

Szczególna teoria względności

Zestaw II

1. *Geometria analityczna.* Rozważmy czterowymiarową przestrzeń afiniczną euklidesową $\mathbb{E}^4$. Wybieramy kartezjański układ odniesienia, w którym dowolny punkt ma współrzędne (w, x, y, z) . Iloczyn skalarny dwóch wektorów $a \in \mathbb{E}^4$ i $b \in \mathbb{E}^4$ o składowych

$$a = (a_w, a_x, a_y, a_z), b = (b_w, b_x, b_y, b_z) \text{ wynosi}$$

$$a \cdot b = a_w b_w + a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \sum_i a_i b_i \equiv a^i b_i \text{ (konwencja sumacyjna Einsteina).}$$

Zadania.

- Wyznaczyć równanie hiperpłaszczyzny prostopadłej do wektora $n = (1, 2, 0, 1)$ i przechodzącej przez punkt $P = (0, 0, 1, 1)$.
 - Znaleźć równanie hiperpłaszczyzny równoległej do hiperpłaszczyzny o równaniu $\Pi_1 : 2w + x - y - 2 = 0$, przechodzącej przez punkt $P = (-1, 0, 2, 1)$.
 - Znaleźć równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P = (4, 3, 2, 1)$ i prostopadłej do hiperpłaszczyzny $\Pi : 10w + 20x + 30y + 40z + 50 = 0$.
2. *Algebra tensorów.* Rozpatrujemy przestrzeń wektorową $V_n = \{\vec{v}\}$ z bazą $\{\vec{e}_i\}$, $i, j = 1, \dots, n$. Wektory z V_n nazywamy wektorami kontrawariantnymi, $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$. W V_n wprowadzamy tensor metryczny $g = (g_{ij})$ określający iloczyn skalarny wektorów: $\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv g(\vec{u}, \vec{v}) = g_{ij} u^i v^j \in \mathbb{R}$. Własności iloczynu skalarnego:

- $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$ - symetria,
- jeżeli $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ dla wszystkich $\vec{v}$, to $\vec{u} = 0$ - metryka jest nieosobliwa.

Zadanie. Dowieść:

- symetria iloczynu implikuje, że tensor metryczny jest symetryczny, $g_{ij} = g_{ji}$,
- nieosobliwość metryki wymaga, by $\det(g_{ij}) \equiv g \neq 0$.

Nieosobliwość metryki oznacza, że jest indefinitna: istnieją wektory, których kwadrat długości $g(\vec{u}, \vec{u}) = g_{ij} u^i u^j$ jest ujemny lub zero.

3. W V_n możliwe są transformacje czynne i bierne. Transformacja czynna to liniowe wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie V_n na V_n za pomocą liniowego operatora (macierzy) L , $L\vec{u} = \vec{v}$. Interesują nas transformacje bierne: Przekształcenie bazy $\{\vec{e}_i\}$ w nową bazę $\{\vec{e}'_i\}$ transformacją liniową z macierzą $T = (T^i_j)$, lewy indeks-wiersze, prawy indeks-kolumny macierzy, $\vec{e}'_i = T^j_i \vec{e}_j$.

Transformacja baz jest odwracalna $\implies \det(T^i_j) \neq 0$.

Zadanie. Z definicji transformacja baz nie zmienia wektorów: $\vec{u} = u^i \vec{e}_i = u'^j \vec{e}'_j$. Wyprowadzić stąd prawo transformacyjne dla składowych u'^j wektora w nowej bazie.

4. Wprowadzamy przestrzeń V_n^* dualną do V_n : jest to przestrzeń liniowa odwzorowań liniowych wektorów w liczby rzeczywiste, $V_n^* = \{\tilde{v}\}$, $\tilde{v}(\vec{u}) \in \mathbb{R}$, $\tilde{v}$ - wektor kowariantny (kovektor). Piszemy $\tilde{v}(\vec{u}) \equiv v_i u^i$ w bazie $\{\vec{e}_i\}$ w V_n , v_i - składowe kowariantne kovektora $\tilde{v}$ w bazie $\{\vec{e}_i\}$.

Zadanie. Z definicji liczba $\tilde{v}(u) = v_i u^i = v'_j u'^j$ jest niezmiennikiem transformacji baz w V_n . Wyprowadzić stąd prawo transformacyjne dla składowych wektora kowariantnego.

5. Tensor dwukrotnie kowariantny to odwzorowanie dwuliniowe wektorów w liczby, $P(\vec{u}, \vec{v}) \equiv P_{ij} u^i v^j \in \mathbb{R}$. Przykładem jest metryka g_{ij} w V_n .

Zadanie. Jak transformuje się metryka przy zmianie bazy w V_n ? Ponieważ $P(\vec{u}, \vec{v})$ jest niezmiennikiem transformacji baz, więc każdy P_{ij} transformuje się jak g_{ij} .