

MECHANIKA TEORETYCZNA
Zestaw 10.

1. Funkcja Hamiltona układu o 1 stopniu swobody ma postać

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right).$$

Znaleźć równania ruchu. Następnie znaleźć transformację kanoniczną, która redukuje H do postaci charakterystycznej dla oscylatora harmonicznego. Pokazać, że rozwiązanie otrzymane w nowych zmiennych spełnia (po przejściu do oryginalnych zmiennych) wyprowadzone wcześniej równania ruchu.

2. Dla zależnej od czasu funkcji Hamiltona

$$H = \frac{q^2}{2t^2} + \frac{t^2 p^2}{2} + \frac{qp}{t}$$

rozważyć zależną od czasu transformację do nowych współrzędnych $Q = -\alpha tp$, $P = q/t$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą. Sprawdzić, dla jakiej wartości α powyższa transformacja jest transformacją kanoniczną. Znaleźć funkcję tworzącą $F(q, Q, t)$. Znaleźć nową funkcję Hamiltona $H'(Q, P, t)$ oraz podać ogólne rozwiązanie równań Hamiltona dla Q oraz P .

3. Znaleźć zależność $q(t)$ oraz $p(t)$ (położenia oraz pędu) dla oscylatora harmonicznego o częstości ω poprzez rozwiązanie równań Hamiltona-Jacobiego.
4. Kulka o masie m ślizga się bez tarcia po poziomej szynie, która wiruje ze stałą prędkością kątową wokół pionowej osi. Zapisać funkcję Hamiltona opisującą ruch kulki oraz wyznaczyć całkę ruchu. W chwili początkowej kulka znajduje się w odległości R od osi obrotu i ma zerową prędkość radialną. Stosując metodę Hamiltona-Jacobiego wyznaczyć zależność położenia kulki od czasu.