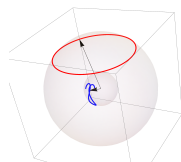
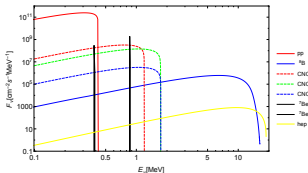
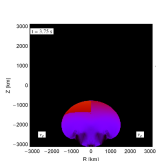


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

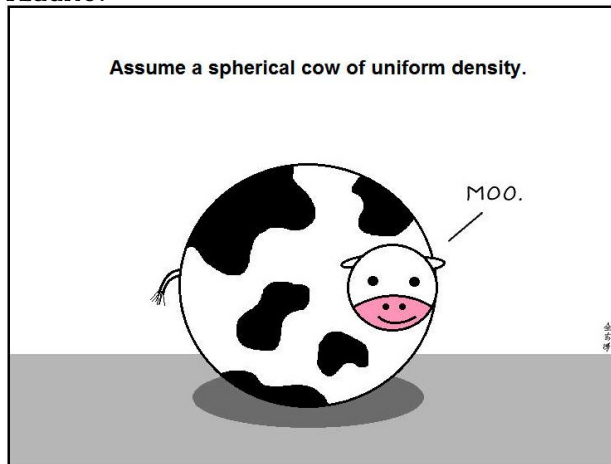
14 marca 2023



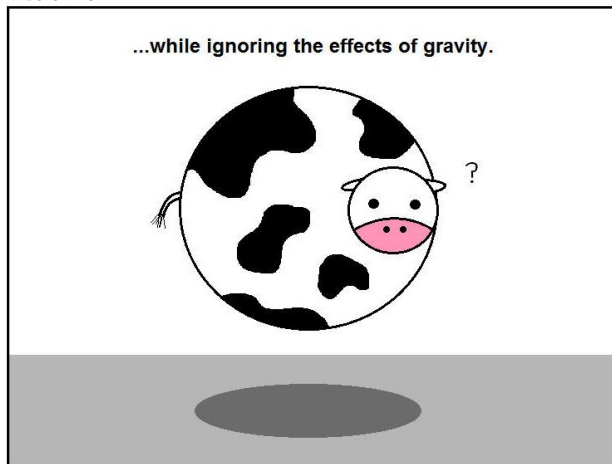
- celem kilku następnych wykładów i ćwiczeń jest stworzenie serii sensownych i coraz dokładniejszych modeli Słońca
- Słońce traktujemy jako prototypową gwiazdę
- Słońce jest sferycznie symetryczną, stabilną gwiazdą na *ciągu głównym*
 - 1 **równowaga hydrostatyczna:** w jaki sposób Słońce utrzymuje niemal statyczny rozkład gęstości i ciśnienia?
 - 2 **równanie stanu (EOS):** jaka jest zależność ciśnienia od gęstości, temperatury i składu chemicznego Słońca?
 - 3 **równowaga termiczna:** jaka jest zależność temperatury od odległości od centrum?
 - 4 **źródło energii i ewolucja:** skąd bierze się moc Słońca i jak zmienia się w czasie?

Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!

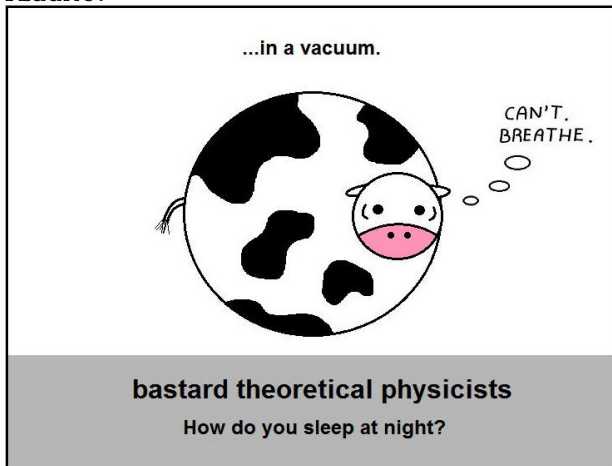
Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Praktyka pokazuje, że w astrofizyce z obliczeniami, które **nie zakładają** symetrii sferycznej spotykamy się niezwykle rzadko!



Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest uzasadnione:

- 1 planety, planety karłowate, duże księżyce
- 2 większość gwiazd
- 3 gwiazdy neutronowe, białe karły, czarne dziury
- 4 gromady kuliste gwiazd
- 5 gromady galaktyk
- 6 Wszechświat

Obiekty, dla których założenie o sferycznej symetrii jest nieuzasadnione:

- 1 galaktyki spiralne
- 2 dyski akrecyjne
- 3 obiekty bardzo szybko rotujące
- 4 ciasne układy podwójne

Politropy

$$p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

γ – wykładnik politropy, n – indeks politropy

- $n \rightarrow \infty, \gamma = 1$ – izotermiczne równanie stanu
- $n = 5, \gamma = \frac{6}{5}$ – wartość graniczna pomiędzy skończonymi a nieskończonymi rozwiązaniami (sfera Plummera)
- $n = 3, \gamma = \frac{4}{3}$ – model „Słońca”, relatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 3/2, \gamma = \frac{5}{3}$ – nierelatywistyczny gaz zdegenerowany
- $n = 1, \gamma = 2$ – gwiazda konwektywna
- $n \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty$ – przypadek stałej gęstości

Politropowe równanie stanu: wzory

	γ – wykładnik politropy	n – indeks politropy
ciśnienie	$p = K\rho^\gamma$	$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$
„entalpia” właściwa $h = \frac{(H/V)}{\rho}$	$h = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$	$h = K(n+1)\rho^{1/n}$
„prędkość dźwięku” $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$	$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$	$c_s^2 = K(1 + \frac{1}{n})\rho^{1/n}$
	$c_s^2 = (\gamma - 1) h$	$h = n c_s^2$
	$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$	$h = (n+1) \frac{p}{\rho}$

Równanie równowagi dla entalpii

Wcześniej pokazaliśmy, że użycie „entalpii” właściwej $\nabla h = \nabla p / \rho$ upraszcza równania.

$$\frac{\nabla p}{\rho} \equiv \nabla h = -\nabla \Phi_g \quad (1a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad (1b)$$

Pierwsze równanie można scałkować:

$$h + \Phi_g = \text{const} \quad (2a)$$

$$\Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad (2b)$$

Działając obustronnie operatorem Laplace'a Δ na pierwsze z równań i korzystając z drugiego mamy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0$$

Równanie Lane-Emdena

Po wyprowadzeniu wzoru na entalpię gazu politropowego, otrzymujemy:

$$\Delta h + 4\pi G \rho = 0, \quad h(\rho) = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{1/n}$$

do ostatecznie daje jedno równanie różniczkowe:

$$\Delta h + 4\pi G \left(\frac{\gamma-1}{K\gamma} \right)^n h^n = 0$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych na postać:

$$\Delta h = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dh}{dr} \right) = \frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh}{dr}$$

Standardową postać otrzymamy dokonując równoczesnej zamiany zmiennej radialnej r i funkcji niewiadomej h :

$$h(x) = h_c w(x), \quad r = \lambda x$$

Po przeprowadzeniu rachunków otrzymujemy słynne równanie Lane-Emdena:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0.$$

Równanie:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + w^n = 0$$

w warunkami początkowymi $w(0) = 1$, $w'(0) = 0$ definiuje rodzinę funkcji specjalnych $w_n(x)$.

Pewne wyobrażenie o przebiegu funkcji w_n dają trzy znane rozwiązania symboliczne:

- dla $n = 0$

$$w_0 = 1 - \frac{x^2}{6}$$

- dla $n = 1$

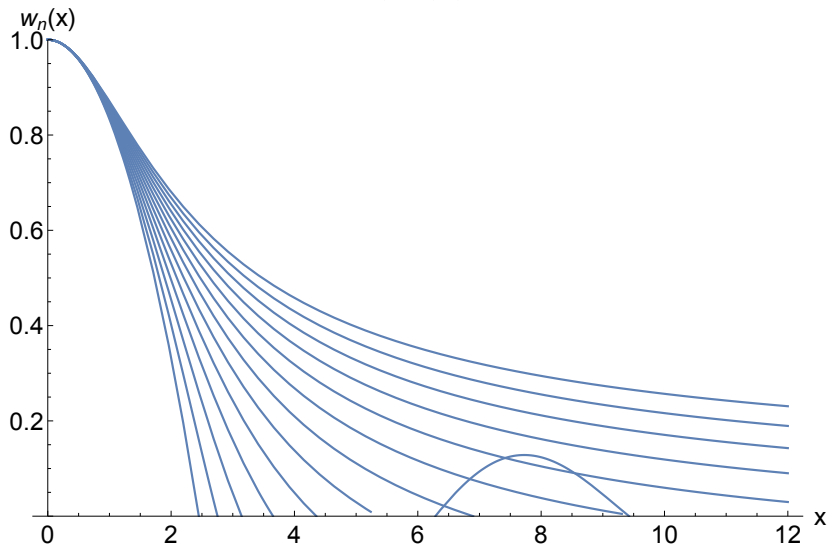
$$w_1 = \frac{\sin x}{x} = \operatorname{sinc} x$$

- dla $n = 5$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/3}}$$

Funkcje Lane-Emdena: wykresy

$n=0, 1/2, 1, \dots, 6$



Rozwiązanie opisują wzory:

$$h(r) = h_C w_n(r/\lambda), \quad \rho(r) = \rho_C w_n(r/\lambda)^n$$

gdzie skalowanie opisuje kombinacja o wymiarze długości:

$$\lambda = c_s \sqrt{\frac{n}{4\pi G \rho_C}} = \sqrt{\frac{h_C}{4\pi G \rho_C}}$$

Wielkość $1/\sqrt{G\rho}$ ma wymiar czasu, natomiast c_s to prędkość „dźwięku”, obie liczone dla wartości w centrum „gwiazdy”. Strukturalnie wzór na λ wygląda identycznie jak wzór na długość *Jeansa*.

Promień gwiazdy R opisuje przeskalowane pierwsze miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena, natomiast masa gwiazdy M zależy od pochodnej funkcji w miejscu zerowym.

Oznaczmy:

x_0 – miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena,

$w'_n(x_0)$ – nachylenie funkcji w miejscu zerowym.

$$R = \lambda x_0$$

$$M = 4\pi\rho_C\lambda^3 \left(-x_0^2 w'_n(x_0)\right)$$

Jeżeli znamy masę M i promień R obiektu, oraz potrafimy obliczyć indeks n równania stanu materii z której jest zbudowany, to znamy strukturę wewnętrzną:

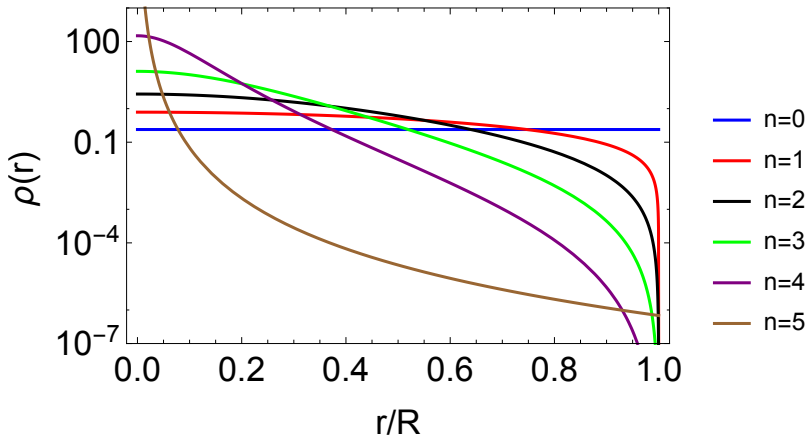
$$\rho(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} w_n \left(\frac{r}{R} x_0 \right)^n \left(-\frac{x_0}{3x_1} \right)$$

Wielkość:

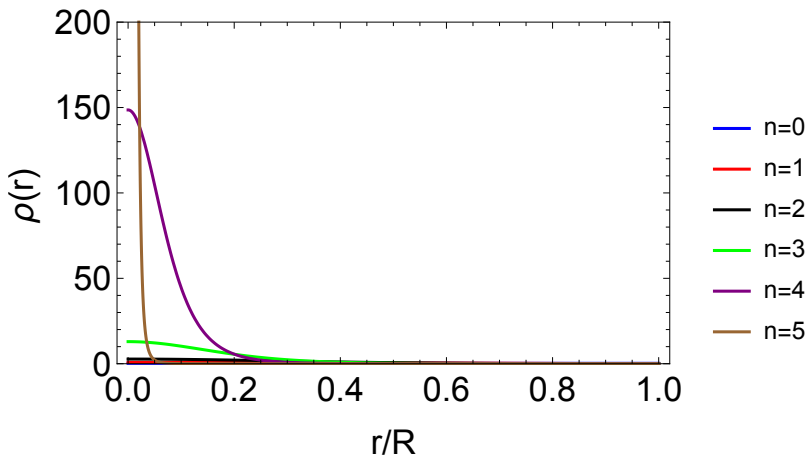
$$-\frac{x_0}{3x_1} = \frac{\rho_C}{\bar{\rho}}$$

gdzie: ρ_C – gęstość centralna (w środku), $\bar{\rho} = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ – gęstość średnia, nazywamy *kontrastem gęstości*.

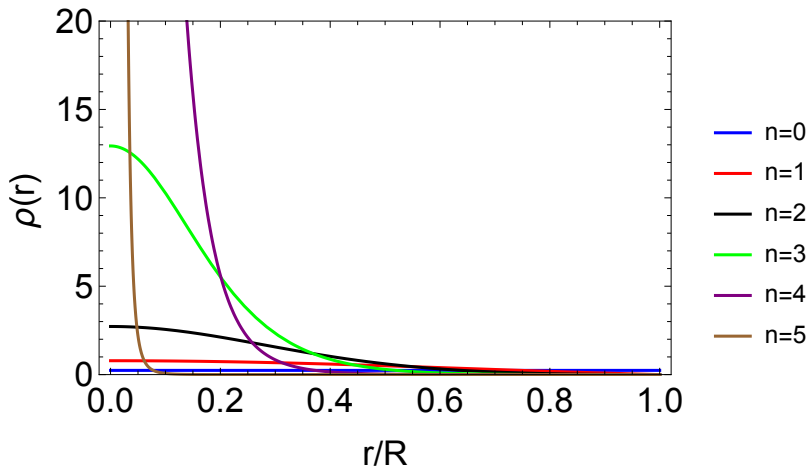
Przykłady struktury dla zadanego R i M



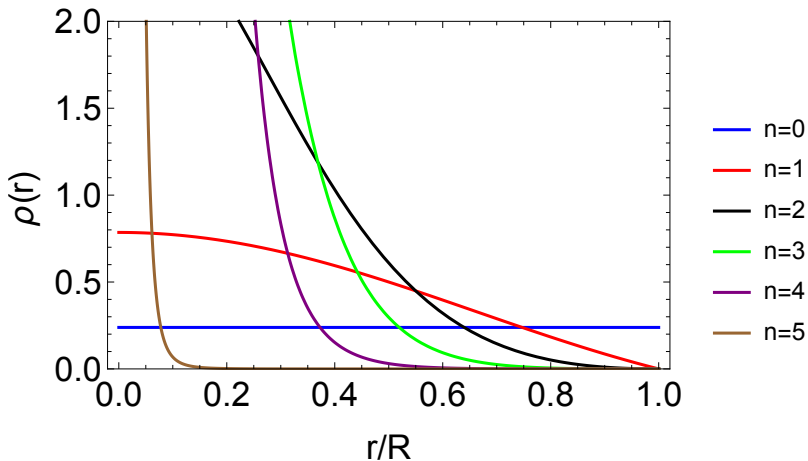
Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Przykłady struktury dla zadanego R i M



Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} M = 4\pi\lambda^3\rho_C (-x_0^2 w'_n(x_0)) \\ R = \lambda x_0 \\ \lambda^2 = \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} \\ h_C = K(n+1)\rho_C^{1/n} \end{cases} \quad (3)$$

Ostatnie równanie eliminuje h_C , z drugiego bierzemy λ . Zostają dwa równania łączące M , R i ρ_C . Po wyeliminowaniu gęstości centralnej ρ_C pozostaje skomplikowany wzór łączący promień R i masę M ciała:

$$R = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{x_0}{w'_n(x_0)} \right)^{\frac{n-1}{n-3}} \left(\frac{4\pi G}{K(n+1)x_0^2} \right)^{n/(n-3)} M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

Politropy: zależność masa-promień

Pomijając czynniki zależne tylko od równania stanu, t.j. K i n , mamy:

$$R \propto M^{\frac{n-1}{n-3}}$$

- dla $n < 1$ promień ciała R rośnie przy dokładaniu masy M
- dla $n = 1$ promień ciała R jest stały, niezależnie od masy M
- dla $1 < n < 3$ promień ciała **maleje** przy dokładaniu masy M
- dla $n = 3$ masa ciała $M = \text{const}$, i zależy wyłącznie od równania stanu (stałych fizycznych); w przypadku relatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego nazywamy ją *masą Chandrasekhara*
 $M_{Ch} \simeq m_{Planck}^3 / m_{proton}^2 \simeq 1.5M_{\odot}$
- dla $3 < n < 5$ promień znowu rośnie z masą
- dla $n \geq 5$ promień jest nieskończony

Dane jest równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

Przybliżamy gradient ciśnienia:

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta r} \sim \frac{p(R) - p(0)}{R - 0} = -\frac{p_C}{R}$$

i analogicznie prawą stronę:

$$-\frac{Gm\rho}{r^2} \sim -\frac{GM\rho_C}{R^2}$$

Dostajemy:

$$\frac{p_C}{\rho_C} = \frac{GM}{R}$$

W modelu politropowym:

$$\begin{aligned}\frac{GM}{R} &= \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}}{R} = \frac{4\pi G\rho_C}{3} \left(-3\frac{w'_n(x_0)}{x_0} \right) \lambda^2 x_0^2 = \\ &= -x_0 w'_n(x_0) 4\pi G\rho_C \frac{h_C}{4\pi G\rho_C} = -x_0 w'_n(x_0) h_C = \\ &= -x_0 w'_n(x_0)(n+1) \frac{p_C}{\rho_C}\end{aligned}$$

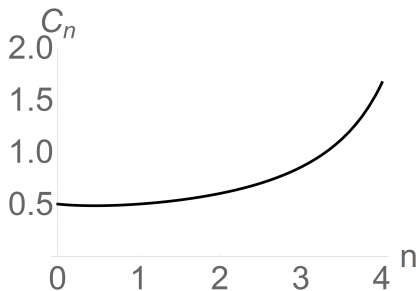
One-zone

Politropa

$$\frac{p_c}{\rho_c} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{p_c}{\rho_c} = C_n \frac{GM}{R}$$

$$C_n = -\frac{1}{x_0 w'_n(x_0)(n+1)}$$



Model Eddingtona

Eleganckim zastosowaniem struktury politropowej jest model do którego potrzebujemy:

- 1 równanie stanu (EOS) częściowo zjonizowanej mieszaniny H i He (gaz doskonały)
- 2 równanie stanu (EOS) gazu fotonowego (relatywistycznego)
- 3 rozwiązanie równania Lane-Emdena z $n = 3$



POWIETRZE
+
PARA WODNA



H/HE W GWIAZDACH
+
METALE

imgflip.com

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

- 1 skład „chemiczny” gazu
- 2 masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
- 3 stopień jonizacji/dysocjacji
- 1 75% wodoru (H), 25 % helu (${}^4\text{He}$)
- 2 $m_{\text{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^1\text{H}$ (0.02% ${}^2\text{H}$),
 $m_{\text{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^4\text{He}$
(śladowe ilości ${}^3\text{He}$).
- 3 dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} + \frac{X_{\text{He}}}{A_{\text{He}}} \right) = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho kT}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** $x2$, w postaci H_2 0.5.

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

- 1 skład „chemiczny” gazu
- 2 masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
- 3 stopień jonizacji/dysocjacji
- 1 75% wodoru (H), 25 % helu (${}^4\text{He}$)
- 2 $m_{\text{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^1\text{H}$ (0.02% ${}^2\text{H}$),
 $m_{\text{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^4\text{He}$
(śladowe ilości ${}^3\text{He}$).
- 3 dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho k T}{m_p} \left(\frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} + \frac{X_{\text{He}}}{A_{\text{He}}} \right) = \frac{\rho k T}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho k T}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** x_2 , w postaci H_2 0.5.

Aby wyznaczyć konkretną numeryczną wartość współczynnika w równaniu stanu, musimy znać:

- 1 skład „chemiczny” gazu
 - 2 masę m cząsteczki każdego ze składników (izotopy)
 - 3 stopień jonizacji/dysocjacji
- 1 75% wodoru (H), 25 % helu (${}^4\text{He}$)
 - 2 $m_{\text{H}} \simeq m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^1\text{H}$ (0.02% ${}^2\text{H}$),
 $m_{\text{He}} \simeq 4m_p$, skład izotopowy to praktycznie ${}^4\text{He}$
(śladowe ilości ${}^3\text{He}$).
 - 3 dla przykładu, H i He jednoatomowe

$$P = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} + \frac{X_{\text{He}}}{A_{\text{He}}} \right) = \frac{\rho kT}{m_p} \left(\frac{0.75}{1} + \frac{0.25}{4} \right) = \frac{13}{16} \frac{\rho kT}{m_p}.$$

Gdyby H był zjonizowany, wchodzi do **średniej wagi molekularnej** $x2$, w postaci H_2 0.5.

Mieszanina fotonów i gazu doskonałego: Standardowy model Eddingtona

Zakładamy, że stosunek ciśnienia gazu fotonowego P_{rad} do ciśnienia gazu doskonałego P_{gaz} jest stały:

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{gaz}}} = \frac{\beta}{1 - \beta} = \text{const}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \\ P_{\text{gaz}} = \frac{k}{m} \rho T \\ \frac{P_{\text{rad}}}{P} = \beta \\ P_{\text{rad}} + P_{\text{gaz}} = P \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $P, P_{\text{rad}}, P_{\text{gaz}}, T$. Po wyeliminowaniu temperatury otrzymujemy równanie stanu w postaci barotropowej, t.j. zawierającej wyłącznie ciśnienie P , gęstość ρ i stałe fizyczne lub „materiałowe”:

$$P = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{a}} \left(\frac{k\rho}{(1-\beta)m} \right)^{4/3} = K\rho^{4/3} = K\rho^{1+\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \frac{4}{3}, n = 3$$

- standardowy model Eddingtona to model politropowy z $n = 3$
- masa gwiazdy jest masą Chandrasekhara, zależną wyłącznie od β i stałych fizycznych
- związek pomiędzy β a masą gwiazdy jest algebraicznym równaniem 4 stopnia:

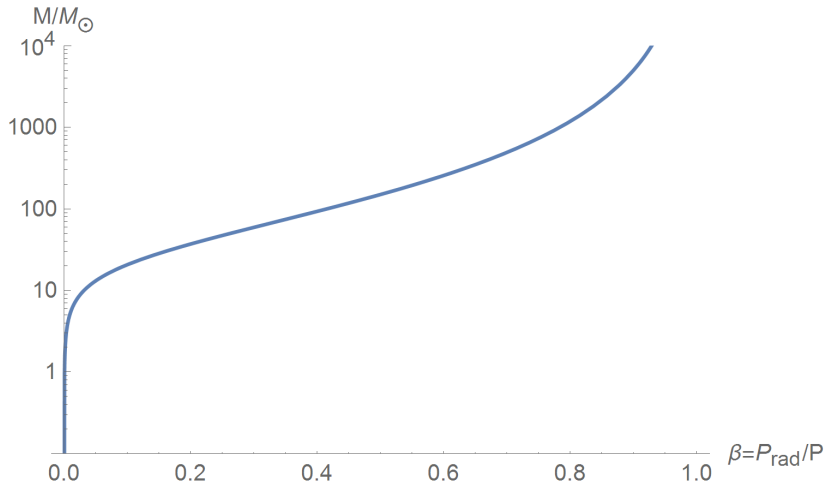
$$M^2 = \frac{48k^4}{\pi a G^3 \mu^4 m^4} \frac{\beta}{(1 - \beta)^4} (-x_0^2 w_3'(x_0))^2$$

gdzie $w_3(x_0) = 0$, czyli $x_0 \simeq 6.9$ to miejsce zerowe funkcji Lane-Emdena w_3 , a nachylenie w miejscu zerowym to $w_3'(x_0) \simeq -0.04$

- po wstawieniu wartości $\mu = 16/27$ dla zjonizowanej materii po Wielkim Wybuchu i $\beta = 0.5$

$$M \simeq 150M_{\odot}.$$

Masa gwiazdy III populacji w modelu Eddingtona



Astrofizyczny opis gwiazdy składa się z czterech składników:

- 1 struktura hydrostatyczna (równowaga gradientu ciśnienia i grawitacji):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$

- 2 zachowanie masy/związek rozkładu masy z grawitacją:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

- 3 transport energii/pomieniania (gwiazdy świecą!),
- 4 produkcja/źródło energii (reakcje termojądrowe).

Docelowo potrzebujemy 4 równań, których rozwiązanie wyznaczy pełną strukturę gwiazdy: ciśnienie $P(r)$, gęstość $\rho(r)$, temperaturę $T(r)$, strumień energii $L(r)$ i skład chemiczny/izotopowy $X_i(r)$. Warunki brzegowe wyznaczają masę całkowitą $M(R)$, promień R , temperaturę powierzchniową $T(R)$ oraz jasność gwiazdy $L(R)$.

Początkowy skład chemiczny wynika z nukleosyntezy kosmologicznej (Wielkiego Wybuchu).

Chcesz wiedzieć więcej?



Seminarium Astrofizyczne, każda środa 12:30, A-1-08 +
streaming przez Microsoft Teams