

MECHANIKA TEORETYCZNA

Zestaw 1.

1. Zapisać funkcję Lagrange'a swobodnego punktu materialnego w trójwymiarowej przestrzeni we współrzędnych sferycznych oraz we współrzędnych cylindrycznych.
2. Punkt materialny porusza się swobodnie na płaszczyźnie. Zapisać funkcję Lagrange'a w współrzędnych biegunowych.
3. Rozważamy transformację funkcji Lagrange'a postaci

$$L \mapsto L' = L + \frac{dF}{dt},$$

gdzie $F = F(q, t)$ jest funkcją współrzędnych uogólnionych q i czasu t (F nie zależy od prędkości uogólnionych \dot{q}). Pokazać, że równania Lagrange'a drugiego rodzaju są niezmiennicze względem powyższej transformacji.

4. Koralek ślizga się bez tarcia po drucie w jednorodnym polu grawitacyjnym. Kształt drutu opisany jest w układzie kartezjańskim zależnością $y = f(x)$ (kierunek Y jest kierunkiem pionowym, kierunek X – poziomym). Niech x będzie współrzędną uogólnioną. Zapisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla koraleka.
5. Sztywna obręcz w kształcie okręgu o promieniu R obraca się wokół pionowej średnicy z ustaloną prędkością kątową Ω w jednorodnym polu grawitacyjnym. Po obręczy ślizga się bez tarcia koralek. Zapisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla ruchu koraleka. Jako współrzędną uogólnioną przyjąć kąt pomiędzy promieniem poprowadzonym ze środka obręczy do koraleka, a kierunkiem pionowym.
6. Punkt materialny porusza się po powierzchni stożka. Poza siłami reakcji więzów na punkt nie działają żadne dodatkowe siły. Zapisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju.
7. To samo dla punktu poruszającego się po powierzchni stożka zanurzonego w jednorodnym polu grawitacyjnym skierowanym wzdłuż osi symetrii stożka w stronę jego wierzchołka.