

Szczególna teoria względności

Zestaw V

Gr. I

Zajęcia zaczniemy od dokończenia zadania 3go z poprzedniego zestawu.

Algebra tensorów II

1. Definiujemy kontrawariantny tensor metryczny g^{ij} jako macierz odwrotną do macierzy g_{ij} ,

$$g^{ik} g_{kj} = g^{ki} g_{jk} = \delta^i_j \text{ - delta Kroneckera.}$$

Jeżeli nie ma metryki, to przestrzenie V_n i V_n^* są odrębne. Metryka jednoznacznie przypisuje kowektor wektorowi i na odwrót:

- wektor $\vec{u}$ ma składowe kontrawariantne u^i oraz kowariantne $u_i \equiv g_{ij} u^j$,
- kowektor $\tilde{v}$ ma składowe kowariantne v_i i kontrawariantne $v^i \equiv g^{ij} v_j$.

Utożsamiamy $\vec{u}$ z $\tilde{u}$, Podobnie przesuwamy w pionie indeksy w tensorach: $P^i_j = g^{ik} P_{kj}$, $P^{ij} = g^{ik} g^{jl} P_{kl}$, $P_i^j = g_{ik} P^{kj}$ itd.

Definiujemy symetryzację i antysymetryzację tensorów o dwu indeksach:

$$S_{ij} = P_{(ij)} \equiv \frac{1}{2} (P_{ij} + P_{ji}) = S_{ji},$$

$$A_{ij} = P_{[ij]} \equiv \frac{1}{2} (P_{ij} - P_{ji}) = -A_{ji},$$

podobnie

$$S^{ij} = P^{(ij)} = \frac{1}{2} (P^{ij} + P^{ji}),$$

gdzie P_{ij} - dowolny tensor.

Zadanie.

- a) Dowieść, że po zmianie bazy w V_n tensor symetryczny S_{ij} pozostaje symetryczny, a tensor antysymetryczny A_{ij} jest nadal antysymetryczny.
- b) Niech w bazie $\{\vec{e}_i\}$ tensor mieszany T^i_j będzie symetryczny, $T^i_j = T^j_i$. Czy po dowolnej zmianie bazy będzie on nadal symetryczny?
- c) Niech S^{ij} -tensor symetryczny i A_{ij} -antysymetryczny. Obliczyć podwójne zwięzienie (sumę) $S^{ij} A_{ij}$.

Algebra wektorów

Rozpatrujemy wektorową przestrzeń Minkowskiego $M_4 = \{v\}$, $v = (v^\mu)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, w której wprowadzono iloczyn skalarny za pomocą tensora metrycznego Minkowskiego

$$G = (\eta_{\mu,\nu}) = \text{diag}[1, -1, -1, -1] = (\eta^{\mu\nu}) = G^{-1},$$

czyli

$$u \cdot w = \eta_{\mu\nu} u^\mu w^\nu = u^0 w^0 - u^1 w^1 - u^2 w^2 - u^3 w^3$$

($u \cdot w = 0$ - wektory ortogonalne). Kwadrat długości wektora jest

$$u \cdot u = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2,$$

ta wielkość jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wszystkie wektory dzielimy ze względu na ich kwadrat na 3 typy:

- czasowe, gdy $u \cdot u > 0$,
- przestrzenne, gdy $u \cdot u < 0$,
- świetlne(zerowe), gdy $u \neq 0$ i $u \cdot u = 0$.

W M_4 wprowadzamy transformacje baz, przy których składowe wektorów transformują się według: $u^\mu = L^\mu_\nu u'^\nu$, $u'_\mu = (L^{-1})^\nu_\mu u_\nu$.

$L = (L^\mu_\nu)$ jest macierzą Lorentza, więc $L^T G L = G$ oznacza, że zmiana bazy nie zmienia składowych metryki i we wszystkich bazach jest równa $\eta_{\mu\nu}$.

W $\mathbb{E}^3$ obrotami układu kartezjańskiego można położyć każdy wektor na wybranej osi. W M_4 jest podobnie, ale z istotnymi ograniczeniami:

- jeśli u jest czasowy, to musi być $u^0 \neq 0$,
- jeśli u jest przestrzenny, to jedna ze składowych przestrzennych musi być $\neq 0$,
- jeśli u jest zerowy, to dwie składowe, u^0 i jedna z u^i musi być $\neq 0$.

Jeśli u jest czasowy lub zerowy, to u jest skierowany w przyszłość (przeszłość), jeżeli $u^0 > 0$ ($u^0 < 0$).

Zadania

2. Niech u -wektor czasowy. Dowieść, że jeżeli $u \cdot p = 0$, to wektor $p = (p^\mu)$ jest przestrzenny $\implies$ wektor czasowy nie może być ortogonalny do czasowego lub zerowego.
3. Niech u i w są czasowe i $u \cdot w > 0$. Dowieść, że u i w jednocześnie są skierowane w przyszłość lub w przeszłość.
4. Jeżeli k i l są wektorami zerowymi (światłymi) i $k \cdot l = 0$, to dowieść, że są proporcjonalne, $l^\mu = ak^\mu$, $a \neq 0$.
5. Dowieść, że jeżeli k jest zerowy i $k \cdot p = 0$, to albo p jest przestrzenny, albo $p = ak$.
6. Dowieść, że jeżeli k i l są zerowe i skierowane w przyszłość, to ich iloczyn $k \cdot l > 0$.
7. Niech k i l są wektorami zerowymi skierowanymi w przyszłość i liniowo niezależnymi. Dowieść, że wektor $k + l$ o składowych $k^\mu + l^\mu$ jest czasowy i skierowany w przyszłość.
8. Z zadania 7, wynika, że każdy wektor czasowy skierowany w przyszłość jest sumą $k + l$ wektorów zerowych. Wektory te nie są określone jednoznacznie. Wykazać, że podlegają one zmianie $k \rightarrow k' = k + p$, $l \rightarrow l' = l - p$. Jakie własności ma wektor p ?