6.1 Prędkość fali uderzeniowej

Rozważmy prosty model fali uderzeniowej w supernowej, czyli równanie Burgersa

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Obliczyć prędkość fali uderzeniowej s, jeżeli po jej lewej stronie $u(x,t) = u_L$, natomiast po prawej $u(x,t) = u_R$. Zakładamy, że $u_L > u_R$. Rozważyć model z $\epsilon = 0$ lub/i $\epsilon \to 0$.

6.2 Model Plummera gromady kulistej gwiazd

W modelu Plummera, stosując techniki znane z politropy o indeksie $n = 5$ (Zad. 1.2.4), obliczyć

1. rozkład gęstości $\rho(r)$,
2. całkowitą oraz biegnącą masę $M(r)$,
3. potencjał grawitacyjny $\Phi_g(r)$,

 andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

4. grawitacyjną energię wiązania,
5. funkcję Hamiltona pojedynczej cząstki,

6*. rozkład prawdopodobieństwa $f(\vec{r}, \vec{v})$ znalezienia cząstki o prędkości $\vec{v}$ w położeniu $\vec{r}$.

6.3 Czynnik skali w płaskim modelu Λ-CDM

Wyprowadzić wzory na czynnik skali $a(t)$, parametr Hubble'a $H(t) \equiv \dot{a}/a$, gęstość $\rho(t)$ oraz wiek Wszechświata T w płaskim $(k = 0)$, pyłowym modelu kosmologicznym z dodatnią stałą kosmologiczną $\Lambda > 0$. Znaleźć wyrażenia asymptotyczne dla $t \to 0$ oraz $t \to \infty$, a także punkt przegięcia funkcji $a(t)$. Naszkicować wykresy używając zmierzonych wartości stałych G, H_0, Λ.

Odp: $a(t) = a_0 \sinh\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct\right)^{2/3}$, $\rho(t) = \frac{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}{\sinh\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct\right)^2}$, $H(t) = \frac{c\sqrt{\Lambda/3}}{\tanh\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct\right)}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$, $T = \frac{2}{3H_0} \operatorname{artanh}(\sqrt{\Omega_\Lambda})/\sqrt{\Omega_\Lambda}$.

 andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl