

# Szczególna teoria względności

## Zestaw II

*Algebra tensorów.* Rozpatrujemy przestrzeń wektorową  $V_n = \{\vec{v}\}$  z bazą  $\{\vec{e}_i\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Wektory z  $V_n$  nazywamy wektorami kontrawariantnymi,  $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ .

W algebrze tensorowej korzystamy z konwencji sumacyjnej

$$\sum_{i=1}^3 x^i y_i \equiv x^i y_i, \quad (1)$$

gdzie indeksy sparowane ze sobą oznaczają automatyczną sumację.

1. Rozpatrzmy transformacje bierne: Przekształcenie bazy  $\{\vec{e}_i\}$  w nową bazę  $\{\vec{e}'_i\}$  transformacją liniową z macierzą  $T = T^i_j$  (lewy indeks – wiersze, prawy indeks – kolumny macierzy):

$$\vec{e}'_i = T^j_i \vec{e}_j.$$

Wspomniana transformacja baz jest odwracalna  $\implies \det(T^i_j) \neq 0$ .

**Zadanie.** Z definicji, transformacja baz nie zmienia wektorów:  $\vec{u} = u^i \vec{e}_i = u'^j \vec{e}'_j$ . Wyprowadzić stąd prawo transformacyjne dla składowych  $u'^j$  wektora w nowej bazie. (Wskazówka: wyrazić składowe wektora  $\vec{u}$  w nowej bazie  $u'^j$  za pomocą składowych w starej bazie  $u^j$  oraz elementów macierzy odwrotnej  $T^{-1} = (T^{-1})^i_j$  do  $T$ .)

2. Wprowadzamy przestrzeń  $V_n^*$  dualną do  $V_n$ : jest to przestrzeń liniowa odwzorowań liniowych działających na wektory i zwracających liczby rzeczywiste:

$$V_n^* = \{\tilde{v}\}, \quad \tilde{v}(\vec{u}) \in \mathbb{R},$$

$\tilde{v}$  – wektor kowariantny (kovektor). W konwencji sumacyjnej Einsteina zapisujemy:  $\tilde{v}(\vec{u}) \equiv v_i u^i$  w bazie  $\{\vec{e}_i\}$  w  $V_n$ , wtedy  $v_i$  – składowe kowariantne kovektora  $\tilde{v}$  w bazie  $\{\vec{e}_i\}$ .

**Zadanie.** Z definicji, liczba  $\tilde{v}(u) = v_i u^i = v'_j u'^j$  jest niezmiennikiem transformacji baz w  $V_n$ . Mając transformację baz z Zadania 1, proszę wyprowadzić stąd prawo transformacyjne dla składowych wektora kowariantnego.

3. Tensor dwukrotnie kowariantny to odwzorowanie dwuliniowe wektorów w liczby. W konwencji sumacyjnej może być zapisane jako:

$$P(\vec{u}, \vec{v}) \equiv P_{ij} u^i v^j \in \mathbb{R}.$$

Przykładem jest metryka  $g_{ij}$  w  $V_n$ .

**Zadanie.** Jak transformuje się metryka przy zmianie bazy w  $V_n$ ? Ponieważ  $P(\vec{u}, \vec{v})$  jest niezmiennikiem transformacji baz, więc każdy  $P_{ij}$  transformuje się jak  $g_{ij}$ .

4. W  $V_n$  wprowadzamy tensor metryczny  $g = (g_{ij})$  określający iloczyn skalarny wektorów:  $\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv g(\vec{u}, \vec{v}) = g_{ij} u^i v^j \in \mathbb{R}$ . Własności iloczynu skalarnego:

1)  $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$  - symetria,

2) jeżeli  $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  dla wszystkich  $\vec{v}$ , to  $\vec{u} = 0$  – metryka jest nieosobliwa.

Jeśli metryka spełnia warunki 1) i 2), to jest indefinitna: istnieją wektory, których kwadrat długości  $g(\vec{u}, \vec{u}) = g_{ij}u^i u^j$  jest ujemny lub zero.

**Zadanie.** Dowieść, że:

a) symetria iloczynu implikuje, że tensor metryczny jest symetryczny,  $g_{ij} = g_{ji}$ ,

b) nieosobliwość metryki wymaga, by  $\det(g_{ij}) \equiv g \neq 0$ .

## 5. Zadanie

Dane są składowe wektora  $U^\alpha$  i kowektora  $V_\alpha$  w (1+3) wymiarowej przestrzeni Minkowskiego: Tensor metryczny ma w tym przypadku postać:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wartości składowych:

$$U^0 = 0$$

$$U^1 = 1$$

$$U^2 = 2$$

$$U^3 = -1$$

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = -1$$

$$V_2 = 0$$

$$V_3 = 3$$

Proszę obliczyć:

(a)  $U_\alpha$

(b)  $V^\alpha U^\beta$

(c)  $V^\alpha U_\beta$

(d)  $V_\alpha U^\alpha U_\beta$