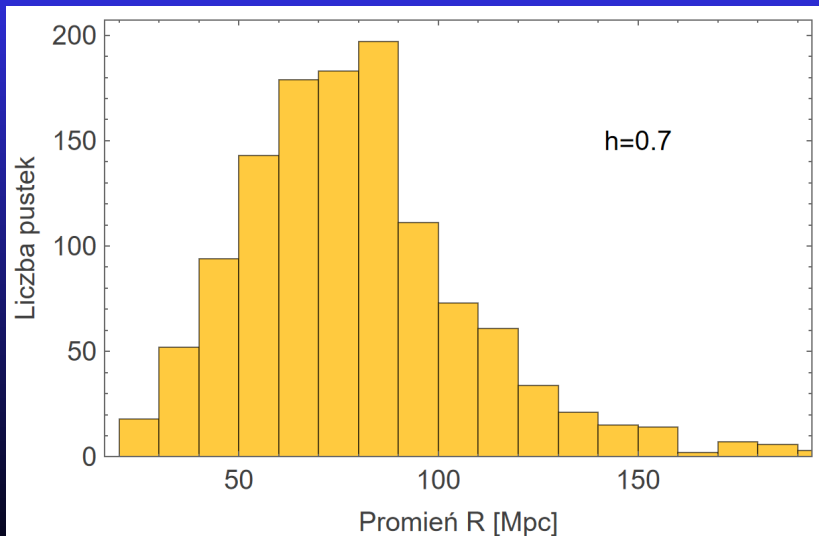
DESI Galaxy Flight with captions



SDSS DR12 Void Catalog: central density contrast



SDSS DR12 Void Catalog: radius



Istniejące proste modele

- symulacje N-ciałowe (newtonowskie) w układzie współporuszającym się
- modele typu Lemaitre-Tolmana (Kraśiński - mechanizm „pługu śnieżnego”)
- „ser szwajcarski” (sklejanie 2 rozwiązań)

Modele te opisują pustkę jako kombinowany skutek ekspansji przestrzeni i formowania się struktur. Skoro gdzieś materia kolapsuje i kontrast gęstości rośnie, to gdzie indziej musi on spadać. Pustka jest w tym obrazie raczej skutkiem ubocznym (pasywnym elementem) formowania się struktur niż pełnoprawnym obiektem.

Jest to oczywiste podejście, ponieważ grawitacja w klasycznej OTW jest zawsze przyciągająca.

Model dla dodatniej stałej kosmologicznej

- pustka nigdy nie jest „pusta”, zawiera „ciemną energię”
- istnieją rozwiązania statyczne
- Λ może powodować, że pustka odpycha cząstki próbne *nawet jeżeli sama jest statyczna*
- pustka jest pełnoprawnym obiektem, podobnie jak np. gromada galaktyk; wpływa na otoczenie wyrzucając materię na zewnątrz

Jak odróżnić ekspansję czasoprzestrzeni od ruchu w niej?

IDEA: zbadajmy problem w Statycznym Wszechświecie Einsteina !

3-sfera o promieniu $R(t)$

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2]$$

Równania Einsteina (Friedmanna)

$$3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3}{R^2} = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R}$$

$$3 \frac{\ddot{R}}{R} + 4\pi G (\rho + 3p) = \Lambda$$

Zachowanie energii-pędu:

$$\frac{\dot{p}}{p + \rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R}$$

Równanie stanu materii:

$$p = p(\rho)$$

$$R(t) = \text{const}$$

Całkowita ilość „źródła pola grawitacyjnego” jest dla wszystkich wszechświatów Einsteina taka sama:

$$8\pi G (\rho_E + 3 p_E) = 2 \Lambda$$

natomiast podział pomiędzy gęstość i ciśnienie, a także promień 3-sfery zależy od równania stanu:

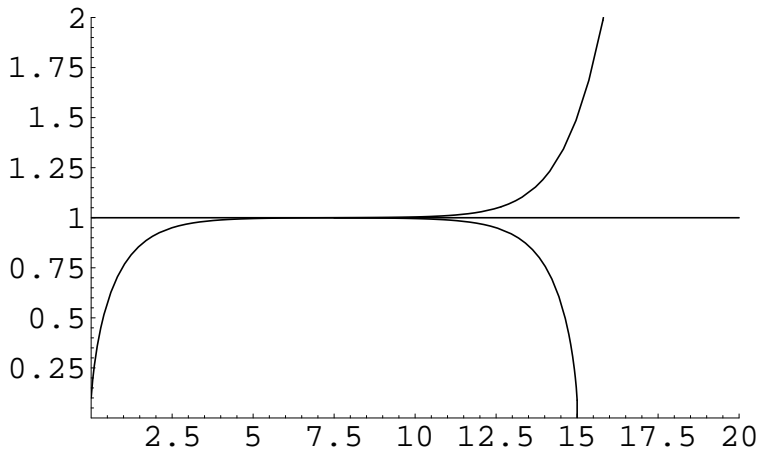
$$8\pi G \rho_E = \frac{3}{R_E^2} - \Lambda$$

$$8\pi G p_E = -\frac{1}{R_E^2} + \Lambda$$

Parametry wszechświata statycznego

Limity teoretyczne	Eddington(1930)	Λ -CDM (2025)
ρ_E	$10^{-27} \text{g cm}^{-3}$	$3.5 \times 10^{-30} \text{g cm}^{-3}$
$\sqrt{\frac{1}{\Lambda}} < R_E < \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}}$	328 Mpc	3000 Mpc
$\Lambda < \frac{8\pi G\rho_E}{c^2} < 2\Lambda$	$\Lambda = 10^{-54} \text{cm}^{-2}$	$\Lambda = 1.1 \times 10^{-56} \text{cm}^{-2}$
$\frac{9/8}{\sqrt{6}} \frac{\pi c^2}{\sqrt{\Lambda G}} \leq M_E \leq \frac{\pi c^2}{2\sqrt{\Lambda G}}$	$10^{22} M_\odot$	$10^{23} M_\odot$
Stała Hubble'a	$528_{-0}^{+500} \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$	$70 \pm 3 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$

Niestabilność Statycznego Wszechświata



Jest praktycznie niemożliwe odróżnienie modelu statycznego od modeli dynamicznych w fazie plateau.

Wyprowadzenie równań statycznej pustki

Wychodzimy od równania Tolmana-Oppenheimera-Volkova ze stałą kosmologiczną (TOV- Λ).

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \left(m + 4\pi r^3 \frac{p}{c^2} - \frac{1}{3} \frac{r^3 \Lambda c^2}{G}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{1}{3} r^2 \Lambda\right)} \quad (1a)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1b)$$

$$p = K \rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (1c)$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej

$$x = A r,$$

i funkcji:

$$\rho(r) = \rho_c \theta(x)^n, \quad (2a)$$

$$p(r) = p_c \theta(x)^{n+1}, \quad (2b)$$

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_c}{A^3} v(x). \quad (2c)$$

$$A^2 = \frac{4\pi G\rho_c}{\alpha c^2}, \quad \lambda = \frac{\Lambda}{3A^2}, \quad \alpha = \frac{p_c}{\rho_c c^2}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}.$$

dostajemy:

$$\theta' + \frac{(1 + \alpha\theta)(v + \alpha x^3 \theta^{n+1} - \lambda x^3/\alpha)}{x^2 - 2\alpha x v - \lambda x^4} = 0 \quad (3a)$$

$$v' = x^2 \theta^n \quad (3b)$$

Równania Toopera z Λ

$$\theta' + \frac{(1 + \alpha\theta)(v + \alpha x^3 \theta^{n+1} - \lambda x^3 / \alpha)}{x^2 - 2\alpha x v - \lambda x^4} = 0, \quad v' = x^2 \theta^n$$

$\lambda = 0$ (równania Toopera)

$$\theta' + \frac{(1 + \alpha\theta)(v + \alpha x^3 \theta^{n+1})}{x^2 - 2\alpha x v} = 0, \quad v' = x^2 \theta^n$$

$\lambda = 0$ i $\alpha \rightarrow 0$ (równanie Lane-Emdena)

$$\theta'' + \frac{2}{x} \theta' + \theta^n = 0$$

$\lambda \rightarrow 0$ i $\alpha \rightarrow 0$ ale $\lambda/\alpha = \text{const}$ (równanie pustki)

$$\theta'' + \frac{2}{x} \theta' + \theta^n = q^n$$

Interpretacja fizyczna limitu $\lambda \rightarrow 0$ i $\alpha \rightarrow 0$, $\lambda/\alpha=p$

- 1 W przypadku $\Lambda > 0$ granica Newtonowska jest rozbieżna, gdyż zmniejszanie prędkości i „sił” grawitacyjnych musi w pewnym momencie doprowadzić do sytuacji, w której stała kosmologiczna zdominuje dynamikę.
- 2 z drugiej strony, dla bardzo dużych odległości rzędu $r \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ pojawia się horyzont kosmologiczny
- 3 limit opisuje więc sytuację, gdy małe gęstości materii powodują istotny wkład Λ do oddziaływania, ale rozmiary obiektu są zanedbywalnie małe w stosunku do „promienia” statycznego wszechświata Einsteina
- 4 siła newtonowska i pochodząca od Λ zrównują się dla 2 atomów wodoru w odległości 1 metra; promień Einsteina wynosi dla $\frac{\Lambda c^2}{G} = 1.5 \times 10^{-25} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ około 3 Gpc $\sim 30 R_{\text{void}}$

Równanie pustki vs Lane-Emden

Równanie „pustki”

$$\vartheta'' + \frac{2}{x} \vartheta' + \vartheta^n = q^n$$

$$x \ll 1$$

$$\vartheta \simeq 1 - \frac{1 - q^n}{6} x^2 + \dots$$

$$x \gg 1$$

$$\vartheta \sim q - \frac{a \sin kx}{x}, \quad k^2 = n q^{n-1}$$

brak skalowania

Równanie Lane-Emdena

$$\theta'' + \frac{2}{x} \theta' + \theta^n = 0$$

$$\theta \simeq 1 - \frac{1}{6} x^2 + \dots$$

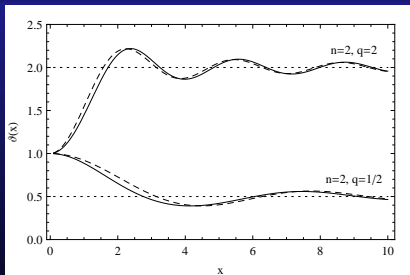
zależnie od n

$$\theta \rightarrow x^\lambda \theta(x/\lambda), \quad \lambda = \frac{2}{1-n}$$

Rozwiązanie równania „pustki”

Numeryka vs rozwinięcie asymptotyczne

Równanie można rozwiązać numerycznie. Okazuje się, że nie jest to wcale potrzebne: *rozwinięcie asymptotyczne daje bardzo dobry wynik przybliżony już od $x = 0$!*



$$\vartheta(x) \simeq q - (q - 1) \frac{\sin kx}{kx}$$

$$k^2 = nq^{n-1}$$

- 1 parametryzacja kontrastu gęstości w pustce:

$$1 + \frac{\delta\rho}{\rho} = \left(\frac{\vartheta(Ax)}{q} \right)^n$$

zawierająca 3 parametry: A , q i n .

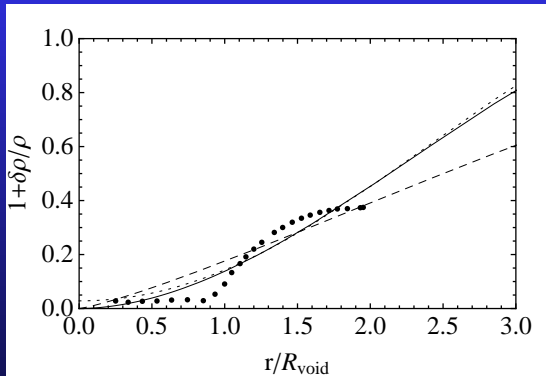
- 2 zależność promienia pustki od kontrastu gęstości w centrum:

$$R_{\text{void}} = \frac{\pi}{\sqrt{nA}} \delta\rho_c^{1-\gamma/2} = \frac{\pi}{\sqrt{nA}} \delta\rho_c^{\frac{n-1}{2n}}$$

- 3 pewne modelowe równanie naśladujące ewolucję zaburzeń gęstości w obecności Λ :

$$\partial_t u = \Delta u + u^n - q^n$$

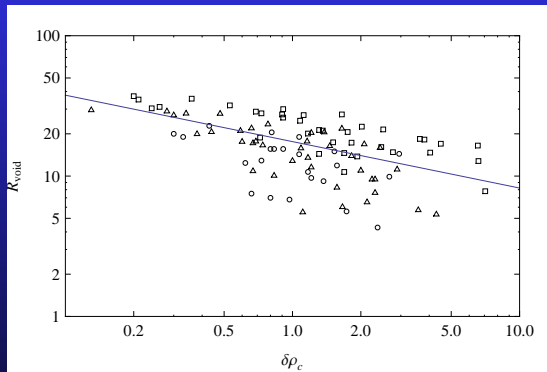
Radialny profil kontrastu gęstości w pustce (2009)



$$n = 3/5, \quad n = 0.9 \pm 0.2, \quad n = 1.05 \pm 0.2$$

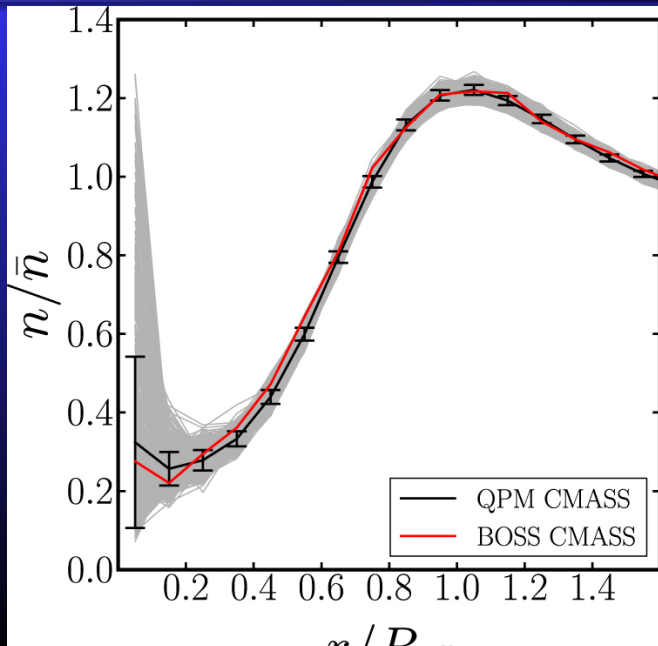
Andrzej Odrzywołek, *Holes in the static Einstein universe and a model of the cosmological voids*, Phys. Rev. D 80, 103515 (2009)

Zależność promienia pustki od gęstości centralnej (2009)

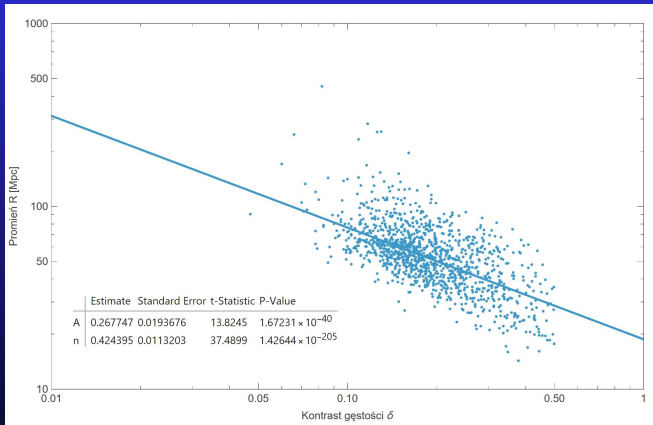


$$\gamma = 2.66 \pm 0.07, \quad n = 0.60 \pm 0.025$$

Model z 2009 VS obserwacje z 2025



Model z 2009 VS obserwacje z 2025



- 1 stała kosmologiczna jakościowo zmienia obraz pustek i formowania się struktur w ich rejonie
- 2 pustki nie wyglądają na obiekty statyczne, ale taka możliwość istnieje w teorii
- 3 model statyczny pozwala na ścisłe rachunki dotyczące m. in. równania stanu materii wypełniającej pustkę

TODO (2006)

- Ustalenie kiedy istnieją rozwiązania globalne
- Metody znajdowania rozwiązań globalnych
- ~~Ruch w polu grawitacyjnym dziury~~
- Stabilność i ewolucja dziury
- Dziura w rozszerzającym się Wszechświecie?
- ~~Dziura jako model „pustek”~~
- Oddziaływania dziura-dziura