1.1 Równanie samograwitującej barotropy newtonowskiej

Wyprowadzić zaczynając np. od równań mechaniki płynów w polu grawitacyjnym lub praw zachowania **algebraiczny** związek pomiędzy *„entalpią właściwą”* $h \equiv (H/V)/\rho$, gdzie H - entalpia, V - obj., ρ - gęstość płynu, a potencjałem grawitacyjnym Φ_g w równowadze hydrostatycznej. Przedyskutować możliwe formy zależności pomiędzy h, ρ oraz Φ_g (różniczkowe i całkowe). Bez utraty ogólności można założyć, że równanie stanu (EOS), czyli zależność ciśnienia P od gęstości jest zadana pewną funkcją jednej zmiennej $P = P(\rho)$.

ODP: $h + \Phi_g = C, \qquad h = \int \frac{dp}{\rho}$.

Wskazówka: Rozważyć przypadek sferycznie symetryczny.

1.2 Struktura politropowa

Wyznaczyć radialny rozkład gęstości $\rho(r)$, ciśnienia $P(r)$, masy $m(r)$ zawartej w kuli o promieniu r oraz potencjału grawitacyjnego $\Phi_g(r)$ dla równania stanu

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n},$$

dla

1. przypadek stałej gęstości $n = 0$,
2. izotermiczne równanie stanu $P = c_s^2 \rho$,
3. kwadratowe równanie stanu $P = K\rho^2$,
4. sfera Plummera $n = 5$.

1.3 Równanie Lane-Emdena

Korzystając z wyniku zadania 1.1 w wersji różniczkowej, rozwiązać równanie struktury sferycznie symetrycznej barotropy z równaniem stanu

$$P = K\rho^\gamma, \qquad \gamma = 1 + 1/n,$$

wprowadzając *funkcję Lane-Emdena.* Jest ona zdefiniowana jako rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

$$w_n'' + \frac{2}{z} w_n' + w_n^n = 0, \quad w_n(0) = 1, w_n'(0) = 0.$$

Wyznaczyć radialny *profil gęstości* i $\rho(r)$ *kontrast gęstości* $\rho_c/\bar{\rho}$ gdzie $\rho_c = \rho(0)$ - gęstość centralna (w geometrycznym środku, dla $r = 0$), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ - gęstość średnia. Przedyskutować stosowalność otrzymanych wzorów do opisu Ziemi, Jowisza, Słońca, białych karłów i gromad kulistych gwiazd.

ODP:

$$\rho(r) = \rho_c \, w_n \left(\frac{r}{R}\, x_0\right)^n, \quad \rho_c = \bar{\rho} \, \left(-\frac{x_0}{3x_1}\right).$$

Wielkości x_0, x_1 stanowią miejsce zerowe (pierwsze!) funkcji w_n oraz nachylenie (pochodną) w miejscu zerowym $x_1 = w_n'(x_0)$.

1.4 Moment bezwładności ciał niebieskich

Zadany jest radialny rozkład gęstości samograwitującego ciała o symetrii sferycznej, masie M i promieniu R, zbudowanego z materii o politropowym równaniu stanu (wynik poprzedniego zadania).

Obliczyć liczbowy współczynnik κ we wzorze na moment bezwładności $I = \kappa M R^2$ w zależności od n. Dla $n = 0$ oraz $n = 1$ podać wynik analityczny. Dla pozostałych wartości podać wynik numeryczny.

ODP:

$$\kappa = \frac{2}{3} + \frac{4}{x_0^4 x_1} \mathcal{M}_2,$$

gdzie $\mathcal{M}_k$ jest k-tym momentem funkcji Lane-Emdena w_n:

$$\mathcal{M}_k = \int\limits_0^{x_0} x^k \, w_n \, \mathrm{d}x.$$

Znane jawnie wartości to $\kappa = \frac{2}{5}$ dla $n = 0$ oraz $\kappa = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}$ dla $n = 1$.

1.5 Zależność masa-promień

Wyprowadzić zależność promienia R ciała niebieskiego od jego masy M w zależności od n, jeżeli jest ono zbudowane z materii o politropowym równaniu stanu o ustalonym K. Innymi słowy, zwiększamy masę ciała poprzez akrecję materii o znanym równaniu stanu, i pytamy jak zmieni się jego promień: wzrośnie, zmaleje czy nie zmieni się?