Zadania z Algebry z Geometrią
Zestaw 7.

1. Macierze Pauliego σ_i, gdzie $i = 1, 2, 3$, mają następującą postać:
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Proszę pokazać, że:
a) Są one hermitowskie oraz unitarne.
b) $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{I}_2 + i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sigma_k$, gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem całkowicie antysymetrycznym.
c) $\det \sigma_i = -1$, $\mathrm{Tr} \sigma_i = 0$, $\mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_k) = 2\delta_{ik}$, $\mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_k \sigma_l) = 2i\epsilon_{ikl}$.
d) $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$.
2. Proszę obliczyć
$$\begin{vmatrix} 15 & 8 & 7 & 6 \\ 22 & 11 & 11 & 4 \\ 6 & 7 & -2 & -9 \\ 53 & 21 & 32 & 0 \end{vmatrix}.$$
3. Proszę pokazać, że
$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ . & . & . & . & . & . \\ a & a & a & \dots & x & a \\ a & a & a & \dots & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}[x + (n-1)a],$$
gdzie n jest wymiarem wyznacznika.
4. Proszę pokazać, że
$$\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & a \\ a & x_1 & a & \dots & a & a \\ a & a & x_2 & \dots & a & a \\ . & . & . & . & . & . \\ a & a & a & \dots & x_{n-1} & a \\ a & a & a & \dots & a & x_n \end{vmatrix} = a \prod_{k=1}^{n} (x_k - a).$$
5. Proszę obliczyć
$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & 1 + x_1 y_3 \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & 1 + x_2 y_3 \\ 1 + x_3 y_1 & 1 + x_3 y_2 & 1 + x_3 y_3 \end{vmatrix}.$$
6. Proszę wykazać, że
$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$
oraz
$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij},$$
gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem Levi-Civity o trzech wskaźnikach.