Algebra z Geometrią

*Zestaw 6.*

1. Niech $a$ oznacza macierz kwadratową o niezerowym wyznaczniku. Udowodnić, że $(a^{\mathrm{T}})^{-1} = (a^{-1})^{\mathrm{T}}$. Podobnie $(a^{\dagger})^{-1} = (a^{-1})^{\dagger}$.
2. Wyliczyć macierze odwrotne do podanych macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1+2i & 1+3i \\ 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Wyliczyć macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Jaką interpretację ma powyższa macierz w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej?

4. Stosując wzory Cramera rozwiązać następujące układy równań:

a)

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 1, \\ x + 2y + 9z &= 1, \\ x + 6y + 6z &= 1; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 4, \\ -x + 3y + 2z &= 2, \\ 3x + 9y + 6z &= -6. \end{aligned}$$

5. Znaleźć rzędy następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Określić rząd macierzy w zależności od wartości parametru $\lambda$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Znaleźć ogólne rozwiązania, o ile istnieją, układów równań określonych podanymi macierzami dołączonymi – ostatnia kolumna oznacza kolumnę wyrazów wolnych.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 2 & -4 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -2 & 7 & 12 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1-i & 2-3i & 5+i \\ 2-i & -3 & -3+i & 2-i \\ -3-4i & 2+7i & 7+3i & 7-4i \end{pmatrix}.$$