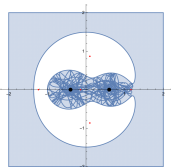
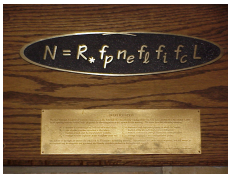
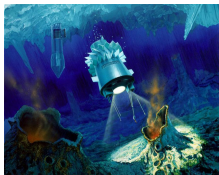
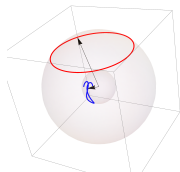


Podstawy astrofizyki i astronomii

Andrzej Odrzywołek

Zakład Teorii Względności i Astrofizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej UJ

23 maja 2023



Ziemia jako ciało niebieskie i jej miejsce we Wszechświecie

- 1 w ogólności problem trzech ciał jest trudny
- 2 ale system jest hierarchiczny:

$$M_{\odot} \gg M_{\oplus} \gg M_{\zeta}$$

- 3 odległość Ziemia-Słońce = 1 AU (Astronomical Unit),
jednostka astronomiczna
- 4 odległość Ziemia-Księżyc = 0.0024 AU
 - $M_{\odot} = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg, $M_{\odot} \simeq 333\,000 M_{\oplus}$
 - $M_{\oplus} = 5.976 \cdot 10^{24}$ kg, $M_{\oplus} \simeq 81 M_{\zeta}$
 - $M_{\zeta} = 7.3459 \times 10^{22}$ kg
- 5 siła grawitacyjna $F = G \frac{M_1 M_2}{d^2}$:
 - Ziemia-Słońce $F = ?$
 - Ziemia-Księżyc $F = ?$
 - Słońce-Księżyc $F = ?$
 - Czy Słońce nie „oderwie” Księżyc od Ziemi? Odp.
na ćwiczeniach.

Naszym życiem rządzą trzy cykle:

- 1 obrót Ziemi wokół własnej osi
 - doba równa 24 h
 - cykl dzień-noc
 - godzina: czas w jakim Ziemia obraca się o kąt w przybliżeniu równy rozmiarowi dłoni w odległości wyprostowanej ręki (15°)
- 2 okres obiegu Księżyca wokół Ziemi
 - 1 miesiąc
 - obrót Księżyca zsynchronizowany: zawsze widzimy jego jedną stronę (rezonans 1:1, częściowy)
 - fazy Księżyca
- 3 okres obiegu Ziemi wokół Słońca
 - 1 rok
 - pory roku

Powyższy system jest nietrywialny: Ziemia mogłaby np: nie mieć księżyca i nie obracać się, a niebo być stale zakryte chmurami.

Czy skale czasowe: miesiące, dni, lata, są stałe?

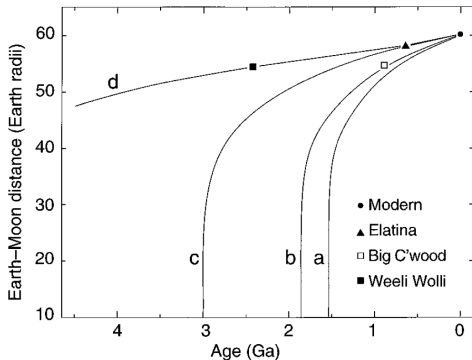
- Obrót Ziemi spowalnia, np: 620 Ma (milionów lat temu)
- Księżyc się oddala
- ~ 14 „miesiący” w roku
- 400 „dni” w roku
- dzień trwa 22 godziny

Dane: <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/earth/6Page58.pdf>

Williams, George E. (2000). Geological constraints on the Precambrian history of Earth's rotation and the Moon's orbit. *Reviews of Geophysics* 38 (1): 37-60

Czy skala czasowe: miesiące, dni, lata, są stałe?

- Obrót Ziemi spowalnia, np: 620 Ma (milionów lat temu)
- Księżyc się oddala



Dane: <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/earth/6Page58.pdf>

Williams, George E. (2000). Geological constraints on the Precambrian history of Earth's rotation and the Moon's orbit. *Reviews of Geophysics* 38 (1): 37-60

Zagadnienie 2 i 3 ciał. Rezonanse.

Prawa Keplera (wersja oryginalna):

- 1 odległość r planety od Słońca opisuje wzór $r = p/(1 + e \cos \phi)$
- 2 pole zakreślane przez promień wodzący w jednostce czasu jest stałe
- 3 stosunek trzeciej potęgi „średniej” odległości od Słońca $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ do kwadratu okresu jest stały dla każdej z planet.

Prawa Keplera (wersja nowoczesna)

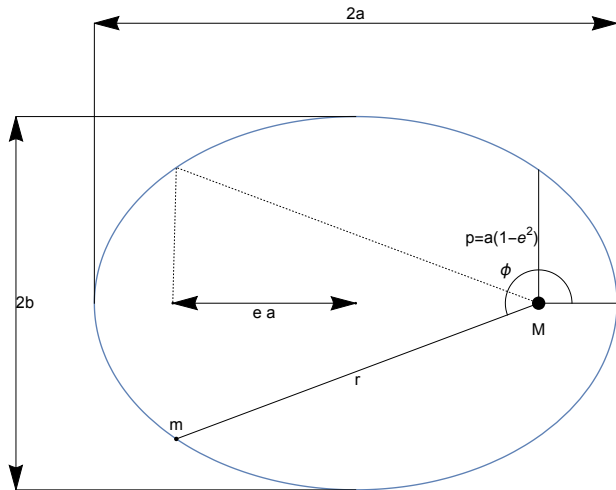
- 1 masa próbna porusza się po krzywej stożkowej: elipsa, parabola lub hiperbola, a masa centralna M znajduje się w jednym z ognisk
- 2 moment pędu cząstki próbnej jest zachowany

$$mr^2\dot{\phi} = \text{const} = J$$

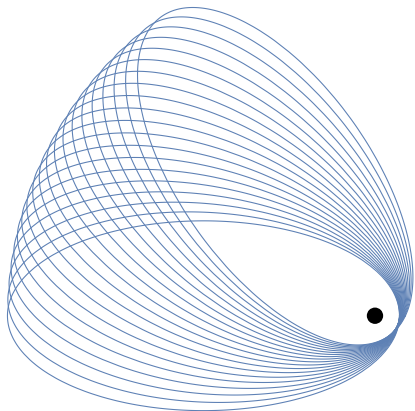
3

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const} = \frac{GM}{4\pi^2}, \text{ gdzie } a \text{ to wielka półś elipsy, } [GM] = \frac{m^3}{s^2}$$

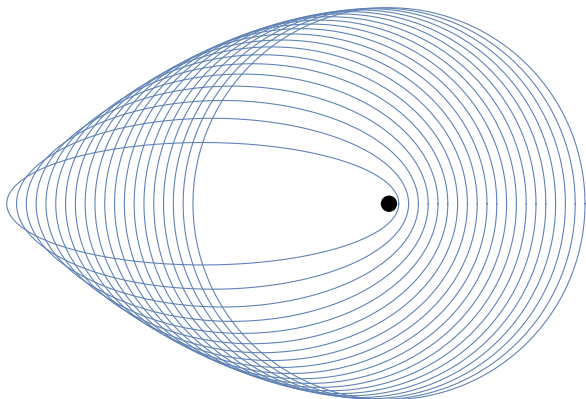
Orbita eliptyczna



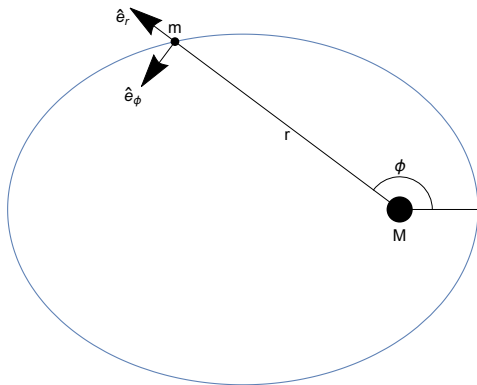
Orbita eliptyczna: zaburzenie w postaci precesji



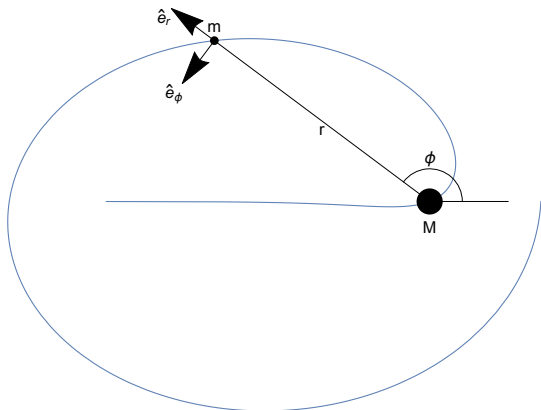
Orbita eliptyczna: zaburzenie w postaci zmiany mimośrodowości



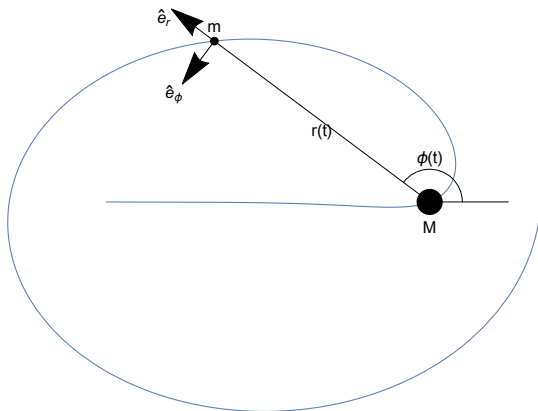
Wprowadzenie ruchu po elipsie



Wprowadzenie ruchu po elipsie



Wyprowadzenie ruchu po elipsie



Równanie toru opisuje kawałkami funkcja:

$$\frac{du(\phi)}{d\phi} = \pm \sqrt{\frac{2mE}{J^2} + \frac{2Gm^2M}{J^2}u - u^2}, \quad u = 1/r$$

W perycentrum i apocentrum $dr/d\phi = 0$ i trzeba zmieniać znak w równaniu powyżej. Znacznie wygodniejsze jest zróżniczkowanie do postaci r . oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}.$$

Pokazana procedura prawie bez zmian przenosi się na ruch w ogólnym polu centralnym, w tym nierotujących czarnych dziur.

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi}$$

$$a = -\frac{GmM}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2m^3M^2}}$$

Dla dowolnej chwili t :

$$E = -\frac{GmM}{r(t)} + \frac{1}{2}mv(t)^2, \quad J = mv(t)r(t).$$

Dla ciała związanego (na orbicie eliptycznej) $E < 0$.

Maksymalny możliwy moment pędu osiągany jest dla orbity kołowej. Dla $J = 0$ ciało m spada po linii prostej wprost na centrum.

- 1 położenie elipsy w przestrzeni, jak każdego ciała sztywnego, wymaga podania 3 współrzędnych
- 2 w astronomii tradycyjnie są to:
 - inklinacja i
 - długość węzła wstępującego Ω
 - długość perycentrum ω
- 3 z fizycznego punktu widzenia położenie elipsy wyznaczają wielkości zachowane:
 - wektor momentu pędu \mathbf{J} (prostopadły do płaszczyzny orbity)
 - wektor Rungego-Lenza \mathbf{A} , skierowany od ogniska do perycentrum
- 4 położenie w czasie wyznacza moment przejścia przez perycentrum

Celem rachunku perturbacyjnego w mechanice nieba jest wyznaczenie wolnozmiennych funkcji czasu $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\omega(t)$, $\phi(t)$, zakładając, że orbita pozostaje eliptyczna.

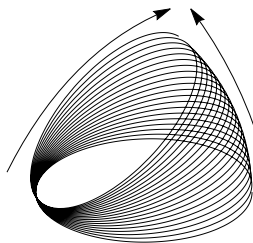
- Przykład 1 : poprawki do $1/r^2$
- Przykład 2 : ciśnienie promieniowania

Podobne interesujące przykłady można mnożyć.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:

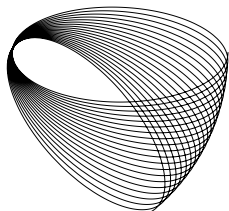
$$1/r^{1.99}$$



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:
 $1/r^{2.01}$

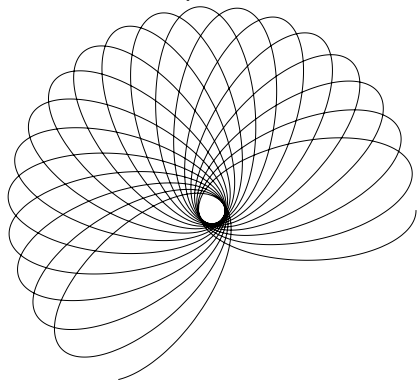


Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:

$$1/r^{1.95}$$

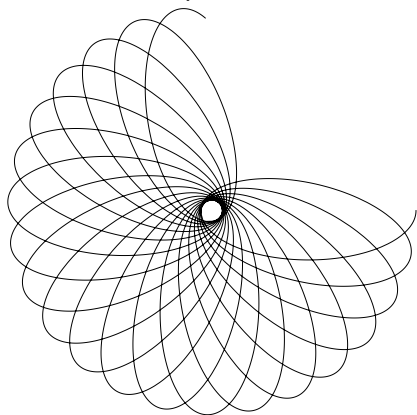


Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Zaburzenia orbity: Przykład 1: poprawki do $1/r^2$

W prawie powszechnego ciężenia zmieniamy $1/r^2$:

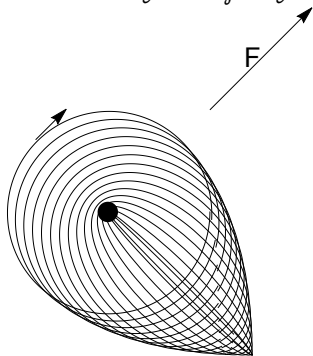
$$1/r^{2.05}$$



Podobny efekt wywołuje każda dostatecznie mała poprawka, niezależnie od jej postaci funkcyjnej.

Zaburzenia orbity: Przykład 2: ciśnienie promieniowania

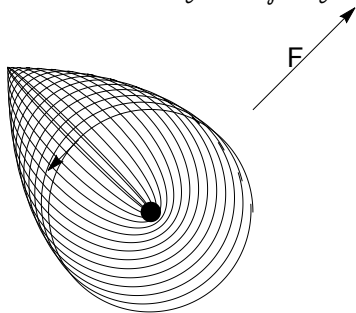
Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.



Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.

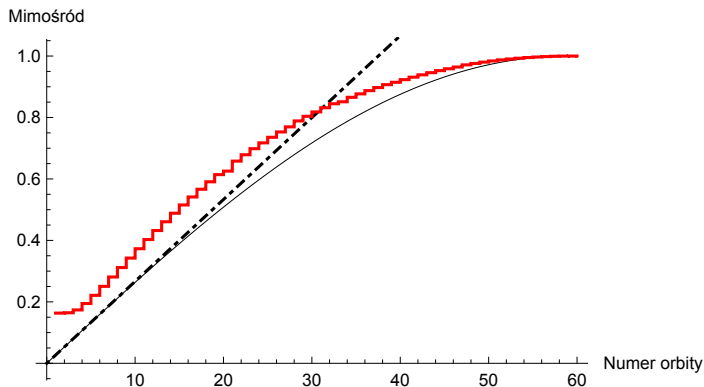
Zaburzenia orbity: Przykład 2: ciśnienie promieniowania

Wyobraźmy sobie ziarno pyłu na orbicie Ziemi. Wpływ promieniowania symulujemy stałym wektorem siły.



Orbita ustawia się prostopadle a jej mimośród rośnie do momentu zderzenia z ciałem centralnym.

Zaburzenia orbity: numeryka vs teoria zaburzeń



Wg. równania (2.48) z podręcznika Artymowicza:

$$\dot{e} = \frac{3F/m}{2\omega R_0} \sqrt{1 - e^2}, \quad e(t) = \sin\left(\frac{3F/m}{2\omega R_0} t\right)$$

Czy rozkład materii na zewnątrz wpływa na ruch wewnątrz?

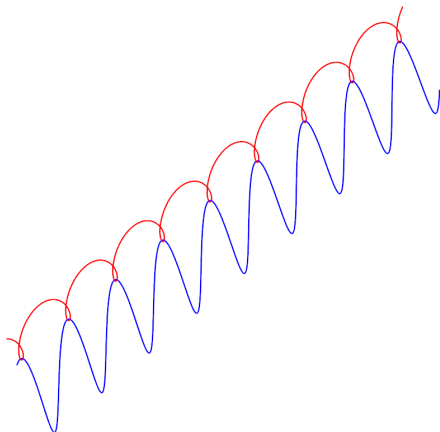
- 1 rozkład gęstości sferycznie symetryczny – NIE
- 2 rozkład gęstości osiowo symetryczny – TAK!
- 3 okrąg/dysk na zewnątrz orbity – TAK!
- 4 ciało orbitujące na na zewnątrz orbity – TAK!
- 5 czy siła pochodząca od zewnętrznego dysku może być odpychająca? – TAK!

$$\phi(r) = -G \int_0^R \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{ŹLE!, działa w symetrii sferycznej}$$

$$\phi(r) = -G \int_0^\infty \frac{\rho(r) dV}{r} \quad \text{DOBRZE!}$$

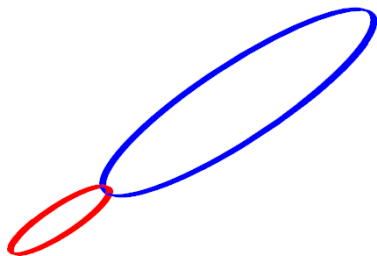
2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



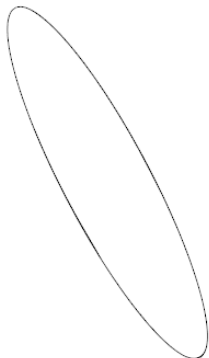
2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



2 ciała: Przykład generycznego ruchu

Tradycyjnie studentów przekonuje się, że zagadnienie 2 ciał sprowadza się do zagadnienia 1 ciała.



2 ciała: sprowadzenie do ruchu w potencjale

Przepis na zamianę/symetryzację wzorów:

- 1 masa ciała centralnego to suma mas składników

$$M \rightarrow m_1 + m_2$$

- 2 masa ciała próbnego to masa zredukowana

$$m \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- 3 wielka półoś elipsy $a = a_1 + a_2 \rightarrow$ tor ciała 1 **względem** ciała 2

- 4 okres T , mimośród e , płaszczyzna orbitalna \rightarrow bez zmian

- 5 rozmiar elips względem środka masy: $a_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2} a$

- 6 chwilowe położenie ciał względem środka masy opisuje przeskalowana symetria środkowa

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2$$

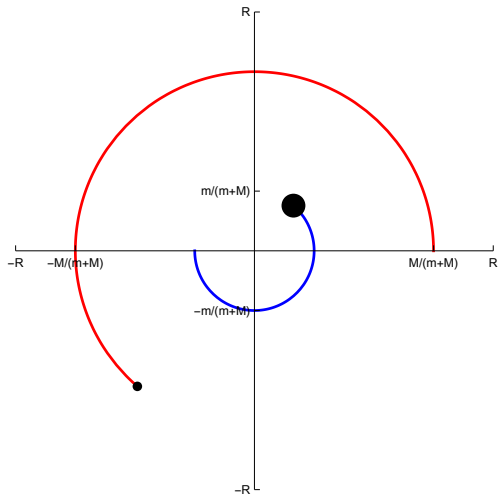
- 7 III prawo Keplera:

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

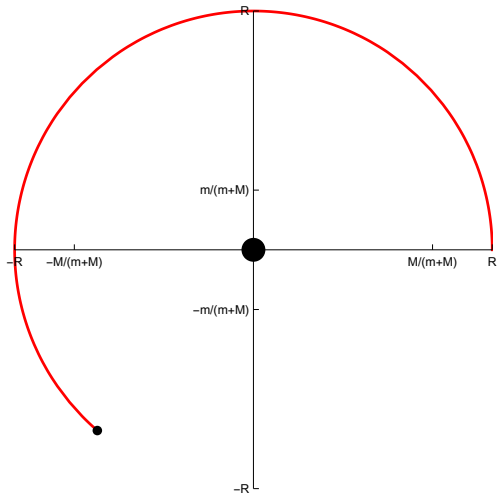
Założenia:

- 1 masy m oraz M krążą wokół środka masy po okręgach, czyli ze stałą prędkością kątową
- 2 trzecia masa μ jest pomijalnie mała $\mu \ll m, \mu \ll M$
- 3 ruch odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie orbitalnej mas m i M
- 4 tradycyjnie, przechodzimy do układu nieinercyjnego w którym masy m i M są nieruchome
- 5 przykłady:
 - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_{\oplus}, \mu \rightarrow M_{\mathcal{C}}$
 - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \rightarrow M_{\mathcal{C}}, \mu \rightarrow$ sonda kosmiczna, np: Apollo
 - $M \rightarrow M_{\odot}, m \rightarrow M_J, \mu \rightarrow$ planetoidy trojańskie
 - $M \rightarrow M_{\oplus}, m \simeq 500 \text{ kg}, \mu \simeq 0.1 \text{ kg} \rightarrow$ masy orbitalnego eksperymentu mierzącego stałą G

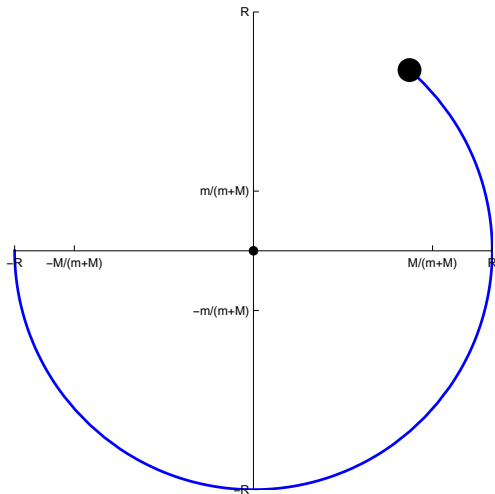
Szkic sytuacji



Szkic sytuacji



Szkic sytuacji



$$\mathbf{r}_m = \frac{M}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1a)$$

$$\mathbf{r}_M = -\frac{m}{m+M} \{R \cos \omega t, R \sin \omega t\} \quad (1b)$$

$$\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3} \quad (1c)$$

Wypisujemy równania Newtona w układzie inercyjnym, zakładając, że pozycje mas m i M są zadane z góry.

$$\mu \ddot{x} = -\frac{G\mu m(x - x_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(x - x_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2a)$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{G\mu m(y - y_m(t))}{r_{\mu m}^3} - \frac{G\mu M(y - y_M(t))}{r_{\mu M}^3} \quad (2b)$$

$$r_{\mu m} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|, \quad r_{\mu M} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \quad (2c)$$

Dokonyjemy zamiany funkcji niewiadomych:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

gdzie $x(t), y(t)$ – położenie w układzie inercyjnym,
 $X(t), Y(t)$ – położenie w układzie korotującym.

$$\ddot{X} = \omega^2 X + 2\omega \dot{Y} - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3a)$$

$$\ddot{Y} = \omega^2 Y - 2\omega \dot{X} - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} \quad (3b)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \omega^2 \mathbf{R} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{R} = \{X(t), Y(t)\} \quad (3c)$$

- $\omega^2 \mathbf{R}$ - przyspieszenie odśrodkowe
- $-2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}$ - przyspieszenie Coriolisa
- \mathbf{g} - przyspieszenie grawitacyjne (natężenie pola grawitacyjnego)

Okazuje się, że powyższy układ równań posiada aż 5 rozwiązań stałych, t.j. opisujących masę próbną spoczywającą w układzie obracającym się.

Zakładając, że $\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, otrzymujemy układ 2 równań algebraicznych:

$$\omega^2 \mathbf{R} + \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

$$\omega^2 X - \frac{Gm(X - \frac{M}{M+m}R)}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM(X + \frac{m}{M+m}R)}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4a)$$

$$\omega^2 Y - \frac{GmY}{\sqrt{(X - \frac{M}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} - \frac{GM Y}{\sqrt{(X + \frac{m}{M+m}R)^2 + Y^2}^3} = 0 \quad (4b)$$

Kolinearne punkty L_1, L_2, L_3

Zakładając, że $Y = 0$ otrzymujemy równanie na punkty leżące na linii łączącej masy m i M :

$$\omega^2 X_i = \pm \frac{Gm}{(X_i - R \frac{M}{m+M})^2} \pm \frac{GM}{(X_i + R \frac{m}{m+M})^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Znaki \pm biorą się z wyrażeń typu:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2}^3} = \frac{x}{|x|^3} = \frac{1}{x|x|} = \pm \frac{1}{x^2}.$$

- powyższe równanie jasno pokazuje równość sił odśrodkowej i grawitacyjnej
- w postaci nieuproszczonej jest ono bardzo trudne do rozwiązania, nawet z użyciem *Mathematici*
- konieczna redukcja liczby symboli literowych

- 1 podstawienie $\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3}$ pozwala skrócić G
- 2 zmiana jednostek długości $X_i = \zeta_i R$ pozwala na pozbycie się R
- 3 wprowadzenie stosunku mas $q = m/M$ dodatkowo upraszcza równanie

$$\zeta = \frac{(1+q)q}{\pm(1+\zeta+\zeta q)^2} + \frac{1+q}{\pm(\zeta-q+\zeta q)^2}$$

gdzie wyrażenie typu $\pm x^2$ należy rozumieć jako $\pm x^2 \equiv x|x| = x^2 \operatorname{sign}(x)$.

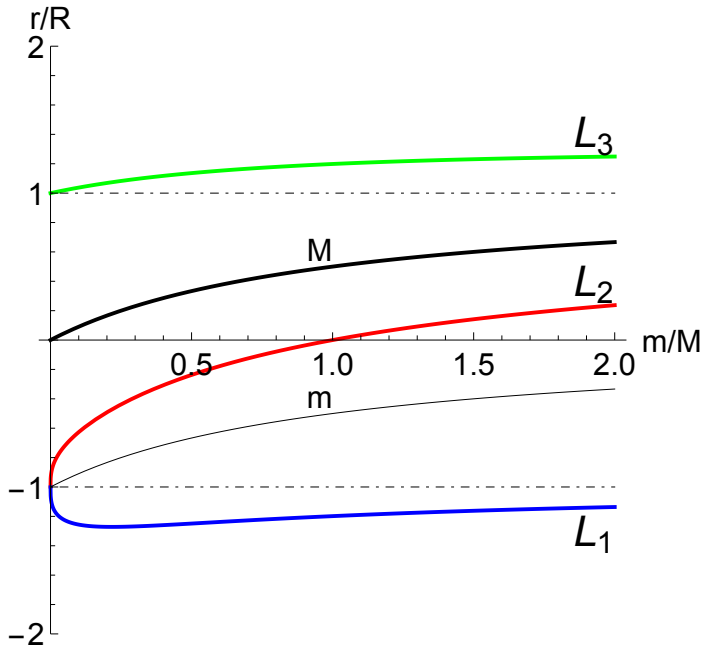
Otrzymaliśmy równanie algebraiczne, równoważne równaniu 5 stopnia z jednym parametrem. Takie zadanie może rozwiązać dla rzeczywistego q, ζ algorytm komputerowy (<http://mathworld.wolfram.com/TarskisTheorem.html>).

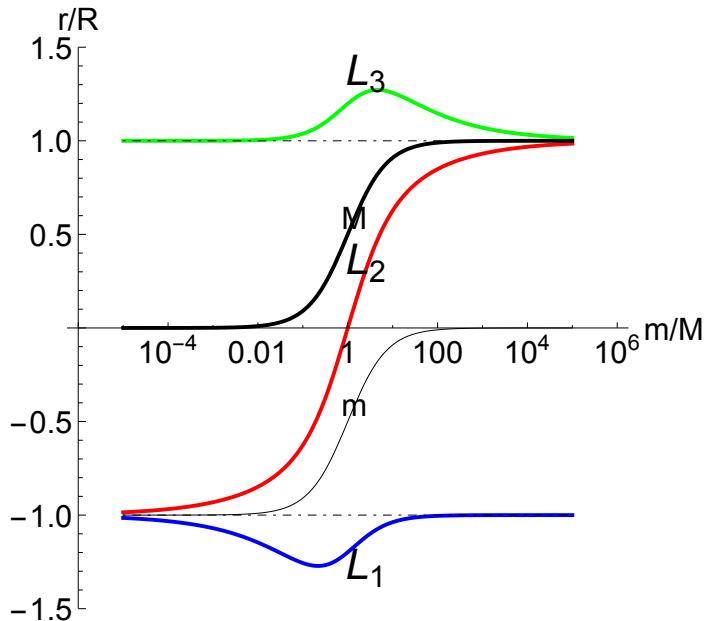
Punkty L_1, L_2, L_3 : rozwiązanie

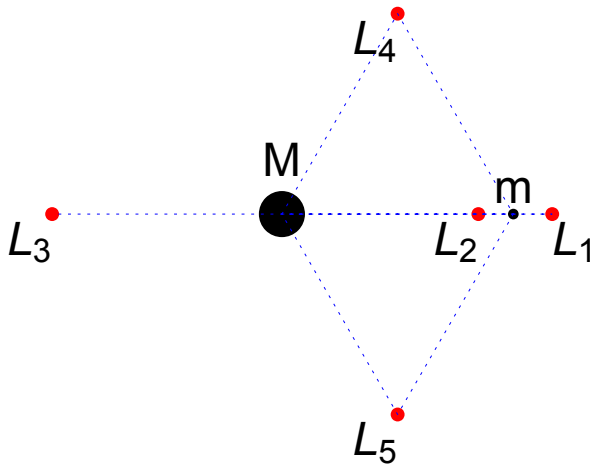
$$\zeta^5(q+1)^4 - 2\zeta^4(q-1)(q+1)^3 + \zeta^3(q+1)^2(q^2 - 4q + 1) - \zeta^2(q^4 - 1) + \zeta(2q^4 + 4q^3 + 5q^2 + 4q + 2) - q^4 - q^3 + q + 1 = 0$$

Rozwiązanie powyższego typu równania nie przedstawia trudności dla programu *Mathematica*. Wynik jest w postaci definiowalnej liczby algebraicznej **Root**.

- wynik musi być niezmienniczy na zamianę $m \leftrightarrow M$, czyli $q \rightarrow 1/q$
- pozycje i numeracja punktów L_1, L_2, L_3 odwracają się







Bardzo ciekawym faktem, jest istnienie dwóch punktów stacjonarnych, tworzących **trójkąt równoboczny** z masami m i M .

Znajomość tego faktu pozwala od razu wypisać ich współrzędne:

$$X_{L_{4,5}} = -\frac{1}{2} \frac{m - M}{m + M} R, \quad Y_{L_{4,5}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

- fakt ten jest nieintuicyjny
- jeszcze bardziej zaskakuje stabilność pozycji $L_{4,5}$ przy odpowiednim stosunku mas $q = m/M$
- powyższe własności mają istotne znaczenie astrofizyczne oraz astronautyczne

$$\ddot{X}\dot{X} = \omega^2 X\dot{X} + 2\omega\dot{Y}\dot{X} + g_X\dot{X} \quad (5a)$$

$$\ddot{Y}\dot{Y} = \omega^2 Y\dot{Y} - 2\omega\dot{X}\dot{Y} + g_Y\dot{Y} \quad (5b)$$

Dodając powyższe równania, skracając wyrazy z przyspieszeniem Coriolisa i całkując po t otrzymujemy:

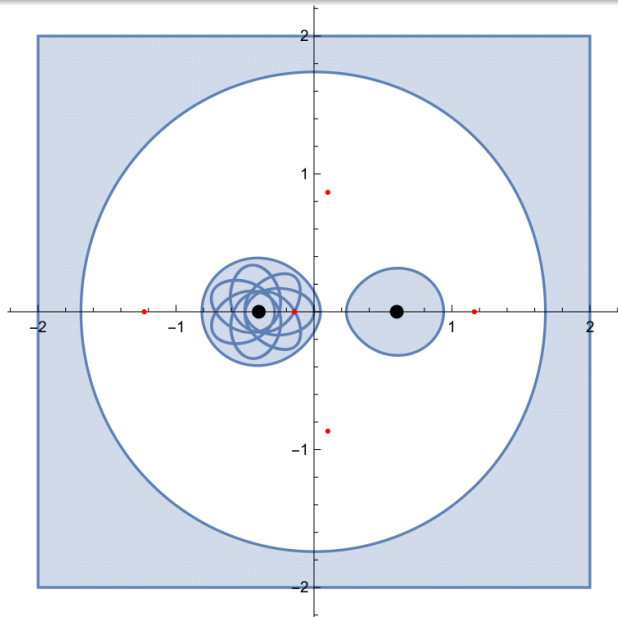
$$\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) - V_g(X, Y) = E$$

Ponieważ energia kinetyczna $\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$ musi być nieujemna, ruch jest dozwolony tylko w obszarze określonym nierównością:

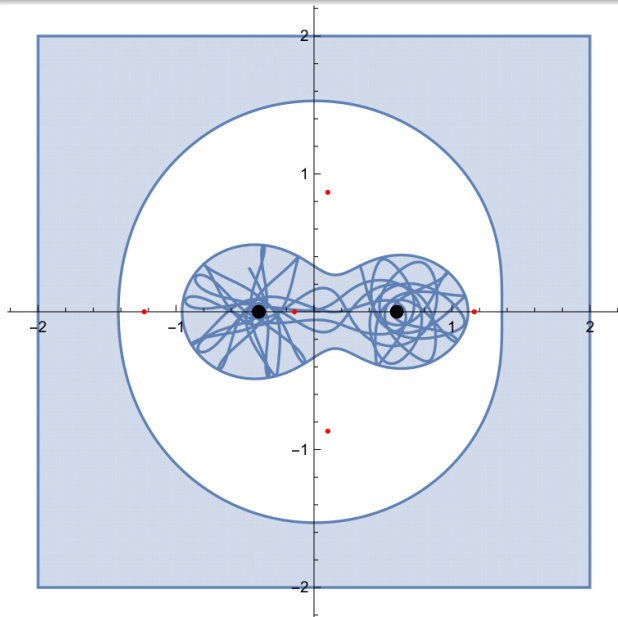
$$\frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) + V_g(X, Y) < E$$

Region Hill'a nigdy nie zostanie opuszczony, ale nie jest wiadome, jaki ruch jest faktycznie możliwy.

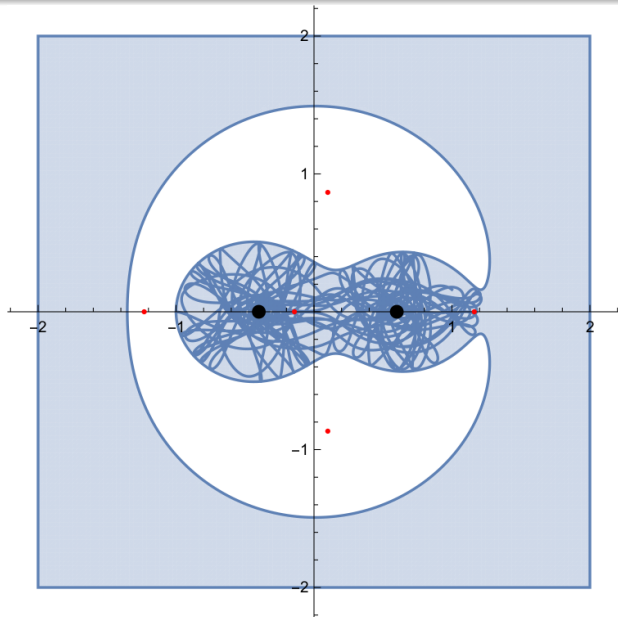
Ruch w pobliżu mas m i M



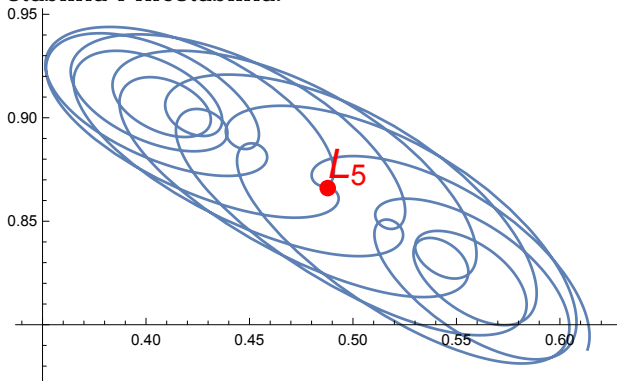
Ruch w pobliżu mas m i M



Ruch w pobliżu mas m i M

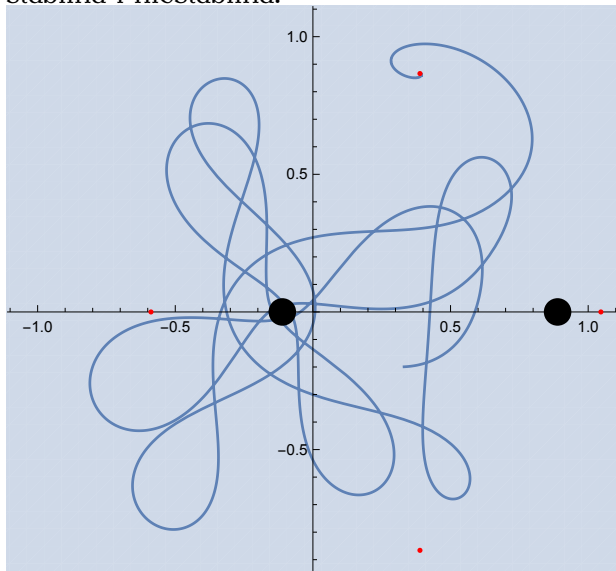


Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



Stabilność punktów Lagrange'a: ewidencja numeryczna

Ewidencja numeryczna pokazuje, że możliwa jest sytuacja stabilna i niestabilna.



W równaniach ruchu podstawiamy:

$$X(t) = \frac{1}{2}R \frac{M-m}{M+m} + \epsilon x(t) \quad (6a)$$

$$Y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}R + \epsilon y(t) \quad (6b)$$

a następnie rozwijamy w szereg potęgowy względem ϵ .
Interesują nas człony przy ϵ , które utworzą układ równań różniczkowych liniowych:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \frac{3}{4}\omega^2 x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m-M}{M+m} y = 0 \quad (7a)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \frac{9}{4}\omega^2 y + \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2 \frac{m-M}{M+m} x = 0 \quad (7b)$$

Stosujemy standardową procedurę dla równań liniowych:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

i otrzymujemy algebraiczny układ równań liniowych:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{3\omega^2}{4} & -2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} \\ 2\lambda\omega + \frac{3\sqrt{3}(m-M)\omega^2}{4(m+M)} & \lambda^2 - \frac{9\omega^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Wyznacznik macierzy powyżej daje równanie charakterystyczne:

$$\lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4} \frac{G^2 mM}{R^6} = 0.$$

Definicja niestabilności

Układ jest wykładniczo niestabilny w reżimie liniowym, gdy co najmniej jedna wartość własna posiada część rzeczywistą większą od zera:

$$\exists_{\lambda, \lambda \in \mathbb{C}} \lambda^4 + \lambda^2\omega^2 + \frac{27}{4} \omega^2 \frac{mM}{(m+M)^2} = 0 \quad \& \quad \Re(\lambda) > 0$$

Rozwiązanie zagadnienia stabilności: 2 sposoby

- 1 tradycyjnie: liczymy deltę r. dwukwadratowego i sprawdzamy kiedy jest równa zero (do przeliczenia na tablicy lub w domu)
- 2 stosując algorytm **eliminacji kwantyfikatorów**:
 - zapisujemy szczegółowo warunki jakie mają spełniać wartości własne i parametry: czy są rzeczywiste/ zespolone, większe od zera, ile ma ich być, czy mają być różne, itp. itd. za pomocą operacji przynależenia do zbioru, równości i nierówności oraz kwantyfikatorów \exists i \forall
 - powyższe wymaga staranności i pomysłowości
 - uruchamiamy algorytm: w *Mathematice* jest to **Resolve** (można użyć **Reduce**)
 - uszczegóławiamy wynik ręcznie lub za pomocą **Refine**

Obszar niestabilności:

$$\frac{25M}{2} - \frac{3\sqrt{69}M}{2} < m < \frac{3\sqrt{69}M}{2} + \frac{25M}{2}, \quad \frac{3\sqrt{69}}{2} + \frac{25}{2} \simeq 24.9599$$

Czas narastania niestabilności, tzw. czas Lyapunowa τ lub *e-folding time* to odwrotność największej z dodatnich stałych λ . Zależy od tego, jak daleko jesteśmy od punktu krytycznego. W powyższym przypadku λ osiąga maksimum dla $m = M$:

$$\lambda_{\max} = \omega \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \simeq 0.12 T_{\text{orb}}$$

Rzeczywisty czas opuszczenia miejsca niestabilności zależy od tego, jak precyzyjnie ustalimy warunki początkowe. W praktyce szum numeryczny/kwantowy wystarcza aby zapoczątkować narastanie niestabilności.

W przypadku masy punktowej, przyspieszenie grawitacyjne i odśrodkowe równoważą się. W przypadku ciała rozciągniętego:

$$g = \frac{GM}{(d \pm r)^2} \simeq \frac{GM}{d^2} \mp \frac{2GM}{d^3}r$$

$$a = \omega^2(R \pm r) = \frac{GM}{d^2} \pm \frac{GM}{d^3}r$$

Odejmując stronami mamy:

$$a_t = \pm \frac{3GM}{d^3}r$$

Siła pływowa („rozrywająca”) zależy od:

- trzeciej potęgi odległości d od masy M
- rozmiarów r ciała poddanego sile pływowej

Rozmiar kątowy Słońca i Księżyc a pływy

Rozważmy ciało niebieskie o kształcie kulistym, które na niebie ma rozmiary kątowe α . Jaka będzie pochodząca od niego siła pływowa?

$$\frac{3GM}{d^3} = \frac{3G\frac{4}{3}\pi(\alpha d/2)^3 \rho}{d^3} = \frac{1}{2}\pi G\rho \alpha^3,$$

gdzie ρ to średnia gęstość.

Księżyc i Słońce mają te same rozmiary kątowe (zaćmienia!).

Ich gęstości średnie to:

- $\bar{\rho}_{\odot} = 1408 \text{ kg/m}^3$
- $\bar{\rho}_{\text{K}} = 3344 \text{ kg/m}^3$

Wniosek: pływy pochodzące od Słońca są (tylko?) dwa razy słabsze niż od Księżyc.

Pytanie: z jakiej odległości podobne pływy wywołuje ludzkie ciało?

W Układzie Słonecznym spotykamy liczne przykłady mniej lub bardziej dokładnych **wymiernych** stosunków:

- 1:1 – okres orbitalny planetoid trojańskich i Jowisza w punktach L_4 , L_5 układu Jowisz-Słońce
- 1:1 – prędkość kątowna obrotu i częstość orbitalna Księżyca
- 2:3 – okres orbitalny Ziemi i Wenus
- 1:1 – obrót Plutona i Charona
- 1:2:4 – okresy orbit Io, Europy i Ganimedesa
- 2:3 – okresy Plutona i Neptuna
- 3:4 – orbity Hiperiona i Tytana
- 3:2 – okres obrotu i orbity Merkurego

Częściowy rezonans 1:1



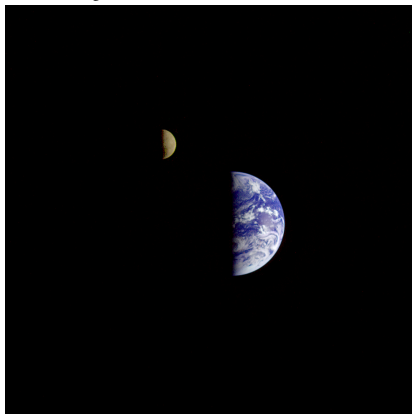
Ziemia - Księżyc

Pełny rezonans 1:1



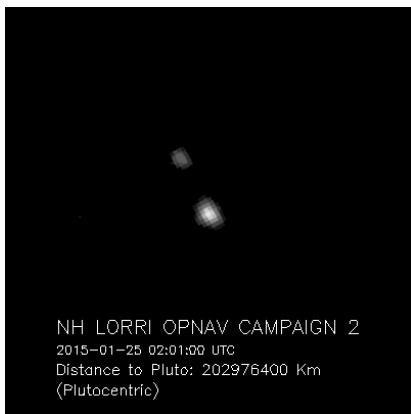
Pluton - Charon

Częściowy rezonans 1:1

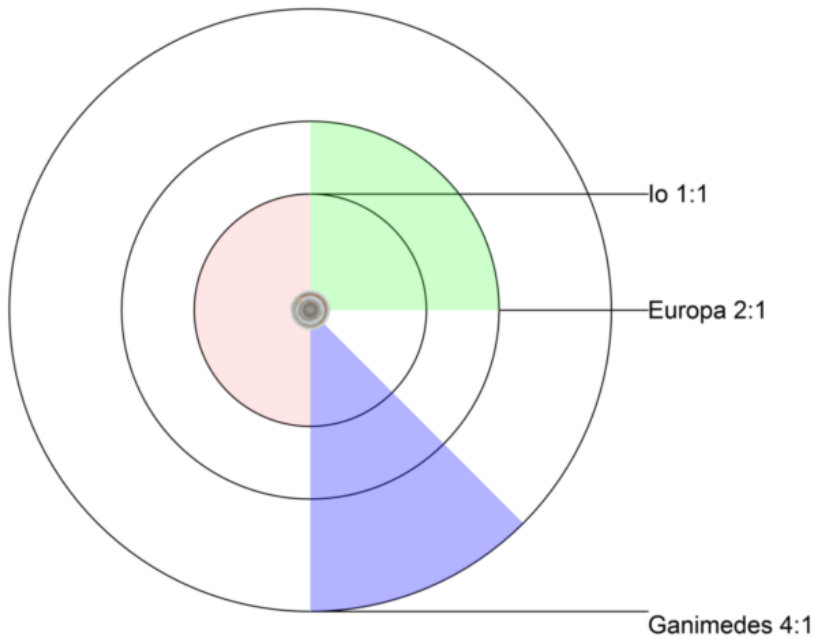


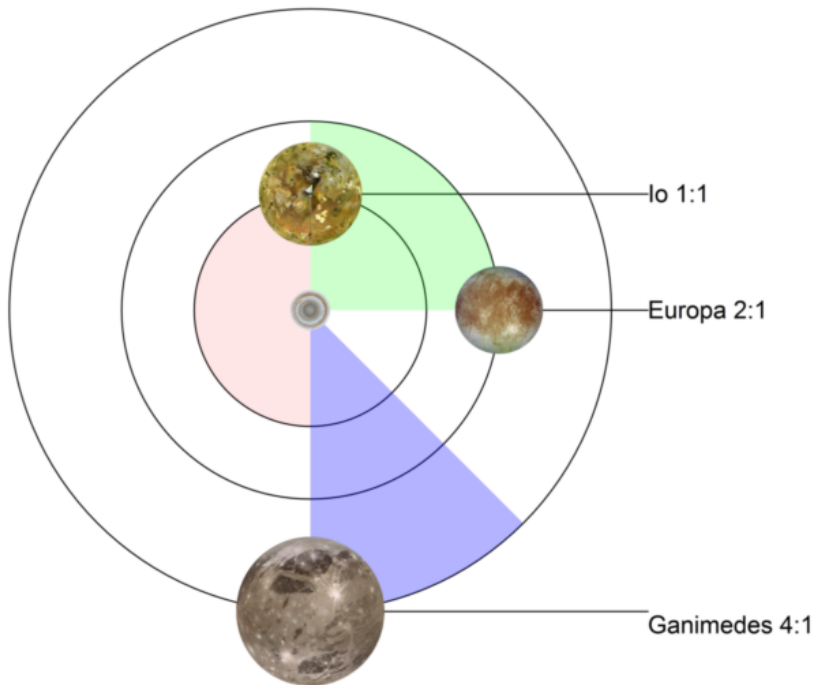
Ziemia - Księżyc

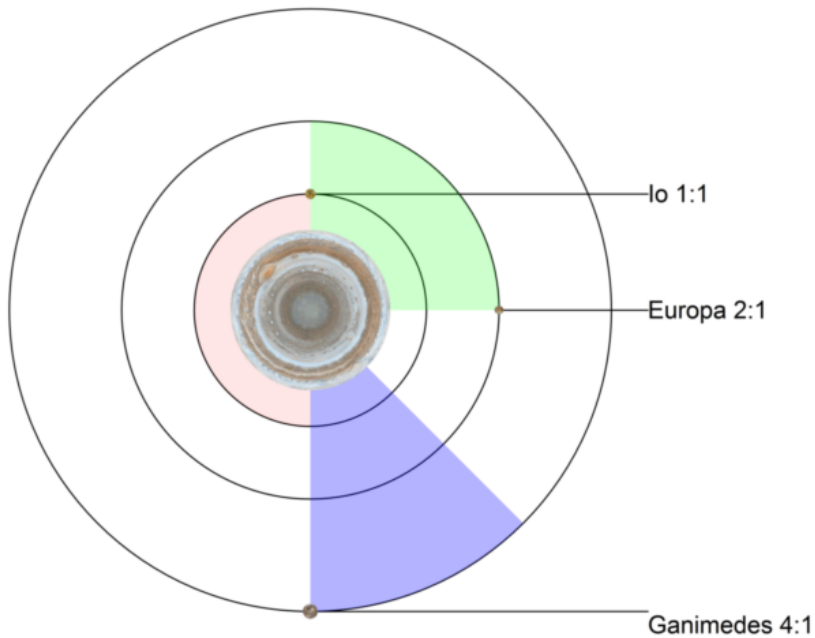
Pełny rezonans 1:1

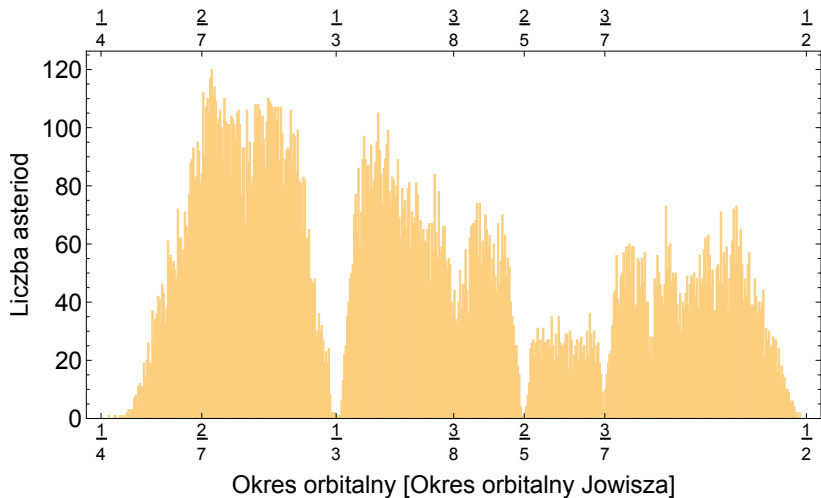


Pluton - Charon







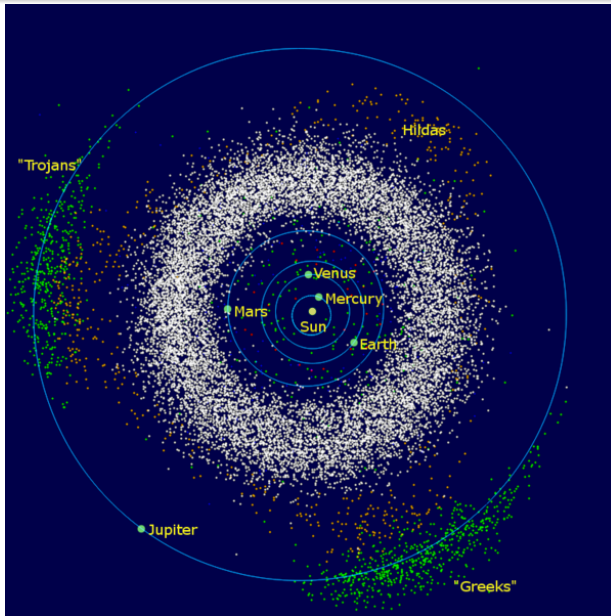


$$a_n = \frac{4 + 3 \cdot 2^n}{10} [AU], \quad n = -\infty, 0, 1, \dots$$

Inna podobna formuła $a_n = 1.728^n$, która stosuje się także do księżyców Jowisza

- 1 standardowe wytłumaczenie:
 - w Układzie Słonecznym powstaje bardzo duża liczba ciał rozmieszczonych losowo
 - w toku ewolucji, niestabilności, rezonansów zajmują miejsca stabilne lub są wyrzucane poza Układ
 - pozostają planety w bezpiecznych odległościach, kilku promieni Hill'a i stabilnych rezonansach
- 2 struktura układów pozasłonecznych nie daje podstaw do twierdzenia o uniwersalności reguły Titiusa-Bodego
- 3 niemniej jednak używa się jej do szukania egzoplanet

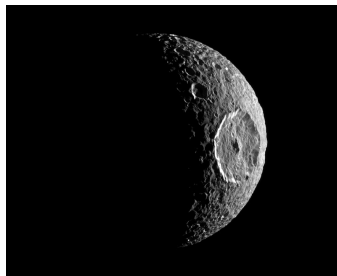
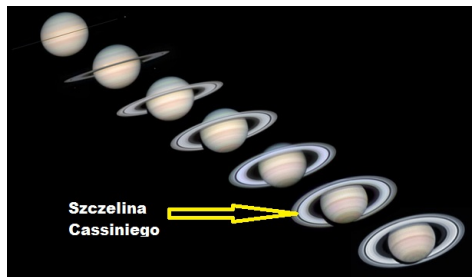
Planetoidy trojańskie



Pierścień Saturna

Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

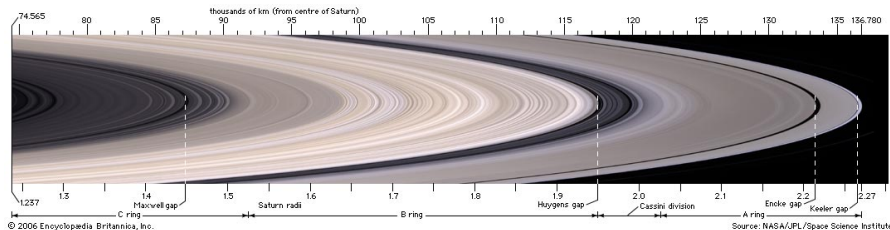
- szczelina Cassiniego – rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego – rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A – rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



Pierścień Saturna

Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

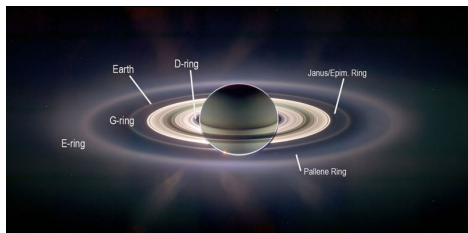
- szczelina Cassiniego – rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego – rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A – rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



Pierścień Saturna

Najbardziej spektakularnym wizualnie przykładem struktury rezonansowej są pierścienie Saturna.

- szczelina Cassiniego – rezonans 1:2 z Mimasem
- przerwa Enckego – rezonans 1:1 z Pan-em
- krawędź pierścienia A – rezonans 7:6 z Janusem i Epimetheusem (orbita typu „podkowa”)



Życie i inteligencja we Wszechświecie

- zmiany klimatu
- wielkie wymierania
- rozwój nauki
- pogoda kosmiczna

- okresowe zaburzenia orbity (tzw. cykle Milankovica)
- ewolucja Słońca (teoria Ziemi-Śnieżki , ang. *Snowball Earth*)

Bardzo ważnym pojęciem jest albedo, czyli współczynnik odbicia promieniowania przez obiekt astronomiczny.

- dla ciała doskonale czarnego albedo = 0
- dla idealnego lustra/białej powierzchni albedo = 1

	jądro komety	0.04
	asfalt	0.04
	Ziemia	0.3
Przykłady:	śnieg	0.80
	Wenus	0.90
	Eris	0.96
	Enceladus	0.99

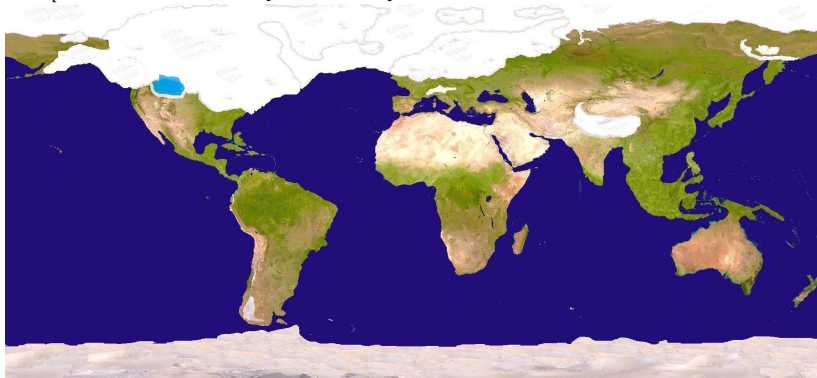
Używa się kilku definicji. Najważniejsze to albedo Bonda („energetyczne”; modelowanie klimatu) i albedo geometryczne („wizualne”; obserwacje).

Ostatnie maksimum zlodowacenia

Około 20 000 lat temu, z orbity ujrzelibyśmy szokujący obraz:

- 1 Ameryka Północna i Europa pokryte lądolodem o grubości kilku kilometrów
- 2 poziom oceanu niższy o 200 metrów
- 3 lodowe jeziora zaporowe, zmienione koryta rzek
- 4 inny klimat i roślinność (zielona Sahara)

Co spowodowało tak drastyczne zmiany w bardzo krótkim czasie?



Ostatnie maksimum zlodowacenia

Około 20 000 lat temu, z orbity ujrzelibyśmy szokujący obraz:

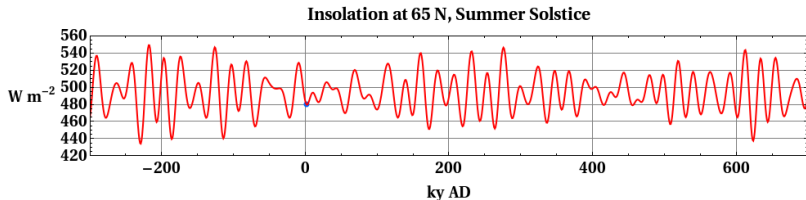
- 1 Ameryka Północna i Europa pokryte lądolodem o grubości kilku kilometrów
- 2 poziom oceanu niższy o 200 metrów
- 3 lodowe jeziora zaporowe, zmienione koryta rzek
- 4 inny klimat i roślinność (zielona Sahara)

Co spowodowało tak drastyczne zmiany w bardzo krótkim czasie?



Elementy orbity Ziemi podlegają okresowym zmianom, wywołanym perturbacjami Jowisza, Saturna i innych planet:

- 1 zmiana mimośrodów orbity w zakresie $0 \leq e < 0.05$ z okresem około 100 tysięcy lat (aktualnie: $e = 0.0167$)
- 2 wahania nachylenia osi obrotu Ziemi z zakresie $21.5 < \alpha < 24.5$ z okresem 41 000 lat (obecnie $\alpha = 23.5^\circ$)
- 3 precesja peryhelium z okresem około 112 000 lat (obecnie Ziemia jest w peryhelium 4 stycznia)
- 4 precesja osi obrotu Ziemi z okresem około 26 000 lat

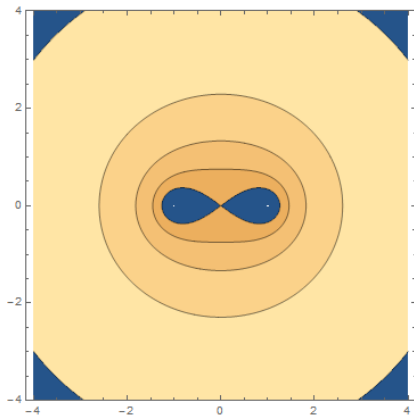


Energia potencjalna masy m w polu grawitacyjnym okręgu o promieniu R i masie M . Okrąg leży na płaszczyźnie $x - y$:

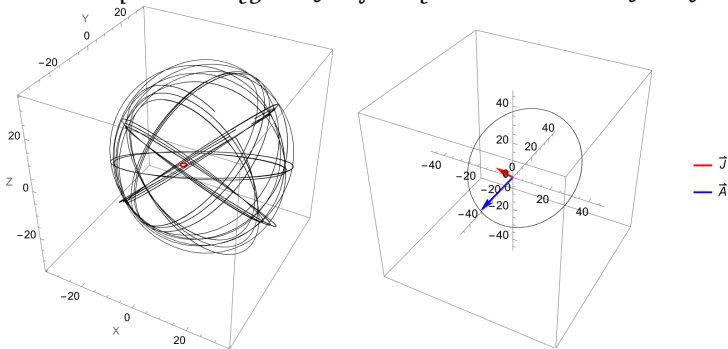
$$U = -\frac{GmM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2}} =$$
$$= -\frac{2GmM}{\pi} \frac{K\left(-\frac{4rR}{(r-R)^2+z^2}\right)}{\sqrt{(r-R)^2+z^2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

gdzie K to zupełna całka eliptyczna, (**EllipticK** w *Mathematice*). Okrąg posłuży jako przykład ciała pozbawionego symetrii sferycznej, ale ciągle symetrycznego osiowo.

Potencjał okręgu



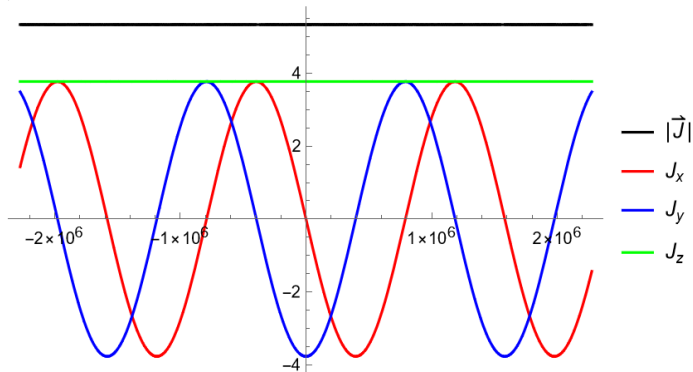
Ruch w polu okręgu wydaje się nieomal chaotyczny ...



...ale jest to elipsa o zmieniających się okresowo parametrach. Aby wyznaczyć jej orientację, rozmiar i mimośród można użyć wektorów momentu pędu \vec{J} oraz Rungego-Lenza \vec{A}

Składowe wektora momentu pędu

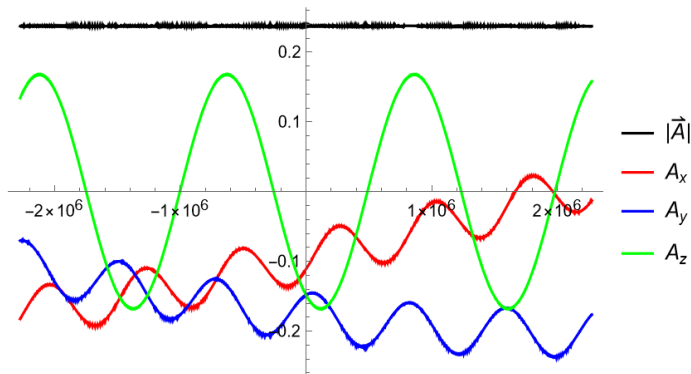
$$\mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$



Zgodnie z teorią, $|\mathbf{J}|, J_z = \text{const}$, natomiast pozostałe dwie składowe zataczają okrąg.

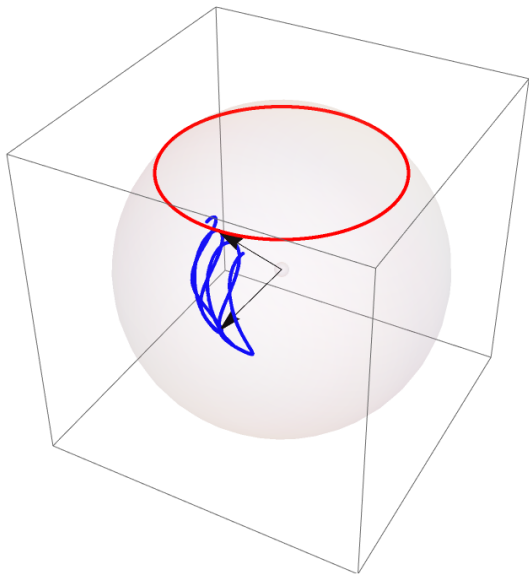
Składowe wektora Rungego-Lenza

$$\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{J} - \frac{Gm^2M}{r}\mathbf{r}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{Gm^2M}$$



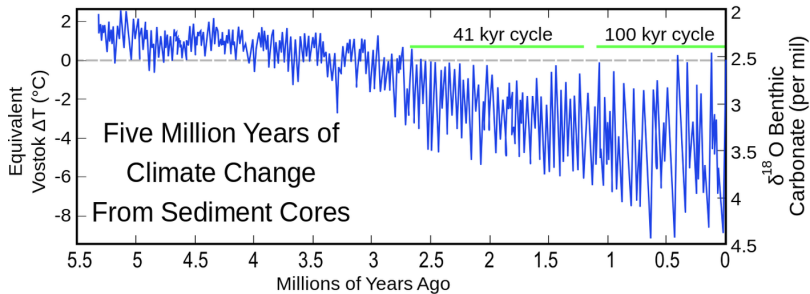
Moduł $|\mathbf{A}|$, a zatem mimośród e orbity nie zmienia się.

Hodograf wektorów \vec{J} , \vec{A}

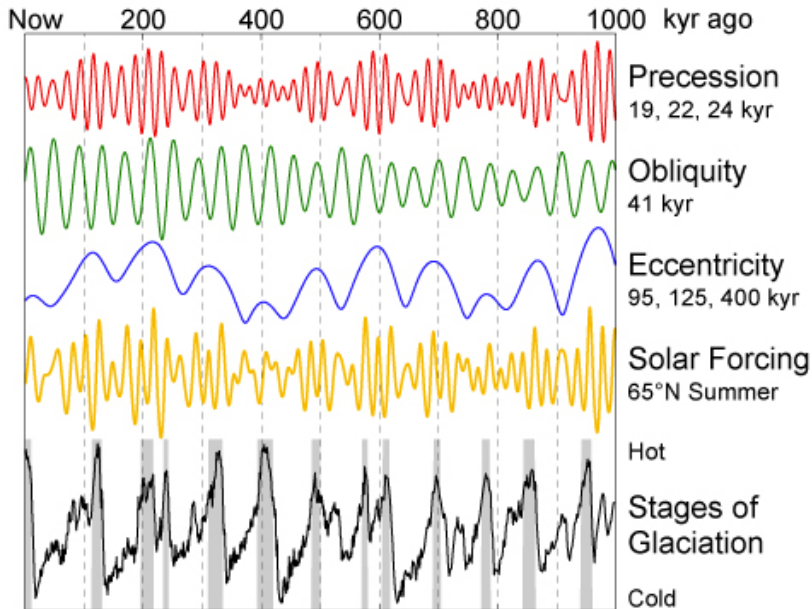


— \vec{J}
— \vec{A}

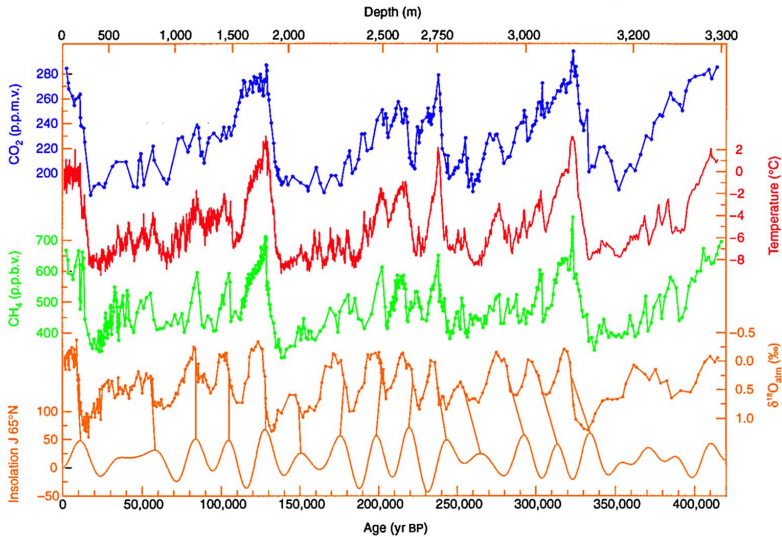
Oscylacje orbity Ziemi



Oscylacje orbity Ziemi



Oscylacje orbity Ziemi



Stan „chłodni” i „cieplarni”

Ziemia oscyluje pomiędzy dwoma stanami stabilnymi:

- 1 stan chłodni (ang. *icehouse earth*)
- 2 stan szklarni (ang. *greenhouse earth*)

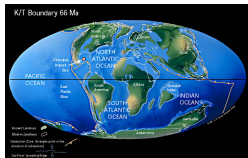
Chłodnia

lądolody na biegunach
niskie stężenie CO₂
20% historii



Cieplarnia

brak stałego zlodowacenia
wysokie stężenie CO₂
80% historii



Obcenie Ziemia jest w stanie chłodni, w trakcie interglacjacji.

Snowball Earth

Połączymy dwa fakty:

- 1 wzór na temperaturę Ziemi w zależności od odległości do Słońca
- 2 wzrost mocy promieniowania Słońca w tempie około 7% na 10^9 lat (miliard lat)

Kiedy w przeszłości Ziemia „wypada” ze strefy ciekłej wody $T = 0^{\circ} \text{C}$? Około 1-2 miliardy lat temu!

SNOW AND ICE COVERAGE

