Zadania z Algebry z Geometrią
Zestaw 10.

1. Dana jest macierz odwzorowania liniowego $A \in \mathcal{L}(V, W)$ w bazach $(e_1, \dots, e_m)$ i $(f_1, \dots, f_n)$ przestrzeni V i W odpowiednio. Znaleźć bazę jądra i bazę obrazu odwzorowania, oraz macierz przejścia do bazy, w której przyjmuje ono postać kanoniczną.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Dana jest macierz operatora A w bazie (e_1, e_2, e_3) przestrzeni rzeczywistej. Wyliczyć wartości i wektory własne tego operatora. Jeśli operator jest diagonalizowalny, to znaleźć macierz przejścia do bazy złożonej z wektorów własnych. Podać związek baz i macierz operatora w nowej bazie.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -3 & 4 & -9 \\ 5 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

3. Wykazać, że jeśli operator w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej ma tylko jedną w wałsną, to albo jest operatorem proporcjonalnym do identycznościowego, albo istnieje baza, w której jego macierz ma postać

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$