MECHANIKA TEORETYCZNA

Zestaw 12.

1. Cząstka punktowa o masie m porusza się po powierzchni opisywanej równaniem $z = \rho^4/(4l^3)$, gdzie (ρ, φ, z) są współrzędnymi walcowymi, a l parametrem o wymiarze długości, w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g skierowanym przeciwnie do osi z.
   a) Zapisać funkcję Lagrange'a we współrzędnych uogólnionych, zgodnych z symetrią układu.
   b) Znaleźć dwie całki ruchu.
   c) Dla jakich wartości całek ruchu cząstka będzie się poruszała po orbicie kołowej o promieniu $\rho = l$? Znaleźć częstość kołową Ω dla tej orbity.
   d) Znaleźć częstość ω małych radialnych oscylacji wokół orbity kołowej.
2. Podwójne wahadło składa się z nieważkiego pręta o długości $2l$, na końcach którego są przyczepione dwie masy punktowe o wartościach $m/2$ oraz nieważkiego pręta o długości l, z zaczepioną masą m. Oś obrotu wahadła znajduje się w środku pręta o długości 2l, a drugi pręt jest zaczepiony do jednego z końców pierwszego pręta. Układ wykonuje ruchy w płaszczyźnie pionowej. Przyspieszenie ziemskie wynosi g. Położenie wahadeł można opisać za pomocą kątów φ_1 i φ_2, jakie tworzą wahadła z pionem.
   a) Znaleźć funkcję Lagrange'a opisującą ruch tego układu.
   b) Znaleźć częstości małych drgań podwójnego wahadła.
   c) Zapisać ogólne rozwiązanie równań ruchu w przybliżeniu małych drgań.
3. Funkcja Lagrange'a

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x)$$

   opisuje ruch cząstki o masie m w dwu wymiarach. Stała α jest niezerowa.
   a) Zapisać funkcję Hamiltona dla tego układu.
   b) Wypisać równania Hamiltona.
   c) Podać ogólne rozwiązanie równań Hamiltona.
   d) Pokazać, bez zapisywania i rozwiązywania równań ruchu, że funkcja Lagrange'a

$$L' = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \alpha\dot{x}y$$

   prowadzi do tych samych równań ruchu, co funkcja L.
4. Układ składa się z dwóch klocków o masach $2m$, poruszających się w jednym wymiarze bez tarcia pomiędzy dwoma nieruchomymi ściankami. Klocki połączone są trzema sprężynkami o stałej sprężystości $2k$ w następujący sposób: nieruchoma ścianka – sprężynka – klocek – sprężynka – klocek – sprężynka – nieruchoma ścianka.

a) Znaleźć funkcję Lagrange'a i wynikające z niej równania ruchu.
b) Wypisać ogólne rozwiązanie równań ruchu.
c) Znaleźć szczególne rozwiązanie równań ruchu dla $x(0) = y(0) = 0$ oraz $\dot{x}(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$, gdzie $x(t)$ oraz $y(t)$ oznaczają wychylenia poszczególnych klocków z położenia równowagi.