

Szczególna teoria względności

Zestaw IX

Czterowektory opisujące fizykę W STW obliczenia wykonujemy w czterowymiarowej przestrzeni ze specyficzną geometrią (czasoprzestrzeń Minkowskiego). Podobnie jak w elementarnej fizyce klasycznej, będziemy chcieli korzystać z obiektów opisujących pewne wielkości w tej przestrzeni. Z uwagi na geometrię, z jaką będziemy się stykać, będzie to jednak trochę bardziej skomplikowane.

Najbardziej podstawową wielkością, z jakiej skorzystamy, będzie odpowiednik zwykłej prędkości – wektor 4-prędkości.¹

Dla obserwatora masywnego poruszającego się po krzywej s sparametryzowanej czasem własnym:

$$s(\tau)^\mu = (s^t(\tau), s^x(\tau), s^y(\tau), s^z(\tau)), \quad (1)$$

wektor 4-prędkości ma formę

$$u(\tau)^\mu = \left(\frac{ds^t(\tau)}{d\tau}, \frac{ds^x(\tau)}{d\tau}, \frac{ds^y(\tau)}{d\tau}, \frac{ds^z(\tau)}{d\tau} \right). \quad (2)$$

Przy użyciu współczynnika Lorentza $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ oraz zwykłej prędkości v i pomijając argument parametryzacji dla skrócenia notacji, możemy to zapisać jako

$$u^\mu = \gamma (c, \vec{v}). \quad (3)$$

Wektor ten w standardowych jednostkach normalizuje się do

$$u^\mu u_\mu = c^2, \quad (4)$$

co nie jest przypadkiem - w pewnym sensie wszystkie masywne obiekty poruszają się z prędkością c , zmienia się tylko ich 'kąt nachylenia' w czasoprzestrzeni.

Czteroprzyspieszenie to

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (5)$$

i normalizuje się ono do $-|a^2|$, gdzie a to wartość przyspieszenia, jakie jest w stanie zmierzyć obserwator przy użyciu np. akcelerometru. Czteroprzyspieszenie jest zawsze ortogonalne do czteroprędkości, gdyż nie może zmienić jej normalizacji równej c^2 . Zatem:

$$a^\mu u_\mu = 0. \quad (6)$$

Czteropęd definiujemy jako

$$p^\mu = mu^\mu. \quad (7)$$

¹Pewna uwaga: często nawet operując w czasoprzestrzeni dwuwymiarowej, czyli na płaszczyźnie Minkowskiego, będziemy te wektory dalej nazywać cztero-wektorami, mimo, że tak naprawdę są to dwu-wektory. Jest to czasami stosowany skrót myślowy, bo zwykle robiąc rzeczy w dwóch wymiarach i tak chcemy opisać zjawisko czterowymiarowe.

Normalizuje on się do m^2c^2 . Jest szczególnie użyteczny przy kolizjach cząstek, w których zachodzi zasada zachowania czteropędu:

$$p_{\text{przed}} = p_{\text{po}}. \quad (8)$$

Daje to nam narzędzie do analizy kolizji: rozpisujemy czteropędy cząstek przed oraz po kolizji, i przyrównujemy je do siebie. Pozwala to usunąć stopnie swobody z równań.

Zadania.

1. Obserwatorzy A i B poruszają się w układzie LAB po jednej prostej na spotkanie i mają w LAB prędkości $v_A = 0,7c$ i $v_B = -0,9c$. Obserwator A wysyła do B sygnał z lasera o długości fali λ_A mierzonej w jego układzie. Jak długość fali zmierzy obserwator B?
2. Pocisk ma 4-prędkość u^α , a rakieta ma 4-prędkość v^α , obie wyznaczone przez czas własny każdej linii świata. Składowe obu tych wektorów są dane w pewnym układzie LAB. Wykazać, że moduł prędkości względnej pocisku względem rakiety $v = |\vec{v}|$ jest wyznaczony przez wektory u^α i v^α .
3. W układzie LAB jest akcelerator, w którym elektrony krążą po orbicie kołowej o promieniu R ze stałą prędkością relatywistyczną v . Znaleźć 4-przyspieszenie w^α elektronu w LAB oraz przyspieszenie w'^α w chwilowym układzie spoczynkowym pojedynczego elektronu. Znaleźć relację pomiędzy modułami 3-przyspieszenia $a = |\vec{a}|$ w LAB i $a' = |\vec{a}'|$ w układzie własnym.
4. Cząstka ma trajektorię $x^0 = ct$, $x^1 = \frac{3}{2}at^2$, $x^2 = 2at^2$, $x^3 = 0$, dla $t \geq 0$ oraz $a = \text{const} > 0$.
 - a) Wykazać, że ten ruch nie może trwać dowolnie długo i ma nieosiągalny kres dla $t = t_0$, tzn. $0 \leq t < t_0$.
 - b) Wyliczyć prędkość u^α i przyspieszenie cząstki w^α w tym przedziale. Jak zachowuje się przyspieszenie w^α , gdy $t \rightarrow t_0$?
 - c) Wyliczyć czas własny cząstki $s(0, t)$ i jego granicę w $t \rightarrow t_0$.
5. Droga Mleczna ma średnicę 100 000 lat świetlnych. Protony promieniowania kosmicznego osiągają całkowitą energię 10^{19} eV. Ile czasu zajmie takiemu protonowi podróż przez całą Galaktykę:
 - mierzona w układzie spoczynkowym Drogi Mlecznej?
 - mierzona w układzie własnym protonu?

Wziąć z tablic masę spoczynkową protonu m_p wyrażoną w eV.

6. Mezon o masie spoczynkowej m porusza się w układzie LAB z prędkością v i rozpada się w locie na dwa fotony, które lecą po tej samej prostej co mezon przed rozpadem. Znaleźć energię i pęd każdego fotonu. Czy oba fotony mogą lecieć w tę samą stronę?