

Szczególna teoria względności

Zestaw IV

Dokończyć zadanie 7 z poprzedniego zestawu.

Wstęp teoretyczny

- 2 IUO: $S(t, \mathbf{r})$ i $S'(t', \mathbf{r}')$ w **relacji standardowej**: osie obu układów są stale równoległe, $\mathbf{V} = \text{const}$ – prędkość S' względem S mierzona w S ,
 $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} = (x, y, z) = (x^i), \quad i = 1, 2, 3.$

Transformacja z S do S' jest **transformacją Galileusza**:

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t - \mathbf{b}, \\ t' = t. \end{cases}$$

- Używając transformacji Galileusza można prosto pokazać, że dla równań Newtona zachodzi

$$F' = ma' = ma = F. \quad (1)$$

Innymi słowy, jeśli dwoje obserwatorów obserwuje to samo fizyczne zjawisko to

- dojdą do wniosku, że siła z nim związana jest dokładnie taka sama względem nich jak i każdego innego obserwatora inercyjnego.
 - zauważą, że siła którą wyraża się jako iloczyn przyspieszenie i masy nie zmienia swojej postaci w żadnym z układów inercjalnych.
- Równania Maxwella to zestaw czterech podstawowych równania elektrodynamiki klasycznej. Opisują one właściwości pola elektrycznego i magnetycznego oraz zależności między tymi polami. Poniżej przedstawiamy ich postać w próżni, czyli gdy nie ma ładunków ($\rho = 0$) ani przepływu prądu ($j = 0$)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5)$$

gdzie:

- $\vec{E}$ – natężenie pola elektrycznego,
- $\vec{B}$ – indukcja pola magnetycznego,
- $\nabla \cdot$ - operator dywergencji,
- $\nabla \times$ – operator rotacji,
- c - prędkość światła.

Zadania

1. Pokazać, że pod wpływem transformacji Galileusza moment pędu transformuje się w poniższy sposób

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{J}' = \mathbf{J} + \mathbf{V} \times (m\mathbf{r} - t\mathbf{p}).$$

2. Przykład zastosowania transformacji Galileusza w szczególnym przypadku pola elektromagnetycznego.

Rozważamy dwa IUO S i S' , gdzie S' porusza się z prędkością $\mathbf{V} = (v, 0, 0)$ względem S mierzoną w S . Układ S wypełniony jest polem elektromagnetycznym w następujący sposób

$$\begin{cases} \vec{E} = E(x, t)\hat{y}, \\ \vec{B} = B(x, t)\hat{z}. \end{cases} \quad (6)$$

- a) Przyjmując, że w polu elektromagnetycznym porusza się naładowana cząstka, wyprowadzić z równań ruchu tej cząstki prawa transformacyjne dla pola elektromagnetycznego, tzn. pokazać, że pola w układzie S' będą mieć poniższą postać

$$\begin{cases} E' = E - vB, \\ B' = B. \end{cases} \quad (7)$$

- b) Na podstawie równań Maxwella (2)-(5) pokazać, że w badanym przypadku zachodzi relacja

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (8)$$

- c) Sprawdzić jak transformują się pochodne $\frac{\partial B}{\partial x}$ i $\frac{\partial E}{\partial t}$.

- d) Korzystając z (7) i (8) wyliczyć w układzie S' pochodną $\frac{\partial B'}{\partial x'}$. Co możemy wywnioskować z tego wyniku?

3. Rozważamy układ nieinercjalny N ze współrzędnymi kartezjańskimi (x', y', z') wirujący względem IUO S w jego płaszczyźnie (x, y) wokół osi z z prędkością kątową $\omega(t)$. Na przykład: N - wirująca Ziemia, S - układ inercjalny wyznaczony przez dalekie "gwiazdy stałe".

Postulat: transformacja $S \rightarrow N$ ma postać

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \phi(t) + y \sin \phi(t) \\ y' &= -x \sin \phi(t) + y \cos \phi(t) \\ z' &= z, \quad t' = t. \end{aligned} \right\} \phi(t) := \int_0^t \omega(t) dt \Rightarrow \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$\phi(0) = 0 \Rightarrow$ dla $t = 0$ osie obu układów pokrywają się. To **nie** jest transformacja Galileusza - bo zależy **nieliniowo** od t .

W S mamy cząstkę swobodną z $\mathbf{r}(t) = (x, y, z)$, spełnia $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}$.

Wyliczyć siłę F' działającą na tą na cząstkę w układzie N . Jaka jest interpretacja fizyczna poszczególnych składowych otrzymanego wzoru?