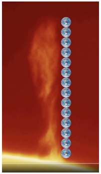
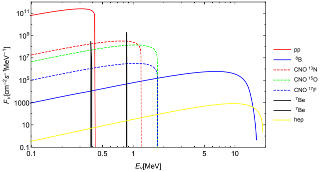
Podstawy astrofizyki i astronomii

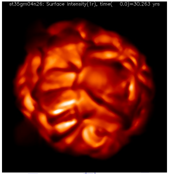
Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

28 marca 2023







Przekrój czynny a średnia droga swobodna

Porównanie równania dyfuzji z błądzeniem przypadkowym pozwala nam jednoznacznie powiązać makroskopowy proces dyfuzji energii promienistej, opisany współczynnikiem dyfuzji D, z mikroskopowym procesem oddziaływania fotonów z materią, opisanym średnią drogą swobodną L_γ.

Strumień energii

$$F_\gamma = -D\frac{d(aT^4)}{dr} = -\frac{4}{3}acL_\gamma T^3\frac{dT}{dr}, \quad D = \frac{1}{3}L_\gamma\, c$$

Standardowo prawdopodobieństwo oddziaływania „fotonu” z tarczą opisujemy za pomocą *przekroju czynnego*:

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma n} = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

gdzie: n - gęstość „atomów” tarczy, σ - całkowity przekrój czynny na oddziaływanie (zderzenie, absorpcja), κ - nieprzezroczystość (ang. *opacity*).

Przekrój czynny: przykład

Obliczanie/mierzenie przekrojów czynnych to standardowe zadanie fizyki cząstek elementarnych, jądrowej i atomowej.

W gwiazdach istotne są następujące procesy z udziałem fotonów:

1. rozpraszanie na swobodnych elektronach, (przekrój czynny Thomsona):

$$\sigma = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{\alpha h}{m_e c}\right)^2 \simeq 6.65 \times 10^{-29} m^2$$

   $\alpha \simeq 1/137$ - stała struktury subtelnej

2. procesy atomowe: przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi lub/i stanami swobodnymi

$$\sigma = \sigma(E_\gamma)$$

Średnia nieprzeźroczystość Rosselanda

Średnią długość swobodną można wyrazić także za pomocą *nieprzeźroczystości* κ i gęstości ρ:

$$L_\gamma = \frac{1}{\kappa\rho}.$$

W praktyce używa się średniej harmonicznej ważonej **pochodną temperaturową rozkładu Plancka**:

$$\frac{1}{\kappa} = \int_0^\infty \frac{\partial B(x)}{\partial T} \frac{dx}{\sum_i \kappa_i(x)}, \qquad x = \frac{h\nu}{kT}$$

gdzie:

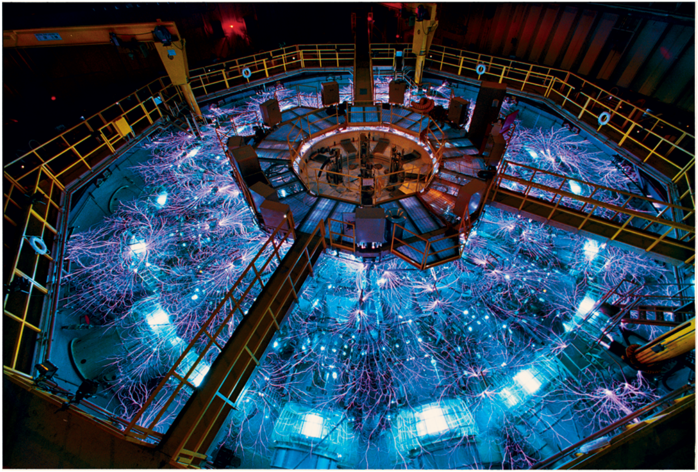
$$\frac{\partial B(x)}{\partial T} = \frac{15}{\pi^4} \frac{4}{\sinh^2(x/2)}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe procesy, atomy i ich stany zjonizowane.

OPAL

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL http://opalopacity.llnl.gov/, i jego kontynuacje, np: http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html



OPAL

W praktyce równanie stanu materii wraz ze średnią nieprzeźroczystością, uwzględniający najlepszą wiedzę empiryczną i teoretyczną przechowuje się w postaci tabeli numerycznej.

Przykładem takich danych są tablice i procedury OPAL http://opalopacity.llnl.gov/, i jego kontynuacje, np: http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html

Model punktowy (Cowlinga)

- formalnie równanie na profil temperatury można rozwiązać osobno (jeżeli założymy, że $D = const$) zaczynając od powierzchni nie wnikając skąd wzięła się energia:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2} = -D\frac{d(aT^4)}{dr}, \quad T(R_\odot) = T_\odot$$

- w takim modelu $T \to \infty$ dla $r \to 0$ a cała energia pochodzi z punktu $r = 0$,
- w praktyce zakłada się, że energia wychodzi z małego, skończonego obszaru: jądra w którym zachodzą reakcje termojądrowe

Średnia droga swobodna fotonu w modelu Eddingtona

W modelu Eddingtona gęstość energii gazu fotonowego to:

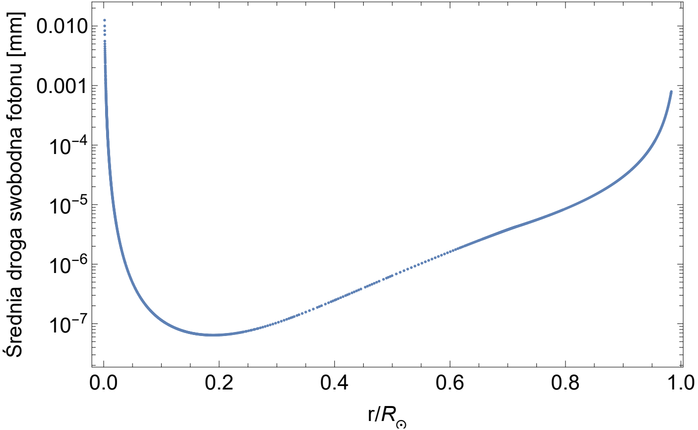
$$aT^4 = 3P_{\mathrm{rad}} = 3\beta P$$

Po wstawieniu do równań:

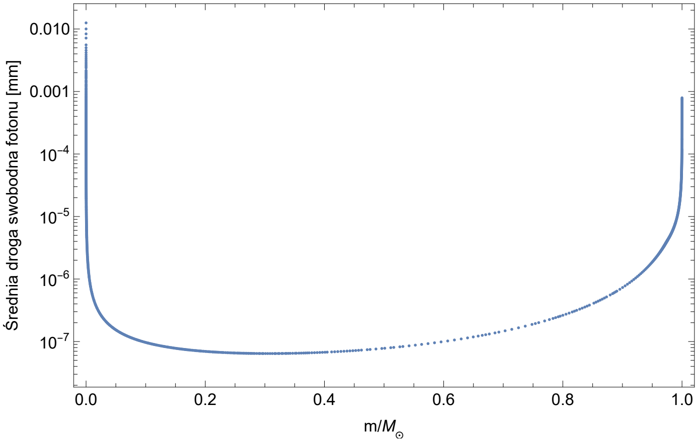
$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = -\frac{1}{3} L_\gamma c \frac{d(aT^4)}{dr} \end{cases}$$

dostajemy specjalną postać drogi swobodnej:

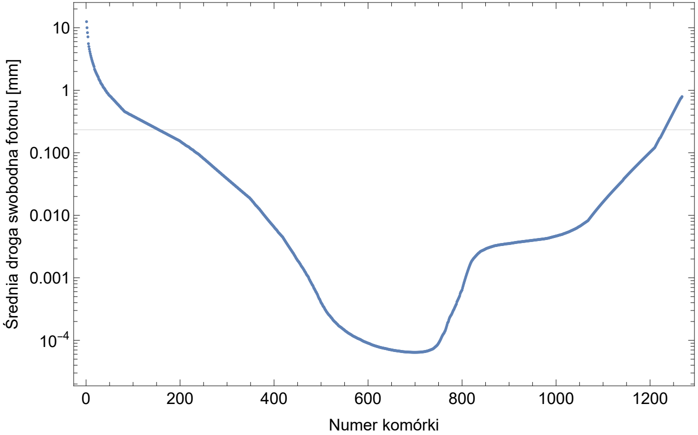
$$L_\gamma = \frac{L_\odot}{4\pi G c \beta \, m\rho}$$



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych



1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

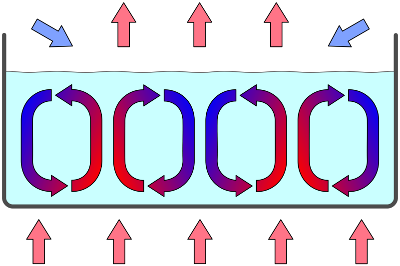


1. L_γ w zależności od odległości do centrum gwiazdy r
2. L_γ w zależności od masy m zawartej wewnątrz sfery o promieniu r
3. L_γ w zależności od numeru komórki, na które podzielono gwiazdę w celach obliczeniowych

Transport energii: konwekcja

Konwekcja

Jeżeli tempo produkcji energii jest duże, a procesy przewodnictwa ciepła nie nadążają z jej odprowadzaniem, tworzą się warunki prowadzące do niestabilności hydrodynamicznych. Najważniejszy przykład to *konwekcja*.



Konwekcja w 2D (YouTube)

Wyprowadzenie warunku konwekcji

- rozważamy bąbel gazu, który **adiabatycznie** (bez wymiany ciepła z otoczeniem) przemieszcza się o Δr w górę:

$$P = K\rho^{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}} = \gamma \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- na tym samym odcinku Δr gęstość gazu doskonałego w gwieździe zmieni się jak:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{*} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{*} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{*}$$

- zakładamy, że ciśnienie w bąblu wyrównało się z ciśnieniem w gwieździe:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{*} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\mathrm{ad}}$$

- jeżeli gęstość wewnątrz bąbla spada szybciej niż gęstość w gwieździe, to zaczyna on się unosić jak balon na gorące powietrze:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{\mathrm{ad}} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)_{*} \rightarrow \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{P} - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{*} \rightarrow \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

Prawie kompletny układ równań struktury gwiazdy

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\,\rho \\ F = -D\frac{d(aT^4)}{dr} \quad \text{lub} \quad \frac{d\ln T}{d\ln P} = 1 - \frac{1}{\gamma} \\ P = P(\rho, T, \ldots) \end{cases}$$

Powyżej mamy 5 funkcji niewiadomych:

- $m(r)$ – masa zawarta w kuli o promieniu r
- $P(r), \rho(r)$ – ciśnienie i gęstość w równowadze hydrostatycznej
- $T(r)$ – rozkład temperatury wewnątrz gwiazdy
- $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ – strumień energii przepływającej przez gwiazdę

Ciągle brakuje równania określającego źródło i tempo produkcji energii. Na razie cała energia $L(r) = L_{\odot}$ produkowana przez gwiazdę pojawia się bez uzasadnienia w $r = 0$.

Źródło energii gwiazdy

Dotąd konsekwentnie omijaliśmy pytanie: *gdzie gwiazda produkuje energię niezbędną do świecenia?*
Strumień energii L wypływający przez sferę o promieniu r musi być równy całce z objętościowego tempa produkcji energii ε:

$$L(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 \, dr \rightarrow \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon$$

Równanie to przyjmuje jeszcze prostszą postać, gdy zamiast r użyjemy masy m zawartej w kuli o promieniu r jako zmiennej radialnej:

$$\frac{dL(r)}{dm} = \varepsilon/\rho = \epsilon$$

gdzie ϵ jest tempem produkcji energii na jednostkę masy.

Kompletny układ równań

Cztery równania struktury gwiazdy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} & \text{równowaga hydrostatyczna} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{równanie ciągłości/prawo zachowania masy} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{L}{16\pi a D r^2 T^3} \quad \text{lub} \quad \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P}\frac{dP}{dr} & \text{transport energii} \\ \frac{dL}{dm} = \epsilon & \text{tempo i miejsce produkcji energii} \end{cases}$$

Układ uzupełniają funkcje określające własności materii w zależności od jej gęstości ρ, temperatury T oraz składu chemicznego/izotopowego X_i:

- równanie stanu $P(\rho, T, X_i)$
- nieprzeźroczystość $\kappa(\rho, T, X_i)$ (współczynnik dyfuzji D)
- tempo produkcji energii $\epsilon(\rho, T, X_i)$

Niewiadomymi są 4 funkcje: $\rho(r)$, $m(r)$, $T(r)$, $L(r)$.

- warunki początkowe:

$$\begin{cases} m(0) = 0, m(R_\odot) = M_\odot \\ P(0) = P_C, \rho(0) = \rho_C, \quad p(R_\odot) = \rho(R_\odot) = 0 \\ T(R_\odot) = T_\odot \end{cases}$$

- część warunków zadana jest w centrum, część na powierzchni: w praktyce bardzo trudno „trafić” w szukane rozwiązanie (np: metodą strzałów)
- konieczne rozwiązanie całego układu na raz, np: konwertując do układu algebraicznego metodą różnic skończonych (metoda Henyey-a)
- rozwiązanie wymaga „doklejenia” atmosfery gwiazdy
- nie jest to zadanie typu „*wpisz w Mathematicę i użyj **NDSolve***”

Chcesz wiedzieć więcej?

Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 + streaming przez Microsoft Teams