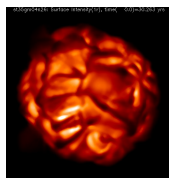
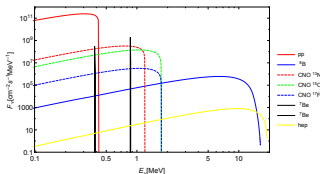
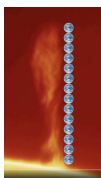


# Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

25 kwietnia 2023



# Uzupełniająca informacja o Słońcu

- niewyróżniająca się gwiazda Galaktyki
- ze względu na bliskość kompleksowo przebadana eksperymentalnie i teoretycznie
- stale monitorowana, w niektórych aspektach (np: plamy słoneczne) od kilkuset lat
- występują w niej prawie wszystkie procesy istotne w teorii ewolucji gwiazd
- jest perfekcyjnie sferyczne ( $\Delta R/R \simeq 7 \times 10^{-5}$ ) i bardzo wolno obraca się (raz na miesiąc)

# Słońce: widmo elektromagnetyczne

Słońce z dobrym przybliżeniem promieniuje jak ciało doskonale czarne. Widmo energetyczne (energia fotonu  $E_\gamma = h\nu$ ) promieniowania ma postać Plancka:

$$\frac{dL}{d(h\nu)} = L_\odot \frac{15}{(\pi k T_\odot)^4} \frac{(h\nu)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Temperaturę efektywną  $T_\odot = T_{\text{eff}}$  definiujemy poprzez całkowitą moc promieniowania, tak aby był spełniony wzór Stefana-Boltzmana  $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 T_\odot^4$ .

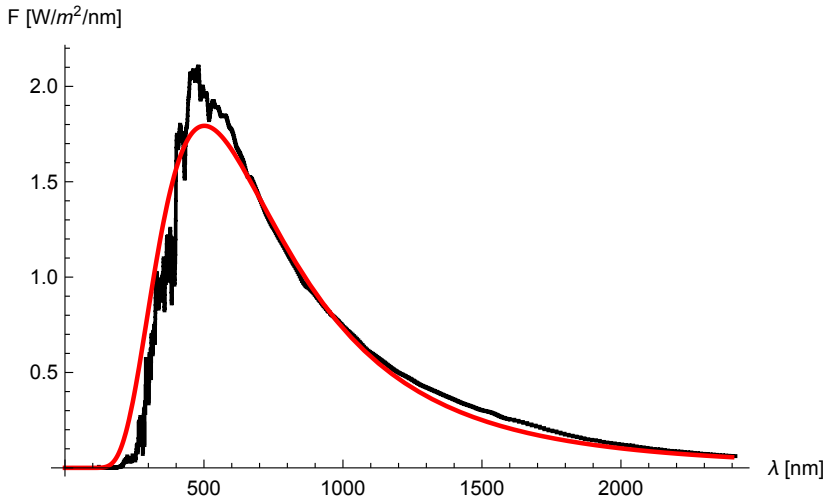
## Stała słoneczna

Natężenie promieniowania w odległości  $d = 1$  AU nazywamy *stałą słoneczną*:

$$\frac{L_\odot}{4\pi d^2} = 1361 \text{ W/m}^2$$

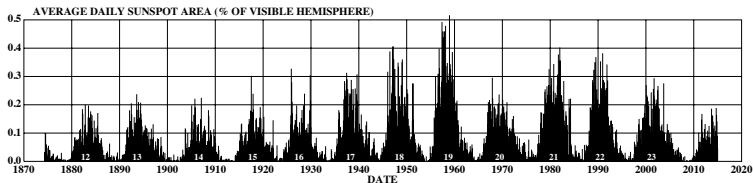
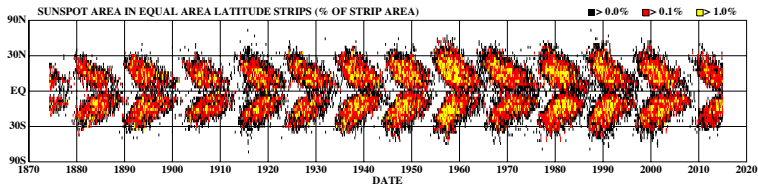
Faktyczna ilość energii na  $\text{m}^2$  docierająca do powierzchni Ziemi jest zmienna i *średnio* prawie 6x mniejsza.

# Widmo termiczne i obserwowane



$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \frac{2\pi hc^2}{\sigma T^4} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, T = 5877 \text{ K}, d = 1 \text{ AU}, L_{\odot} = 3.8 \cdot 10^{26}$$

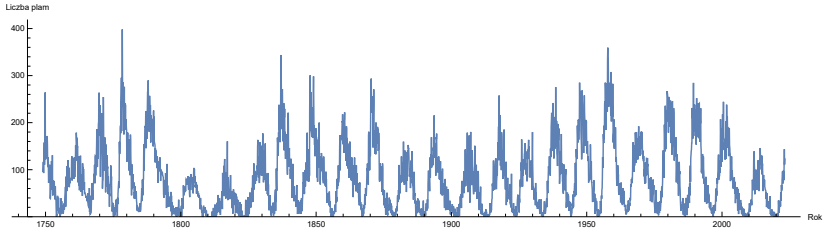
## DAILY SUNSPOT AREA AVERAGED OVER INDIVIDUAL SOLAR ROTATIONS



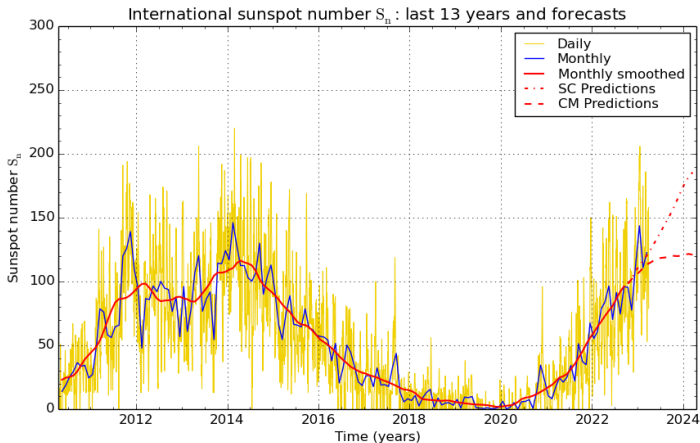
<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/BFLY.PDF>

HATHAWAY NASA/ARC 2015/03

# Plamy słoneczne



<https://www.sidc.be/silso/datafiles>



SILSO graphics (<http://sidc.be/silso>) Royal Observatory of Belgium 2023 April 1

<https://www.sidc.be/silso/datafiles>



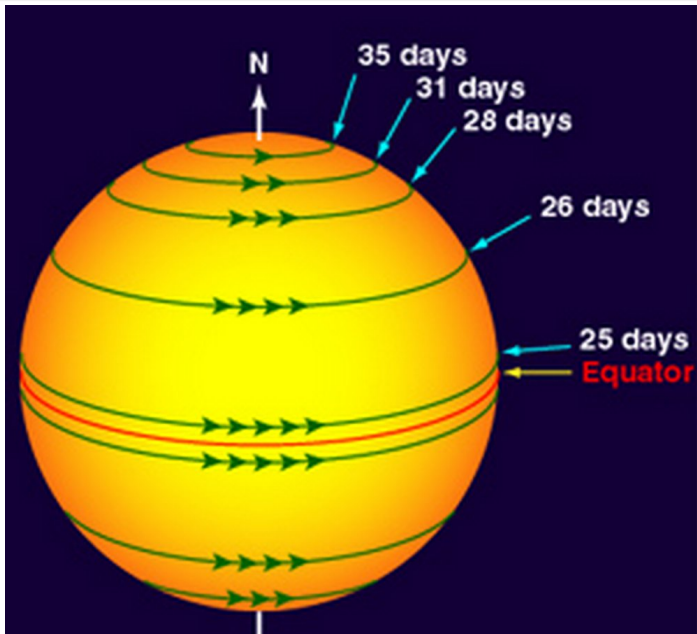
Podstawowe fakty:

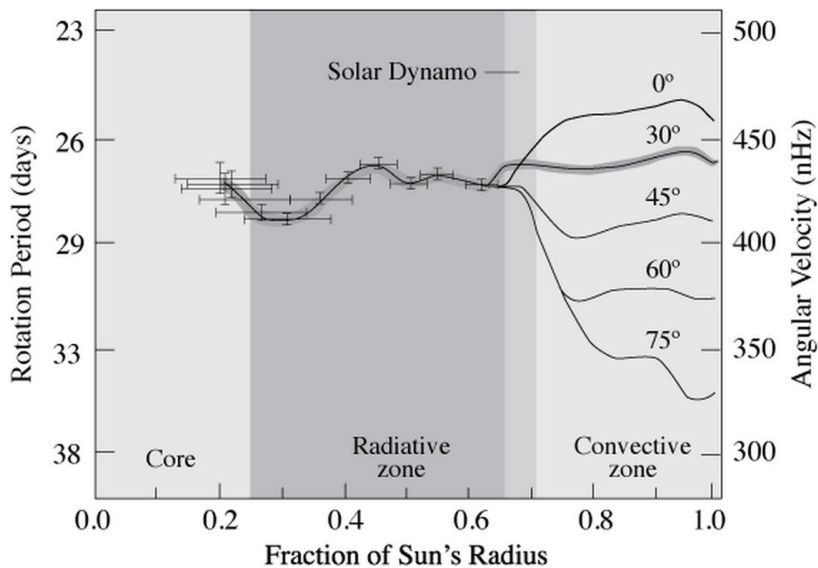
- 1 okres obrotu na równiku  $T \simeq 25$  dni
- 2 dla porównania: okres orbity tuż nad powierzchnią Słońca

$$2\pi / \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^3}} \simeq 2.7 \text{ godziny}$$

- 3 Słońce obraca się ponad 200 razy wolniej niż to możliwe
- 4 rotacja ma charakter różnicowy: obrót na równiku jest szybszy ( $T=25$  dni) niż na biegunach ( $T>30$  dni)
- 5 rotacja zmienia się z odległością od centrum
- 6 wkład w moment pędu Układu Słonecznego na poziomie 1%

# Rotacja Słońca

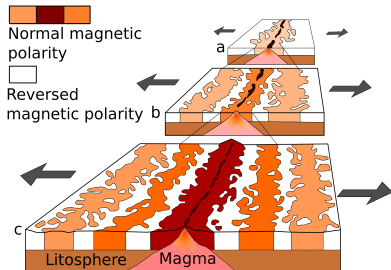




# Cykl magnetycznej aktywności Słońca i Ziemi

Pełny cykl aktywności obejmuje dwa maksima aktywności ze zmianą biegunów magnetycznych, po czym pole magnetyczne wraca do pozycji wyjściowej.

- dla Słońca pełny cykl wynosi  $2 \times 11 = 22$  lata
- analogiczne zjawisko przebiegunowania pola magnetycznego Ziemi zachodzi w kwaziperiodyczny sposób z czasem od 700 tysięcy do 2 milionów lat. Ostatnie miało miejsce 780 tyś. lat temu.
- podobne zjawisko obserwujemy dla innych gwiazd



# Teoria rotujących figur równowagi

# Teoria rotujących ciał: rotacja sztywna

Zagadnienie struktury i ewolucji stacjonarnych (niezależnych od czasu, ale z niezerową prędkością), w szczególności „rotujących” samograwitujących ciał będziemy rozpatrywać zaczynając od dwóch skrajnych przypadków:

- 1 obiekty o stałej gęstości (klasyczna teoria figur równowagi)
- 2 obiekty nieważkie, o średniej gęstości dążącej do zera, poruszające się w polu masy punktowej (model Roche'a)

Można pokazać, że w przypadku rotacji ze stałą prędkością kątową, ciała o rozkładzie gęstości danym funkcjami Lane-Emdena (politropy) zachowują się jakościowo podobnie do powyższych modeli gdy:

- $n < 0.8$  ( $\gamma = 1 + \frac{1}{n} > 2.25$ ) – jak ciało o stałej gęstości
- jak model Roche'a w przeciwnym przypadku

Wartość  $n \simeq 1$  i mniej odpowiada materii z której zbudowane są np: planety lub gwiazdy neutronowe.

# Elipsoidalne figury równowagi

Kształt powierzchni obracającego się ciała o stałej gęstości jest nieznany. Zakładając jednak rotację „sztywną”:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \text{const}$$

z przyspieszeniem odśrodkowym  $\vec{a}$  o potencjale odśrodkowym (centryfugalnym)  $\Phi_c$

$$\vec{a} = \Omega^2 r \vec{e}_r, \quad \Phi_c = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$$

jednym z rozwiązań jest elipsoida, dla której znany jest wzór na potencjał grawitacyjny (wewnątrz)

$$\Phi_g = \pi G \rho \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i^2 - r_i^2) A_i$$

gdzie  $\mathbf{a} = \{a, b, c\}$  to półosie elipsoidy,  $r = \{x, y, z\}$  oraz

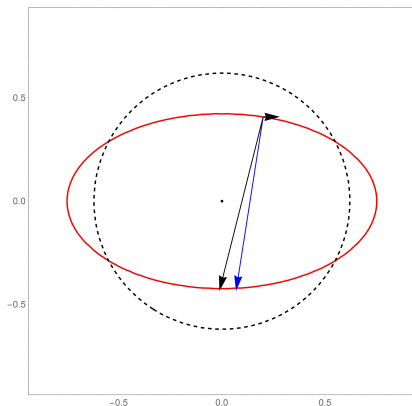
$$A_i = abc \int_0^\infty \frac{du}{(\mathbf{a}_i^2 + u) \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}}.$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

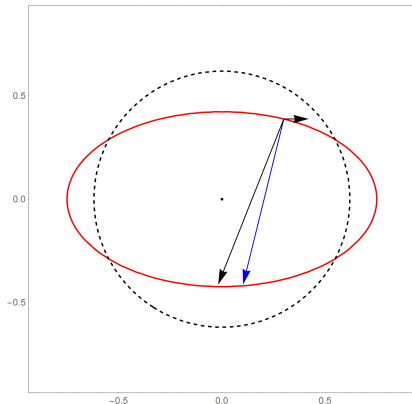
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

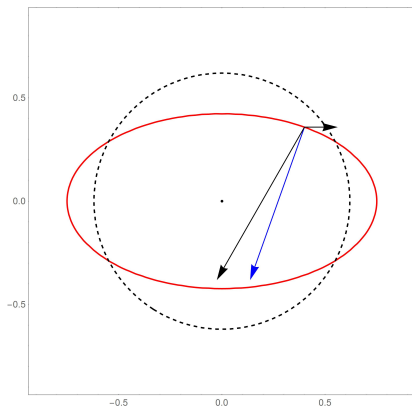
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

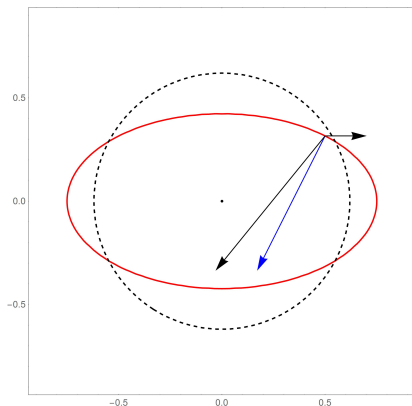
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

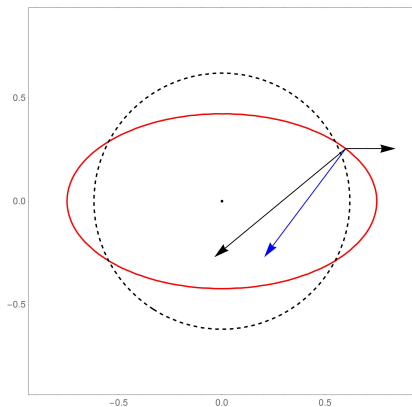
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

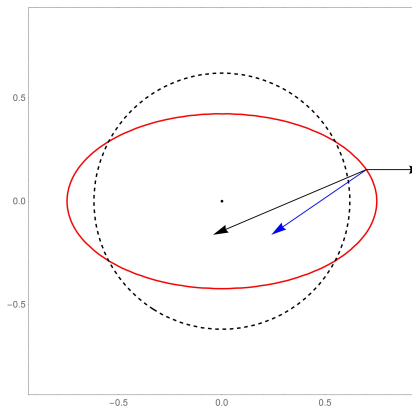
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

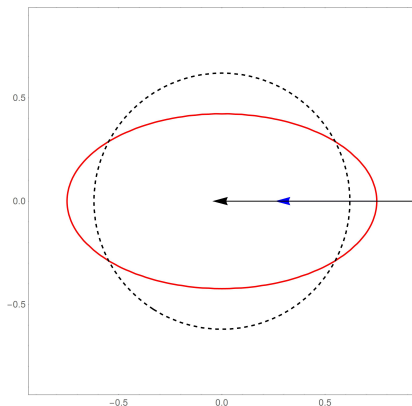
$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina: warunek równowagi

Aby ciecz pozostawała w stanie stacjonarnym, suma sił grawitacyjnej i odśrodkowej, musi być wszędzie prostopadła do powierzchni, jak w „wiadrze Newtona”

$$\vec{g} + r \Omega^2 \vec{e}_r \parallel \nabla P$$



# Elipsoida Maclaurina

Okazuje się, że równanie równowagi można przepisać w postaci równania elipsoidy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdzie:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_x - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{A_z}{A_y - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}}}, \quad \frac{4}{3}\pi abc = M$$

Rozwiązanie powyższego układu dla  $a = b$  w zależności od bezwymiarowego parametru

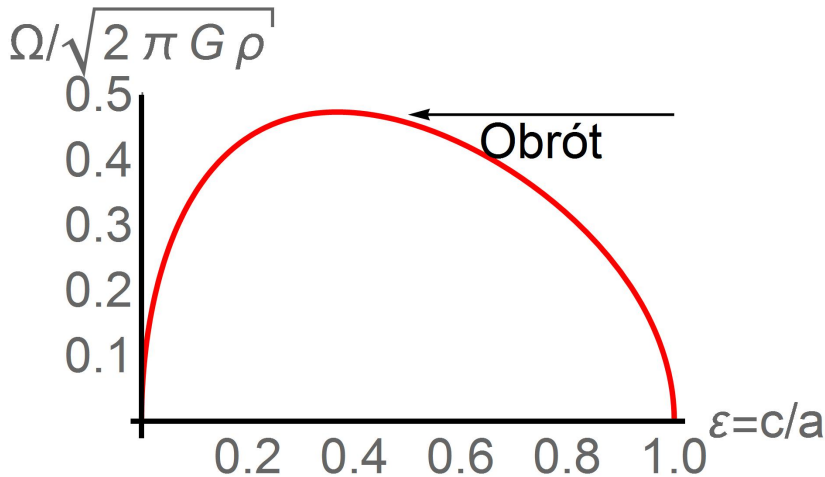
$$\chi = \Omega^2 / (2\pi G\rho)$$

nazywamy *elipsoidą Maclaurina*. Oznaczając spłaszczenie przez  $\varepsilon = c/a$  otrzymujemy:

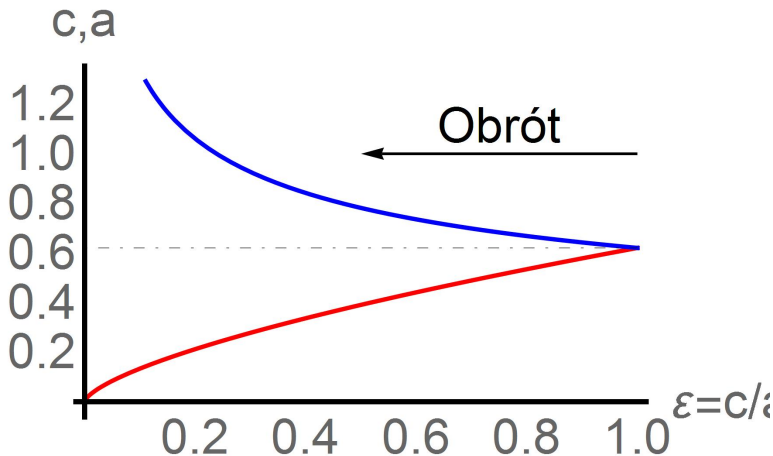
$$\chi = \varepsilon \frac{(2\varepsilon^2 + 1) \arccos \varepsilon - 3\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad \text{VS} \quad \chi = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$$



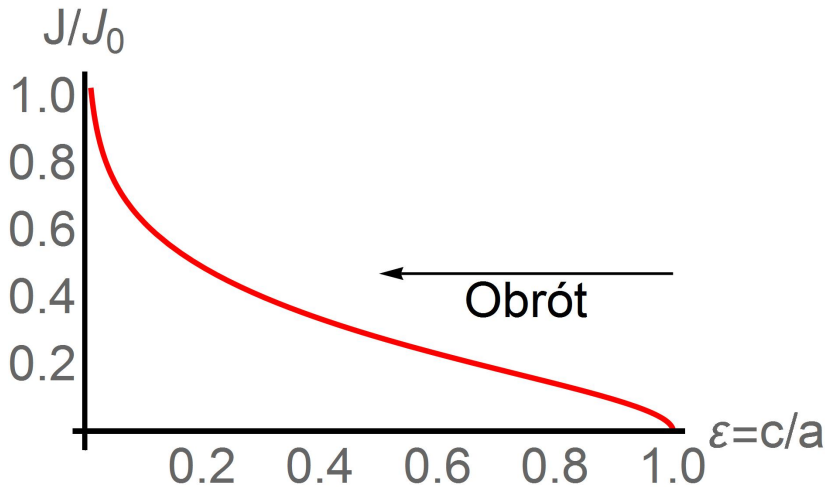
# Elipsoida Maclaurina: $\Omega$ , wymiary, moment pędu



# Porównanie elipsoidy o stałej objętości



# Elipsoida Maclaurina: $\Omega$ , wymiary, moment pędu



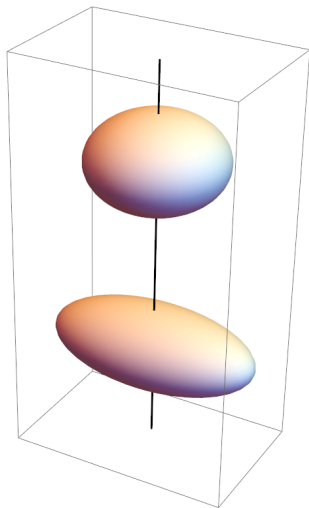
Elipsoidy Maclaurina tworzą ciąg obracających się elipsoid **obrotowych** o stale rosnącym **momencie pędu**  $J$ .

- dla  $J = 0$  figurą równowagi jest kula
- dla  $J < J_c$  prędkość kątowa elipsoidy rośnie, i ulega ona spłaszczeniu
- dla  $J = J_c$  elipsoida Maclaurina osiąga maksymalną możliwą prędkość kątową (dla Ziemi,  $\rho \simeq 5.5 \text{ g/cc}$ ,  $T_{obr} \simeq 147 \text{ minut}$ )

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \simeq 0.22, \quad \varepsilon \simeq 0.36767$$

- dalsze zwiększanie momentu pędu powoduje jeszcze większe spłaszczenie, ale od tego miejsca prędkość kątowa  $\Omega$  **maleje**
- dla  $J \rightarrow \infty$  elipsoida Maclaurina degeneruje się do nieskończenie cienkiego „placka” który praktycznie pozostaje w spoczynku

Zanim jeszcze elipsoida Maclaurina osiągnie maksymalną prędkość kątową dochodzi do *bifurkacji* (spontanicznego złamania symetrii) w kierunku trójosiowej *elipsoidy Jacobiego*. Powyżej punktu bifurkacji istnieją 2 rozwiązania o tym samym momencie pędu. Ciekawa wizualizacja bifurkacji: Jos Leys/Etienne Ghys, The shape of Planet Earth



Używa się kilku miar stopnia rotacji układów samograwitujących:

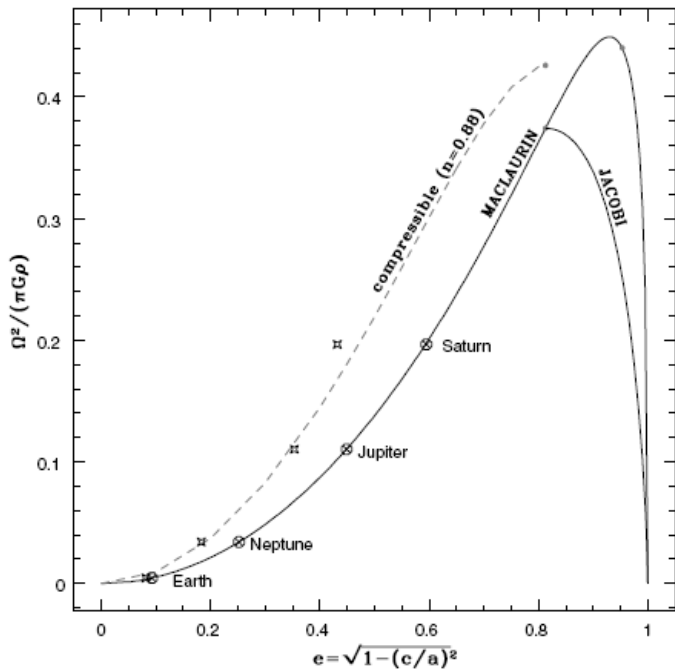
- bezwymiarowa prędkość kątowna

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$$

- moment pędu  $J$
- stosunek rotacyjnej energii kinetycznej  $E_k$  do grawitacyjnej energii wiązania  $E_g$

$$\beta = \frac{E_k}{|E_g|}$$

Z twierdzenia wirialnego  $0 \leq \beta < 0.5$ . Punkt bifurkacji do elipsoidy Jacobiego pojawia się dla  $\chi = 0.187, \beta = 0.1375$ , niestabilność dynamiczna elipsoidy Jacobiego  $\beta \simeq 0.16$ , Maclaurina  $\beta \simeq 0.27$ .



Warto przy okazji wspomnieć o równolegle rozwijanej analogicznej teorii rotującej cieczy z napięciem powierzchniowym.

- motywacją model kropowy jądra atomowego
- odpychanie elektrostatyczne zamiast przyciągania
- napięcie powierzchniowe daje energię wiązania

Przyrównując energię napięcia powierzchniowego do grawitacyjnej dla jednorodnej kuli mamy

$$4\pi R^2\sigma = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad \rightarrow \quad M = \frac{5\sigma}{G\rho}$$

Dla wody napięcie powierzchniowe  $\sigma \simeq 0.072\text{N/m}$  co daje przewagę sił samograwitacji już dla  $M > 1000$  ton ( $R > 10$  metrów). Dla materii jądrowej  $\sigma \sim 1.25 \text{ MeV/fm}^2$ , czyli  $M > 10^{10}$  kg (masa małej asteroidy).



# Elipsoida Dedekinda (Riemanna, Dirichleta)

Pole prędkości  $\mathbf{v}$  ( $v_x, v_y, v_z$ ):  $v_x = -q \zeta y$ ,  $v_y = (1 - q) \zeta x$ ,  $v_z = 0$ ,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \zeta \mathbf{e}_z$$

Z równania elipsoidy wynika wektor normalny

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = \nabla G = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$$

Warunek, że ciecz „nie wypływa” z elipsoidy,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ , daje

$$q = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad 1 - q = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Równania ruchu „elementu cieczy” – linii prądu:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -q \zeta y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (1 - q) \zeta x$$

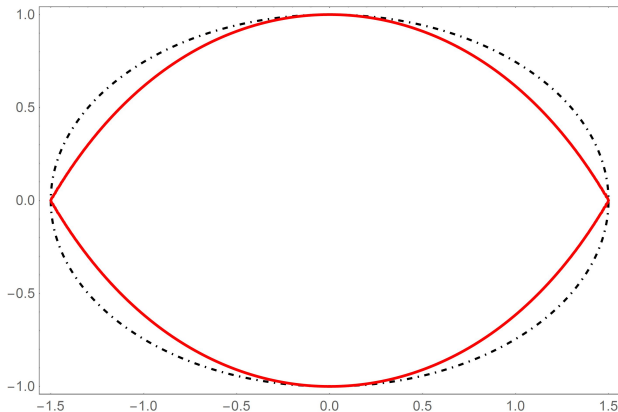
Podstawienie  $x = A e^{i\Omega t}$ ,  $y = B e^{i\Omega t}$  daje związek pomiędzy wirowością  $\zeta$  elipsoidy Dedekinda a prędkością kątową  $\Omega$  elipsoidy Jacobiego

$$\begin{bmatrix} i\Omega & -q \zeta \\ (1 - q) \zeta & i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad \zeta = \frac{a^2 + b^2}{ab} \Omega$$

# Model Roche'a

Zakładając, że cała masa rotującego obiektu jest skupiona w centrum, otrzymujemy równanie powierzchni:

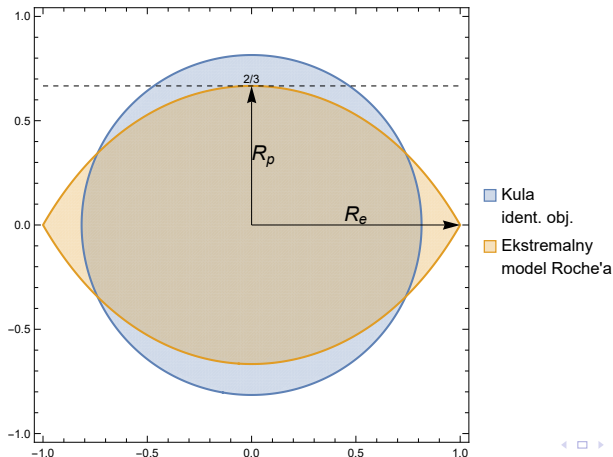
$$\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = \text{const} = \frac{GM}{R_p}$$



# Model Roche'a

Zakładając, że cała masa rotującego obiektu jest skupiona w centrum, otrzymujemy równanie powierzchni:

$$\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = \text{const} = \frac{GM}{R_p}$$



## SCIEŻKA MACLAURINA

- ciało o stałej gęstości
- kurczenie się
- rozpad
- fragmenty wchodzi na:
  - - ścieżkę Roche'a
  - - ścieżkę Maclaurina

## SCIEŻKA ROCHE'A

- ciało o prawie punktowym jądrze
- kurczenie się
- wypływ materii z równika
- powstanie dysku
- jądro lub obiekty dysku wchodzi na:
  - - ścieżkę Roche'a
  - - ścieżkę Maclaurina

# Rotacja różniczkowa

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1b)$$

- interesują nas rozwiązania, dla których prędkość  $\vec{v}$  jest funkcją wyłącznie współrzędnych (nie zależy od czasu)

Pochodna substancjonalna (operator  $\vec{v} \nabla$ )

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t, x(t), y(t), z(t))}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} \end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

równanie Eulera w przypadku stacjonarnym można przepisać jako:

$$\nabla(h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Jeżeli wyraz po prawej jest równy zeru lub jest gradientem pewnej funkcji, otrzymujemy **równanie Bernoulego**

$$h + \Phi_g + \frac{1}{2}v^2 = \text{const.}$$

## „Czysta rotacja”

Jednym z przypadków, kiedy można wprowadzić równanie Bernoulliego jest tzw. „czysta rotacja”:

$$\vec{v}(r, z, \phi) = \Omega(r, z)r \vec{e}_\phi.$$

W ogólności stacjonarne pole prędkości  $\vec{v}$  musi spełniać równanie

$$\mathbf{rot}(\vec{v} \times \mathbf{rot}\vec{v}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})) = 0.$$

Podstawienie czystej rotacji do powyższego równania daje:

$$2r\Omega(r, z)\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial z} = 0.$$

Przykład pola prędkości, które **nie jest** rotacją, a spełnia powyższe równanie, znajdujemy w elipsoidach Dedekinda.



# Twierdzenie Poincare-Wavre

Grawitacja powierzchniowa (ang. effective gravity)  $\vec{G}$  to suma natężenia pola grawitacyjnego  $\vec{g}$  i przyspieszenia odśrodkowego

$$\vec{G} = \vec{g} + r \Omega(r, z)^2 \vec{e}_r. \quad (2)$$

Dla samograwitującego ciała w stanie stacjonarnym o czystej rotacji poniższe zdania są równoważne:

- (i) *Rotacja jest cylindryczna:  $\Omega = \Omega(r)$ .*
- (ii) *Powierzchnie  $\rho = \text{const}$  and  $p = \text{const}$  pokrywają się.*
- (iii) *Grawitacja powierzchniowa  $\vec{G}$  ma potencjał*
- (iv) *Wektor  $\vec{G}$  jest prostopadły do izobar  $P = \text{const}$  (w szczególności do powierzchni  $P = \rho = 0$ ).*

Obiekt spełniający powyższe założenia nazywamy *barotropą*. Spełnia ona równanie

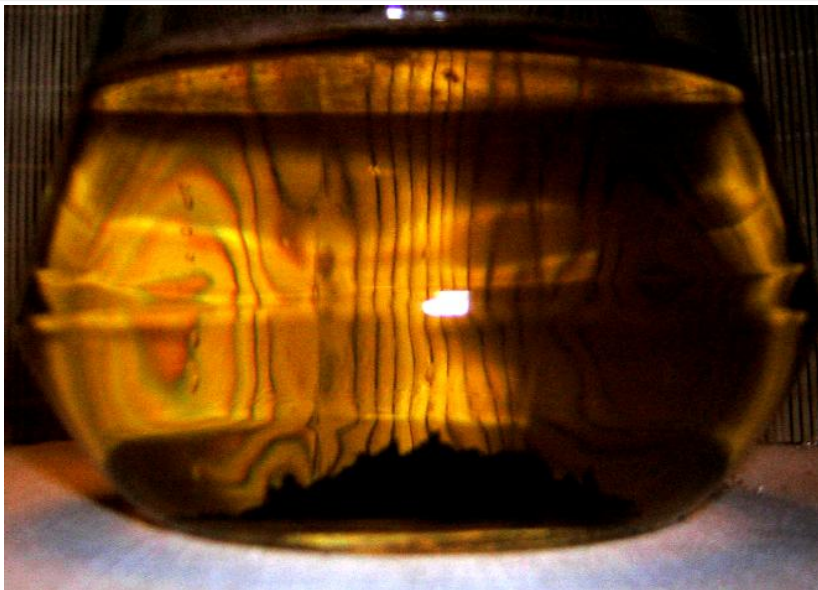
$$h(r, z) + \Phi_g + \Phi_c = C,$$

gdzie  $\Phi_g = \int \Omega^2 r dr$  to *potencjał odśrodkowy*.

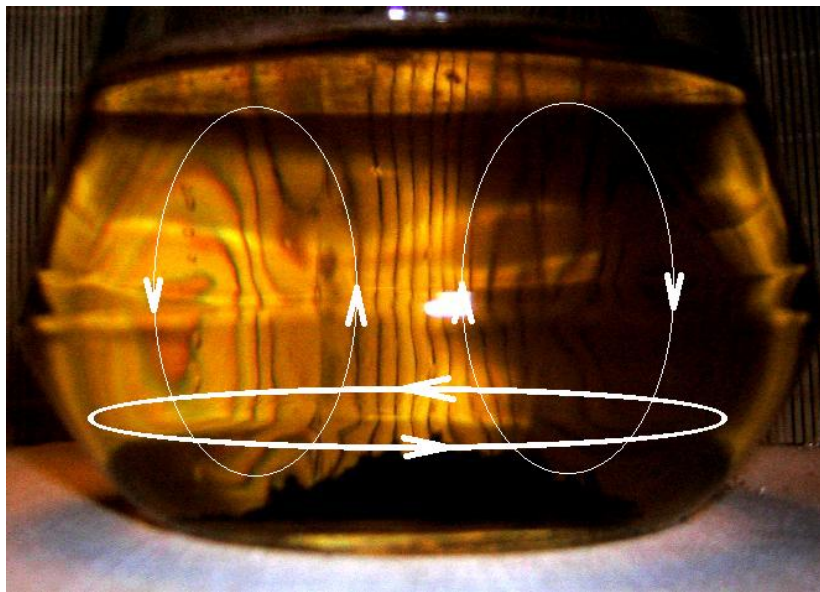
# Cyrkulacja południkowa



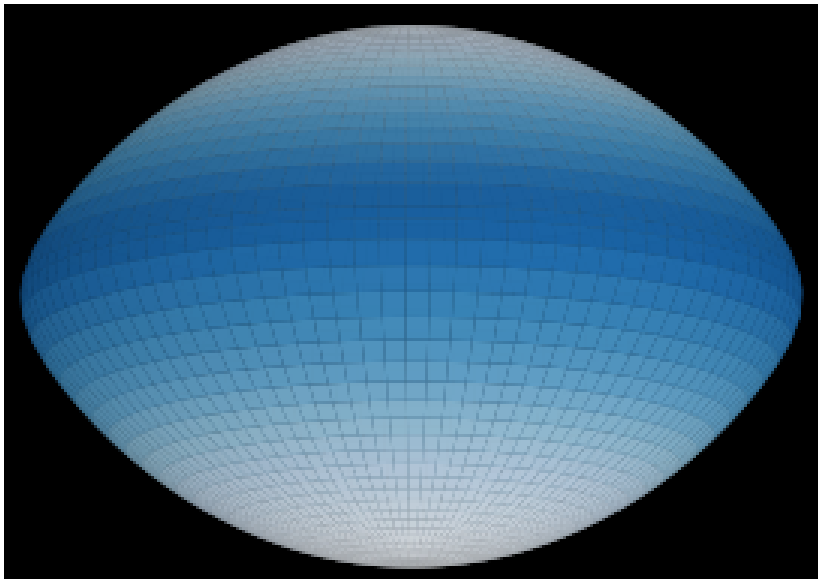
# Cyrkulacja południkowa



# Cyrkulacja południkowa



# Realistyczna gwiazda: $\alpha$ Eri ( ESTER )



Dołączenie do opisu równowagi hydrostacyjnej barotropy, równania na transport energii daje układ równań który jest sprzeczny. Sytuację określamy jako *paradoks von Zeipela*.

Sytuacja ta jest powszechnie ignorowana w astrofizyce, i modelowanie rotujących „gwiazd” rozbija się na 2 kategorie:

- rotujące barotropy z  $\Omega = \Omega(r)$ , które są w równowadze hydrostatycznej, ale nie termicznej
- obiekty z rotacją powłokową (ang: shellular rotation, 1D) z  $\Omega = \Omega(m) \equiv \Omega(\sqrt{r^2 + z^2})$ , które nie są w równowadze mechanicznej, ale są w równowadze termicznej

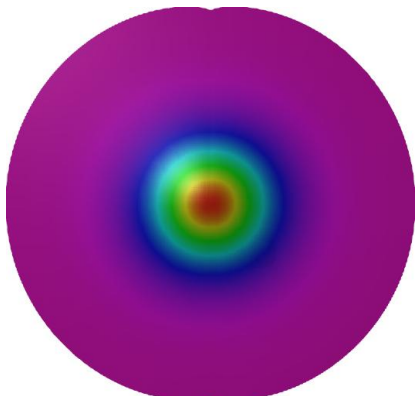
# Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



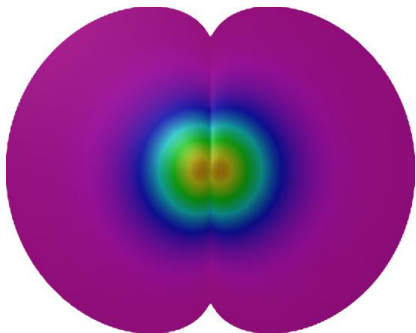
# Dyski akrecyjne

Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



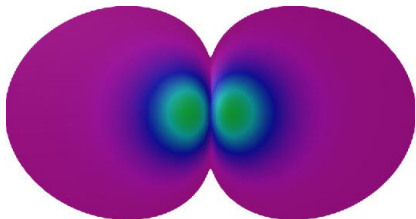


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$

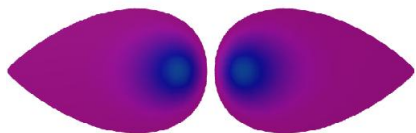


Pomimo bliskiego matematycznego pokrewieństwa z rotującymi różnicowo gwiazdami, teorię *dysków akrecyjnych* rozpatruje się osobno. Różnice to:

- 1 topologia typu torusa
- 2 punktowa masa centralna w środku (np: czarna dziura)
- 3 inne mechanizmy produkcji energii (np: tarcie)

W pierwszym przybliżeniu, równanie barotropy daje

$$h(r, z) = h_0(\sqrt{r^2 + z^2}) - \Phi_c + \Delta C$$



Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 +  
streaming przez Microsoft Teams