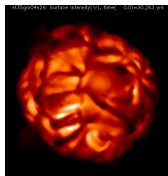
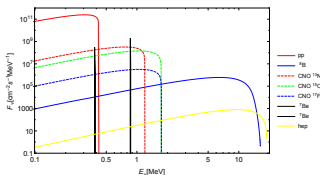
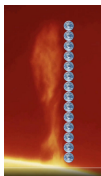


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

18 kwietnia 2023



Reakcje termojądrowe i neutrino słoneczne

Układ równań różniczkowych: wprowadzenie

Rozważmy reakcję:



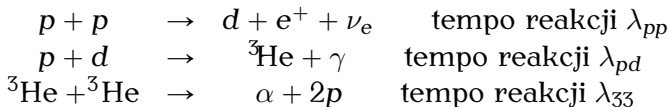
Ilości pozytonów i neutrin **nie śledzimy**. Zostają ilości protonów n_p i deutronów n_d . Ich zmiana w czasie wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 + \dots \\ \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 + \dots\end{aligned}$$

gdzie $\lambda_{pp}(T, \rho)$ to tempo zachodzenia reakcji pp , a kropkami zaznaczono inne reakcje

- tempo ubywania protonów musi być równe podwojonemu tempu produkcji deutronów
- liczba barionowa jest zachowana, czyli $n_p + 2n_d = \text{const}$: odpowiednie wyrazy po prawej stronie kasują się
- podobne wyrazy musimy napisać dla każdej z reakcji tworzącej lub niszczącej p, d itd.
- układ jest nieliniowy nawet dla $T, \rho = \text{const}$
- układ jest sztywny (stiff), co wymusza rozwiązywanie numeryczne metodami uwikłanymi (implicit)
- da się to robić np: w *Mathematica*: `Method`→"BDF", `MaxDifferenceOrder`→2

Układ równań różniczkowych cyklu ppI



Obliczamy tempo zmian ilości protonów n_p , deuteronów n_d , jąder helu-3 n_3 oraz cząstek alfa n_α :

$$\begin{aligned} \dot{n}_p &= -2\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d + 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_d &= +\lambda_{pp}n_p^2 - \lambda_{pd}n_p n_d \\ \dot{n}_3 &= +\lambda_{pd}n_p n_d - 2\lambda_{33}n_3^2 \\ \dot{n}_\alpha &= \lambda_{33}n_3^2 \end{aligned}$$

Sensowność wypisanego układu równań można sprawdzić np: za pomocą zasady zachowania liczby barionowej:

$$\sum_{i=1}^4 A_i n_i = n_p + 2n_d + 3n_3 + 4n_\alpha = \text{const},$$

lub równoważnie:

$$\dot{n}_p + 2\dot{n}_d + 3\dot{n}_3 + 4\dot{n}_\alpha = 0.$$

Wyznaczenie współczynników λ_{pp} , λ_{pd} , λ_{33} , określających szybkość reakcji wymaga wykonania kilku kroków:

- 1 obliczenie lub zmierzenie przekroju czynnego na reakcję, np:
 σ_{pp}
- 2 uwzględnienie poprawek „kulombowskich”
- 3 uśrednienie w warunkach równowagi termicznej: gazu doskonałego

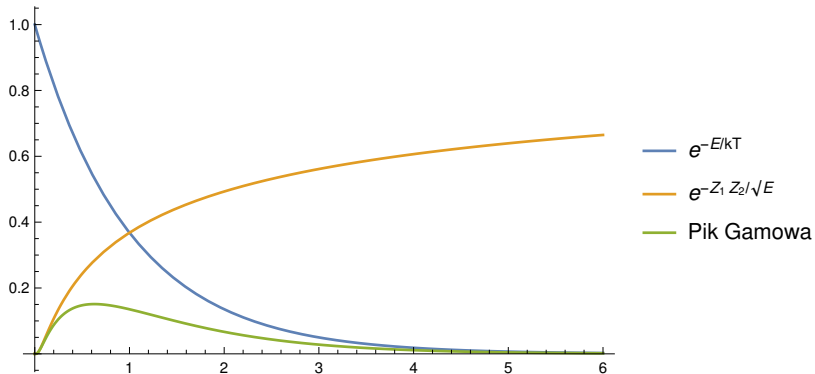
W obliczeniach tempa reakcji często decydujące są dwa przeciwstawnie działające wyrazy, zależne od energii $E = Mv^2/2$ zderzających się jąder w układzie środka masy:

$$\lambda \propto \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} \sigma(E) E dE = \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta} E dE$$

- rozkład Boltzmannia $e^{-\frac{E}{kT}}$: ilość cząstek o dużych energiach maleje wykładniczo (tzw: ogon termiczny)
- parametr η Sommerfelda ($v = \sqrt{2E/m}$ - prędkość):

$$\eta = \alpha \frac{Z_1 Z_2}{v/c} = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{2h\epsilon_0 v} \quad (\text{bezwymiarowy wsp. tunelowania})$$

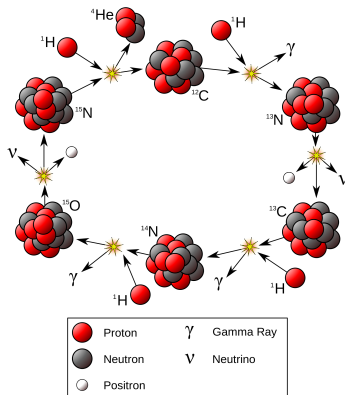
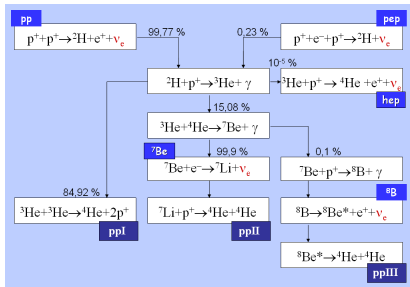
Pik Gamowa



- Gdyby jedyną rolą reakcji termojądrowych było produkowanie energii, to wystarczyłoby obliczyć jej wydajność w danej temperaturze T i gęstości ρ .
- Reakcje jądrowe zmieniają także powoli skład izotopowy/chemiczny materii
- powyższe tak naprawdę decyduje o ewolucji gwiazdy w długiej skali czasowej: życia i śmierci gwiazdy.
- Także neutrino elektronowe ν_e emitowane przez gwiazdy na etapie spalania wodoru są pochodzenia nuklearnego.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ F(r) \equiv \frac{L}{4\pi r^2} = -D \frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d \ln T}{d \ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \dots) \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon(X_i, T, \rho) \\ \frac{dX_i}{dt} = F_i(X_j, T, \rho) \end{cases}$$

Cykl pp vs CNO

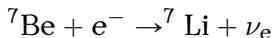


Obliczenie widma energetycznego neutrin słonecznych wymaga bardzo szczegółowego rozpatrzenia spalania wodoru:

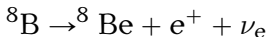
- cykl *ppI*
- cykl *ppII*
- cykl *ppIII*
- cykl CNO

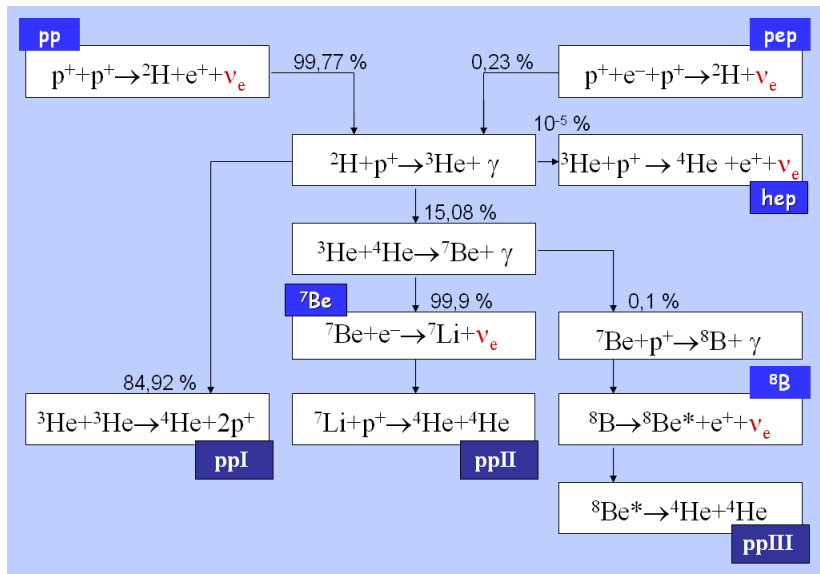
Wszystkie neutrino (w tym *pp* i *hep*) pochodzą z rozpadów β jąder. W Słońcu występują dwa typy takich reakcji, na przykład:

- 1 *ppII*: wychwytywanie elektronu (*neutrino berylowe, pep*)



- 2 *ppIII*: rozpad β^{+} (*neutrino borowe, pp, hep, CNO*)

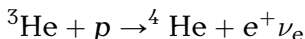




Typy widma neutrinowego ze Słońca

	ciągłe	liniowe
rozpad β^+	${}^8\text{B}$, pp , hep , CNO	—
wychwył e^-	—	pep , ${}^7\text{Be}$

- Reakcja hep jest analogiczna do pp :



- W cyklu CNO pojawiają się neutrino z rozpadów ${}^{13}\text{N}$, ${}^{15}\text{O}$ oraz ${}^{17}\text{F}$.

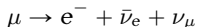
Widmo (anty)neutrinowe z rozpadu neutronu

Funkcyjną postać widma neutrinowego można łatwo zrozumieć analizując rachunek dotyczący prostszych procesów, np:

- rozpad β neutronu:



- rozpad β mionu:



W ogólności prawdopodobieństwo rozpadu β wynosi:

$$\frac{2\pi}{\hbar} \int \langle in|H|out \rangle^2 \delta(E_{in} - E_{out}) dN_e dN_\nu dN_{out}$$

Z rozpadu μ otrzymujemy wartość stałej sprzężenia oddziaływań słabych, stałą Fermiego G_F , natomiast z czasu rozpadu neutronu wartość $\langle in|H|out \rangle^2$ dla procesów z udziałem protonów, neutronów, elektronów i neutrin. Dalej zakładam, że $\langle in|H|out \rangle^2 \propto M^2$ jest znaną wielkością liczbową.

Widmo (anty)neutrinowe z rozpadu neutronu

Zakładam, że proton i neutron spoczywa, czyli ilość stanów końcowych protonu wynosi 1. Pozostaje całkowanie po ilości stanów końcowych elektronów $dN_e = d^3p_e/h^3$ i neutrin $dN_\nu = d^3p_\nu/h^3$:

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - E_\nu) d^3p_e d^3p_\nu.$$

Przechodzimy do układu sferycznego i całkując po wszystkich kierunkach elektronów i neutrin mamy:

$$\int \delta(m_n - m_p - E_e - E_\nu) 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu.$$

Dla elektronów $E_e^2 - p_e^2 = m_e^2$, dla neutrin $E_\nu = p_\nu$ ($c = 1$). Całkowanie delty Diraca sprowadza się do wyrugowania energii elektronu, bądź neutrina. W teorii rozpadu β na ogół ruguje się E_ν , my robimy odwrotnie:

$$E_e = Q - E_\nu, \quad \text{gdzie: } Q = (m_n - m_p)c^2$$

czyli całkowite tempo rozpadu jest proporcjonalne do:

$$\lambda \propto \int_0^{Q-m_e} \sqrt{(Q - E_\nu)^2 - m_e^2} (Q - E_\nu) E_\nu^2 dE_\nu$$

Wynik uogólniony na przypadek, gdy elektrony tworzą gaz Fermiego.

Wychwył elektronu

$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \frac{\varepsilon_\nu^2 (\varepsilon_\nu - \Delta Q) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp[(\varepsilon_\nu - \Delta Q - \mu)/kT]} \Theta(\varepsilon_\nu - \Delta Q - m_e) \quad (1)$$

Rozpad β^+

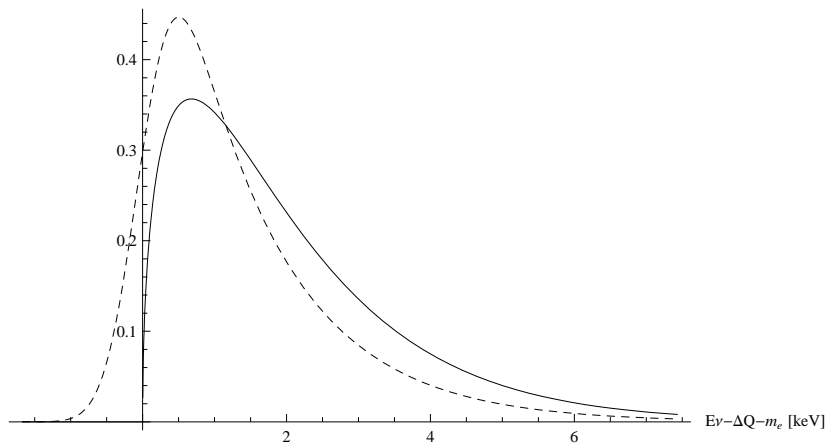
$$\frac{dF_\nu}{d\varepsilon_\nu} \propto \frac{\varepsilon_\nu^2 (\Delta Q - \varepsilon_\nu) \sqrt{(\varepsilon_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}}{1 + \exp(\varepsilon_\nu - \Delta Q + \mu)/kT} \Theta(\Delta Q - m_e - \varepsilon_\nu) \quad (2)$$

W przypadku Słońca gaz elektronowy jest niezdegenerowany ($\mu = 0$), a jego temperatura znacznie niższa niż różnice mas jąder ($\Delta Q \gg kT$).

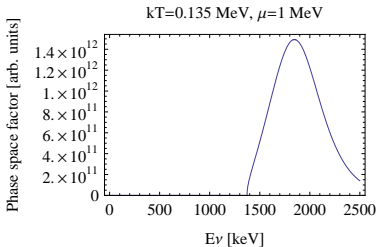
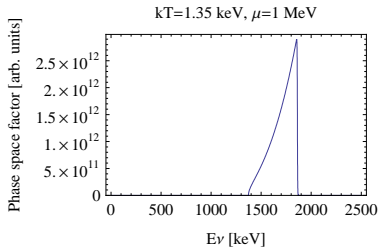
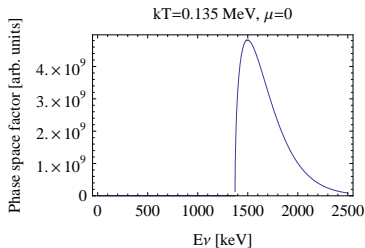
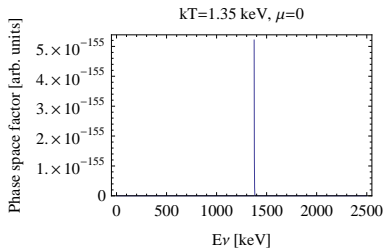
Powoduje to, że pierwsze widmo wygląda prawie jak δ Diraca, natomiast drugie to prosta funkcja algebraiczna (licznik we wzorze powyżej).

Widmo neutrin berylowych

Normalized ν_e spectrum



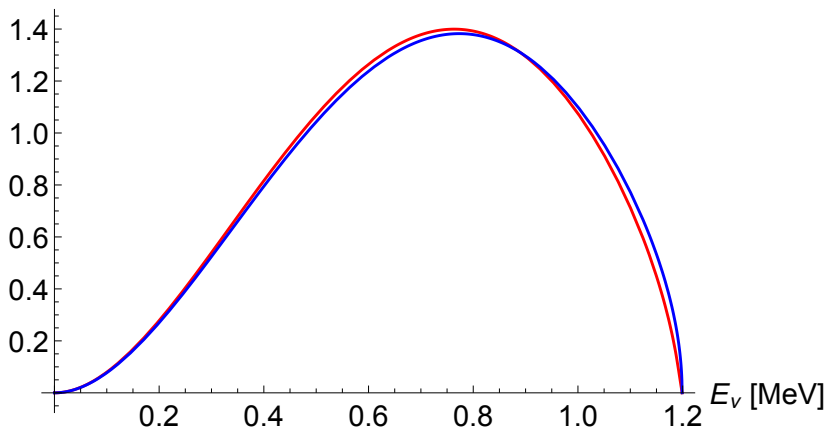
Widmo neutrin berylowych



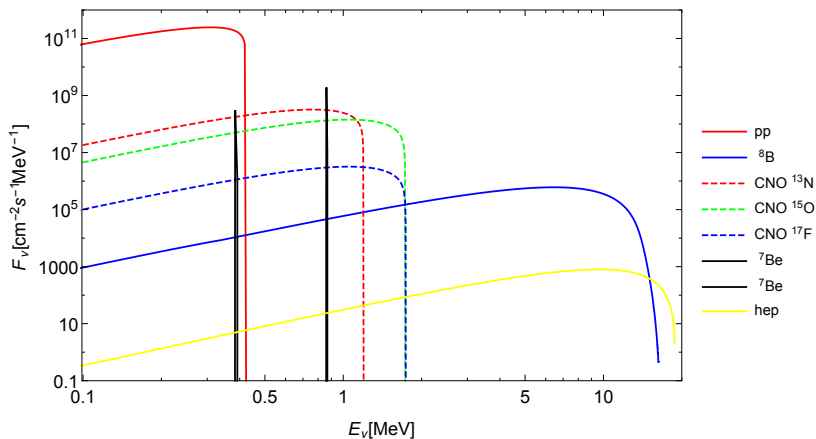
Widmo neutrin z rozpadu β^+ ^{13}N (cykl CNO)

$$\frac{dF_\nu}{d\mathcal{E}_\nu} \propto \mathcal{E}_\nu^2 (\Delta Q - \mathcal{E}_\nu) \sqrt{(\mathcal{E}_\nu - \Delta Q)^2 - m_e^2}$$

Znormalizowane do 1 widmo ν_e z rozpadu ^{13}N



Kompletne (prawie) widmo neutrin słonecznych



Problem neutrin słonecznych

Problemem neutrin słonecznych nazywamy duży (aż do 50%) deficyt neutrin obserwowanych na Ziemi w porównaniu z teorią budowy gwiazdy.

Współczesne wyjaśnienie

- neutrina są produkowane zgodnie z modelem Słońca i znanymi sieciami reakcji termojądrowych
- neutrina posiadają masę
- produkowane są w stanie kwantowym ν_e , który nie posiada dobrze określonej masy, a propagują się jako stany własne masy, czyli są superpozycją ν_e, ν_ν, ν_τ
- po drodze od centrum stany kwantowe ulegają mieszaniu, zarówno w Słońcu (poprzez oddziaływanie z elektronami, tzw. oscylacje w materii), jak i w próżni, a także wewnątrz Ziemi
- część neutrin, które narodziły się jako elektronowe, staje się mionowymi/taonowymi i nie jest wykrywana w niektórych detektorach

- 1 neutrino są produkowane i wykrywane jako ν_e, ν_μ, ν_τ
- 2 neutrino poruszają się jako stany własne masy: ν_1, ν_2, ν_3
- 3 człon kinetyczny w funkcji Lagrange'a ma postać odpowiednio:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

lub:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Macierz 3×3 opisującą przejście od stanów o określonej masie do stanów o określonym zapachu nazywamy *macierzą mieszania neutrin*.

Przybliżenie 2 zapachów

Aby nie zaciemniać opisu, ograniczymy się do mieszania ν_e i ν_μ :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Ponieważ neutrino są skrajnie relatywistyczne, możemy uprościć zależność:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = p \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \simeq p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p^2} \right) = p + \frac{m^2}{2p}, \quad E \simeq p$$

Neutrino o masie m_1 i m_2 propagują się niezależnie, a funkcja falowa mnożona jest przez fazę. Zakładając, że pędy obu neutrin są identyczne, otrzymujemy wynik:

$$e^{\frac{(Ect - \vec{p} \cdot \vec{r})}{i\hbar}} \simeq e^{\frac{\frac{m^2}{2p} r}{i\hbar}}$$

Różnica fazy jest proporcjonalna do r/L gdzie, r - odległość od Słońca, *długość mieszania neutrin* $L = \frac{2p}{\Delta m^2}$, natomiast Δm^2 jest **różnicą kwadratów mas neutrin**.

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 +
streaming przez Microsoft Teams