

Szczególna teoria względności

Zestaw I

1. Rozpatrujemy 2 zbiory macierzy wyrażających transformacje współrzędnych w dwu przestrzeniach. Należy wykazać, że te zbiory tworzą grupę.

- a) Płaszczyzna euklidesowa. Współrzędne kartezjańskie (x, y) transformują się obrotami:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wykazać przy tym, że $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.

- b) Płaszczyzna Minkowskiego ze współrzędnymi (t, x) , które transformują się według

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = B(\psi) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Wykazać przy tym, że $B(\psi)B(\psi') = B(\psi + \psi')$.

2. Wykazać, że transformacje z zadania 1 mają przedstawienie eksponencjalne. Definiujemy funkcję wykładniczą macierzy kwadratowej A :

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

- a) Bierzemy pochodną macierzy R w $\theta = 0$: $\frac{dR}{d\theta}|_{\theta=0} = R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wykazać, że

$$e^{\theta R'(0)} = R(\theta).$$

- b) Podobnie dowieść, że pochodna $B'(0) = \frac{dB}{d\psi}|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ daje

$$e^{\psi B'(0)} = B(\psi).$$

Wskazówka. Wyliczyć kolejne potęgi macierzy $R'(0)$ i $B'(0)$.