Zadania z Algebry z Geometrią
Zestaw 2.

1. W dziedzinie odwzorowania $f\colon X \to Y$ określamy relację $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Proszę wykazać, że jest to relacja równoważności. Proszę zapisać zbiór ilorazowy $X/\sim$ przy pomocy pojęć obrazu i przeciwobrazu.
2. Niech $f\colon X \to Y$. Proszę wyzkazać, że:
   a) dla każdego zbioru $A \subseteq X$ zachodzi $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ oraz dla każdego zbioru $B \subseteq Y$ zachodzi $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;
   b) f jest injekcją wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $A \subseteq X$ zachodzi $f^{-1}(f(A)) = A$;
   c) f jest surjekcją wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $B \subseteq Y$ zachodzi $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Proszę wykazać, że zbiór $\mathbb{R}$ jest równoliczny z każdym podzbiorem otwartym.
4. Proszę wykazać, że zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest równej mocy z $\mathbb{N}$.
5. Niech zbiór X będzie liniowo uporządkowany relacją $\leqslant$. Określamy w tym zbiorze działanie $x \circ y = \max\{x, y\}$. Proszę sprawdzić, czy działanie jest łączne. Jaki jest warunek istnienia elementu neutralnego? Czy istnieją wtedy elementy odwrotne?
6. W zbiorze X zadajemy działanie przepisem $x \circ y = x$. Proszę sprawdzić, czy to działanie jest łączne. Co można wywnioskować o zbiorze X, jeśli to działanie ma w nim element neutralny?